

**Världshistoriens bästa samman-  
fattning av vektoranalysen**

## **Del 1: Förberedelser**

## Skalärfält

Ett *skalärfält* i planet (rummet) är en funktion som till varje punkt i planet (rummet) ordnar ett tal, d.v.s. en funktion

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{i planet}) \quad \text{eller} \quad \phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{i rummet}).$$

**Exempel:**  $\phi(x, y) = 10 - x^2 - y^2$  kan tolkas som temperaturen i punkten  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exempel:**  $\psi(x, y, z) = 10 - x^2 - y^2 - z^2$  kan tolkas som temperaturen i punkten  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

## Nivåmängder

### *I planet: nivåkurvor*

Givet ett skalärfält  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  i *planet* kan man erhålla en familj *kurvor*, de så kallade *nivåkurvorna*  $\phi(x, y) = c$  där  $c \in V_\phi$ .

**Exempel:** Betrakta igen  $\phi(x, y) = 10 - x^2 - y^2$ . Då är  $\phi(x, y) = c$  mängden av punkter  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  där temperaturen är precis  $c$  grader Celsius. För varje  $c < 10$  är en sådan mängd en cirkel med centrum i origo.

### *I rummet: nivåytor*

Givet ett skalärfält  $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  i *rummet* kan man erhålla en familj *ytor*, de så kallade *nivåytorna*  $\psi(x, y, z) = c$  där  $c \in V_\psi$ .

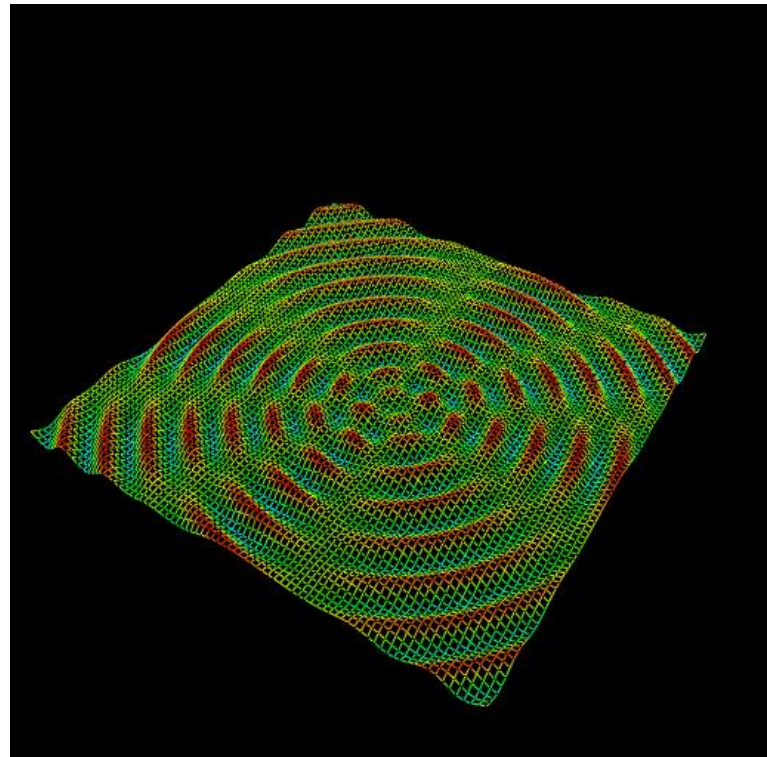
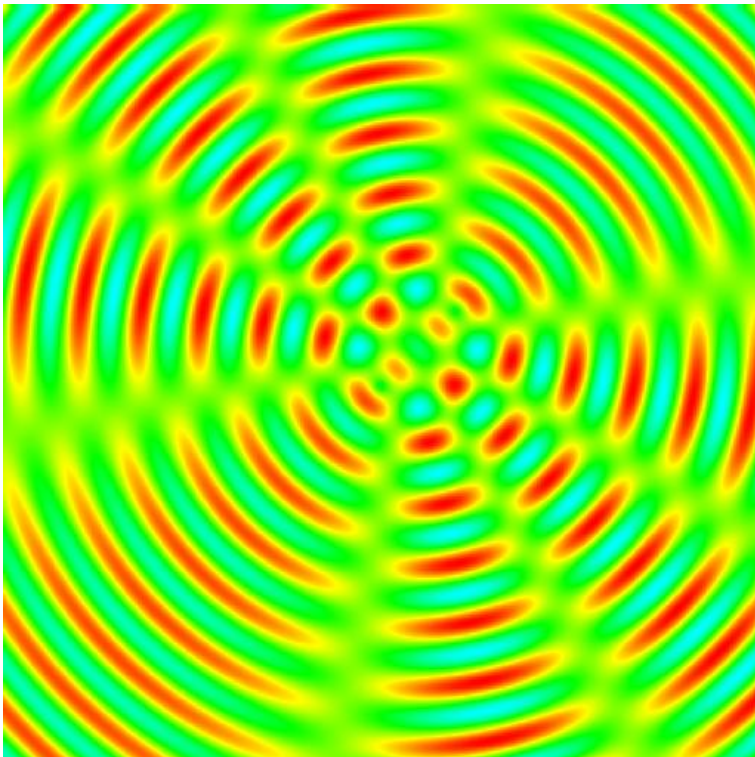
**Exempel:** Betrakta igen  $\psi(x, y, z) = 10 - x^2 - y^2 - z^2$ . Då är  $\psi(x, y, z) = c$  mängden av punkter  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  där temperaturen är precis  $c$  grader Celsius. För varje  $c < 10$  är en sådan mängd en sfär med centrum i origo.

(I dessa båda exempel kan nivåmängderna kallas *isotermer*, eftersom de är mängder av punkter med samma temperatur.)

## Visualisering av skalärfält i planet

Ett skalärfält  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  i planet kan visualiseras på flera olika sätt.

Förutom att rita några väl valda nivåkurvor till fältet kan man rita ett "färgat plan" eller studera grafen  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = \phi(x, y)\}$ .



## Vektorfält

Ett *vektorfält* i planet (rummet) är en funktion som till varje punkt i planet (rummet) ordnar en vektor, d.v.s. en funktion

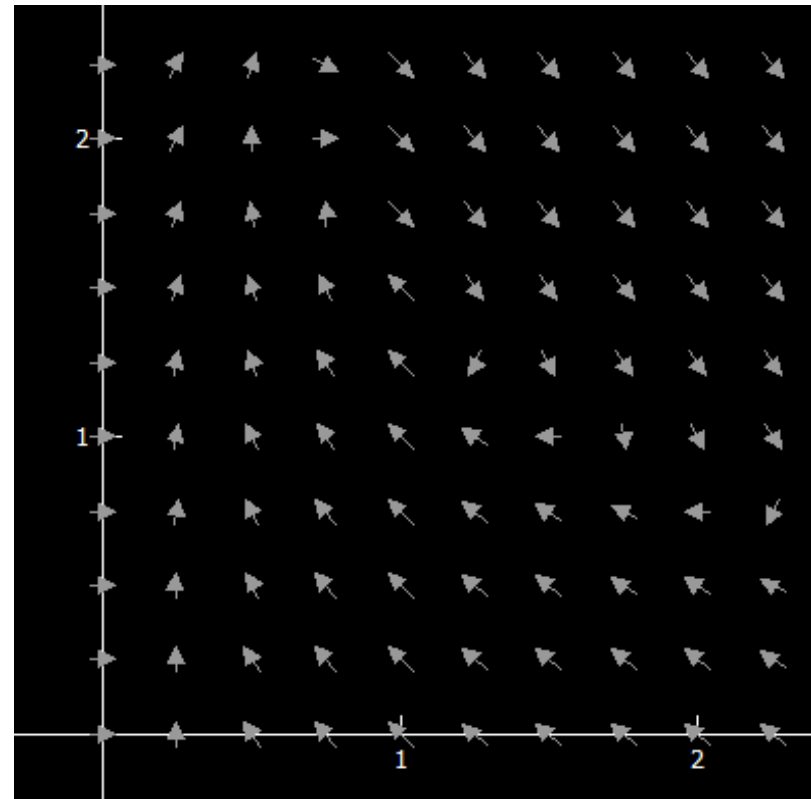
$$\mathbf{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\text{i planet}) \quad \text{eller} \quad \mathbf{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (\text{i rummet}).$$

### Exempel:

Det plana vektorfältet  $\mathbf{A}$  som definieras av

$$\mathbf{A}(x, y) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 + 2x^2y - 3x - x \\ -2x^2y + 3x \end{pmatrix}$$

illustreras till höger.

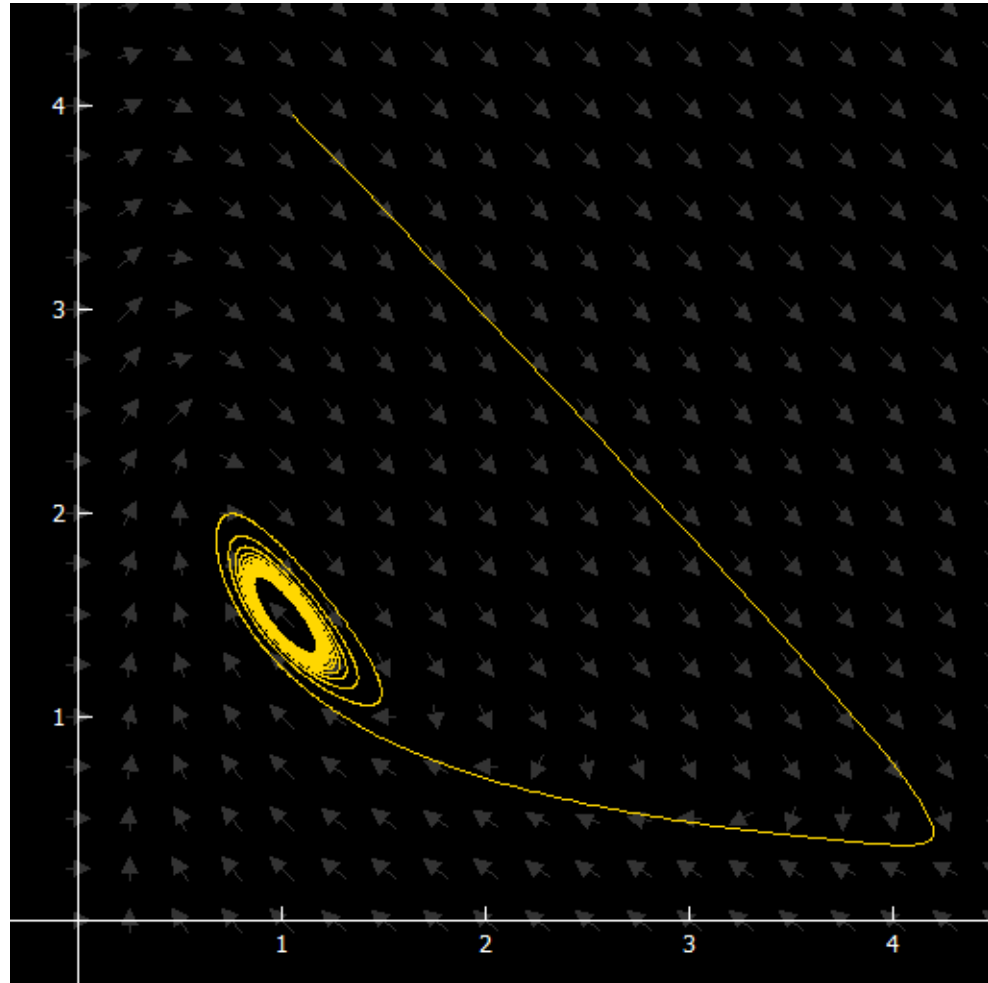


## Två fysikaliska tolkningar av vektorfält

Det finns två särskilt enkla och viktiga fysikaliska tolkningar av vektorfält.

### *Hastighetsfält*

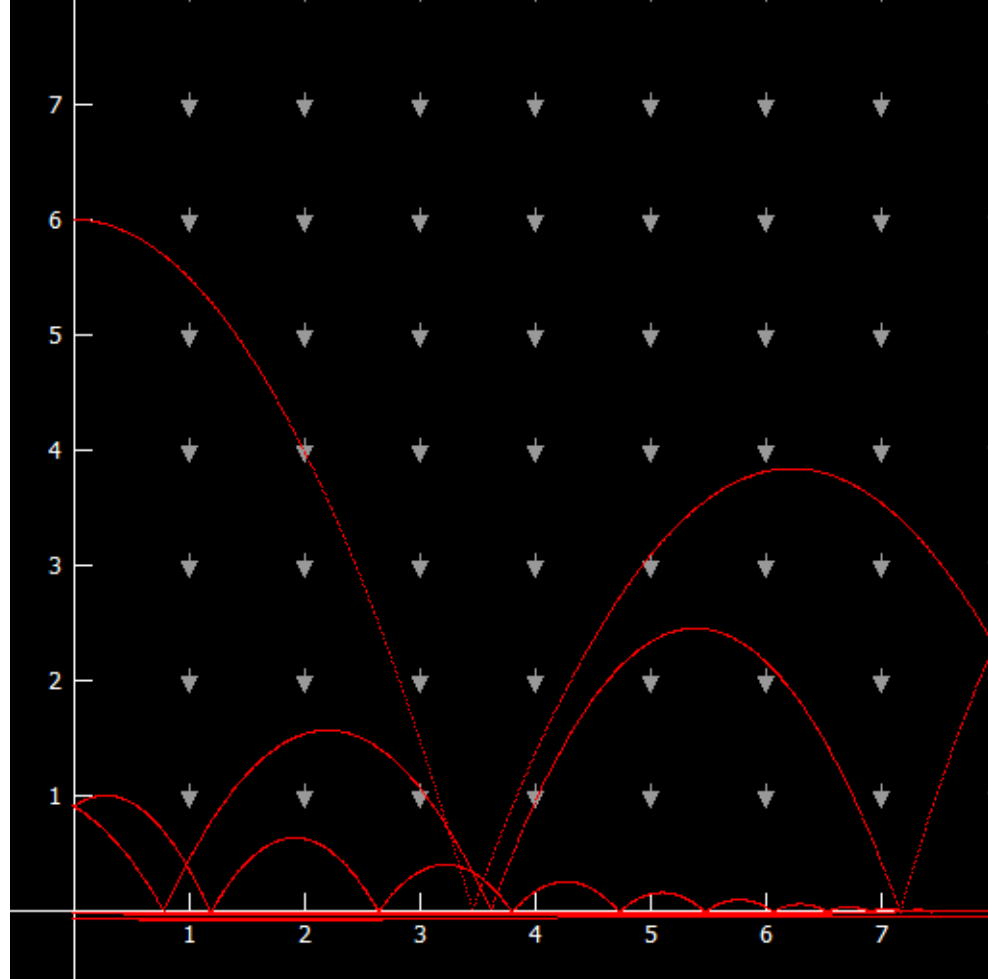
Dels kan  $\mathbf{v}(x, y)$  vara *hastighetsvektorn* hos ett flöde (t.ex. vattenflöde, gasflöde, blodflöde) i punkten  $(x, y)$ . Detta förutsätter, förstås, att hastighetsvektorn i punkten  $(x, y)$  inte beror på tiden, d.v.s. att flödet är *stationärt*. En partikel som rör sig med flödet kommer då att följa en *integralkurva* till vektorfältet, d.v.s. en kurva vars tangent alltid är vektorn i samma punkt.



## Kraftfält

Å andra sidan kan  $\mathbf{F}(x, y)$  vara kraften i punkten  $(x, y)$ . En partikel kommer då ha accelerationen  $\frac{1}{m}\mathbf{F}(x, y)$  i den punkten. (I detta fall kommer partikeln i allmänhet *inte* att följa en integralkurva.)

Till höger visas vektorfältet  $\mathbf{F}(x, y) = -g\hat{y}$  som kan tolkas som gravitationsfältet i närheten av jordens yta. En boll har kastats från punkten  $(0,6)$  med utgångshastigheten  $(1,0)$ .



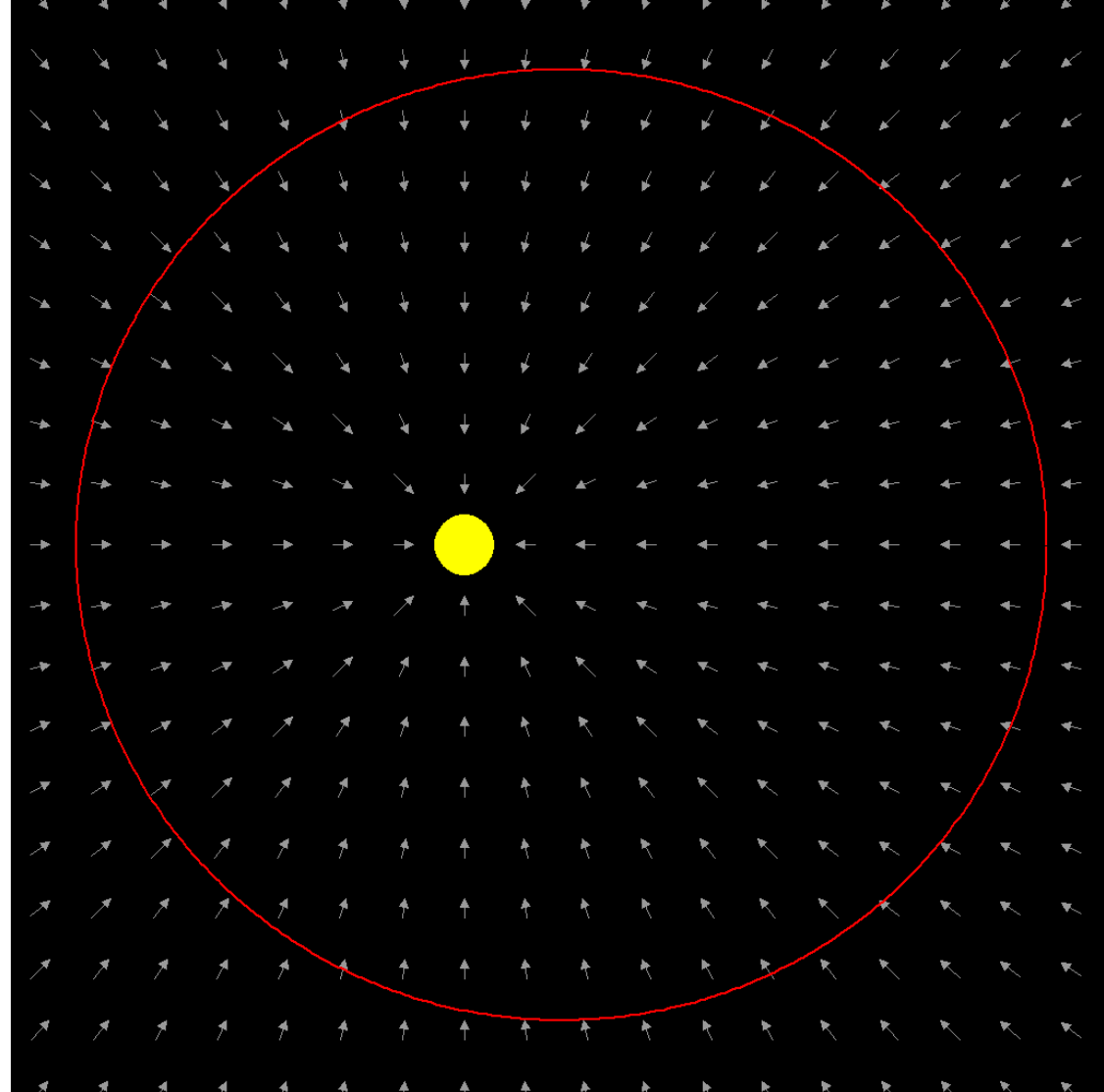


**Bonusexempel:** Betrakta gravitationsfältet i solsystemet:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Här rör sig partiklarna (d.v.s. planeterna) i ellipser med solen i ena brännpunkten.

Observera att illustrationen till höger använder samma längd på alla pilar, oberoende av vektorfältets belopp i den aktuella punkten. (Varför är det nödvändigt att göra så i det här fallet?)



## Operatorer

- Till varje skalärfält  $\phi$  hör ett vektorfält, den så kallade *gradienten*  $\nabla\phi$  definierad av

$$\nabla\phi(x, y, z) = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right).$$

- Till varje vektorfält  $\mathbf{A}$  hör ett skalärfält, den så kallade *divergensen*  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  definierad av

$$(\nabla \cdot \mathbf{A})(x, y, z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

- Till varje vektorfält  $\mathbf{A}$  hör ett annat vektorfält, den så kallade *rotationen*  $\nabla \times \mathbf{A}$  definierad av

$$(\nabla \times \mathbf{A})(x, y, z) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

(Formlerna ovan gäller i  $\mathbb{R}^3$ . Notera att  $\nabla$  och  $\nabla \cdot$  har uppenbara generalisationer till  $\mathbb{R}^n$ .)

$$\begin{cases} \nabla\phi \\ \nabla \cdot \mathbf{A} \\ \nabla \times \mathbf{A} \end{cases} \text{ skrivs också } \begin{cases} \text{grad } \phi \\ \text{div } \mathbf{A} \\ \text{rot } \mathbf{A} \end{cases} \text{ eller, p\u00e5 engelska, } \begin{cases} \text{grad } \phi \\ \text{div } \mathbf{A} \\ \text{curl } \mathbf{A} \end{cases} .$$

Notera att  $\begin{cases} \nabla \\ \nabla \cdot \\ \nabla \times \end{cases}$  \u00e4r en operator som tar in ett  $\begin{cases} \text{skal\u00e4rf\u00e4lt} \\ \text{vektorf\u00e4lt} \\ \text{vektorf\u00e4lt} \end{cases}$  och ger ifr\u00e5n sig ett  $\begin{cases} \text{vektorf\u00e4lt} \\ \text{skal\u00e4rf\u00e4lt} \\ \text{vektorf\u00e4lt} \end{cases}$  .

## Konventioner

Ibland låtsas man att  $\nabla$  är en "vektor" med "komponenter"  $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ .

I sådana fall kan  $\nabla\phi$  rent formellt betraktas som "vektorn"  $\nabla$  gånger skalärfältet  $\phi$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  kan rent formellt betraktas som skalärprodukten mellan "vektorn"  $\nabla$  och vektorfältet  $\mathbf{A}$ , och  $\nabla \times \mathbf{A}$  kan rent formellt betraktas som kryssprodukten mellan "vektorn"  $\nabla$  och vektorfältet  $\mathbf{A}$ . Detta bör dock endast betraktas som minnesregler (om ens det), och inget annat.  $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$  är ju inte en vektor (komponenterna är ju inte tal).

Den "sunda" inställningen är att  $\nabla$ ,  $\nabla \cdot$  och  $\nabla \times$  är operatorer "in their own right" enligt ovan, definierade av sin verkan på fält enligt förföregående sida. (Detta framgår extra tydligt med den alternativa notationen  $\text{grad } \phi$ ,  $\text{div } \mathbf{A}$  och  $\text{rot } \mathbf{A}$ .)

## Geometriska tolkningar

- Den geometriska tolkningen av *gradienten*  $\nabla\phi$  är välkänd sedan flervariabelanalysen.  $\nabla\phi$  är ett vektorfält, och vektorn  $\nabla\phi(x, y, z)$  i punkten  $(x, y, z)$  är vinkelrät mot skalärfältets nivåyta genom just den punkten. Vektorn pekar åt det håll skalärfältet växer snabbast, och vektorns längd är riktningsderivatan i denna riktning.
- Den geometriska tolkningen av *divergensen*  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  framgår av Gauss' sats!  $\nabla \cdot \mathbf{A}(x, y, z)$  är ett mått på den lokala *produktionen* i punkten  $(x, y, z)$ .

Tänk också på flöde av vatten, som är inkompressibelt:  $\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv 0$ .

- Den geometriska tolkningen av *rotationen*  $\nabla \times \mathbf{A}$  framgår av Stokes sats!  $\nabla \times \mathbf{A}(x, y, z)$  är ett mått på den lokala *rotationen* i punkten  $(x, y, z)$ .

Tänk på ett (litet) skovelhjul i ett tvådimensionellt flöde eller en (liten) boll i ett tre-dimensionellt flöde.

Även om geometriska tolkningar är trevliga och i många fall användbara, så är de något oprecisa (åtminstone de två sista ovan); det är alltid de precisa definitionerna av operatorerna som gäller.

## Vektoridentiteter

Det är lätt att visa att

$$\nabla \times (\nabla \phi) \equiv \mathbf{0}$$

för varje skalärfält  $\phi$  ("ett potentialfält är alltid virvelfritt").

Det är också lätt att visa att

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$$

för varje vektorfält  $\mathbf{A}$  (tänk på magnetfält och Maxwells ekvationer).

Slutligen bör alla känna igen en av fysikens allra viktigaste ekvationer, nämligen Laplaces ekvation  $\nabla^2 \phi = 0$  där *Laplaceoperatorn*  $\nabla^2 (= \Delta)$  definieras av

$$\nabla^2 \phi := \nabla \cdot (\nabla \phi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (\text{i rummet}).$$

## Kurvor i planet

En kurva i planet kan ges av en ekvation i planets koordinater. Till exempel är enhetscirkeln

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}.$$

Vi säger att  $x^2 + y^2 = 1$  är *ekvationen* för enhetscirkeln. Ofta säger man lite slarvigt att själva ekvationen  $x^2 + y^2 = 1$  är enhetscirkeln.

En kurva i planet kan också parameteriseras, d.v.s. skrivas som värdemängden av en funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Till exempel är enhetscirkeln

$$C = \mathbf{r}([0, 2\pi[)$$

där

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [0, 2\pi[.$$

## Ytor i rummet

En yta i rummet kan ges av en ekvation i rummets koordinater. Till exempel är enhetssfären

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Vi säger att  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  är *ekvationen* för enhetssfären. Ofta säger man lite slarvigt att själva ekvationen  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  *är* enhetssfären.

En yta i rummet kan också parameteriseras, d.v.s. skrivas som värdemängden av en funktion  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Till exempel är enhetssfären

$$S = \mathbf{r}([0, \pi] \times [0, 2\pi[)$$

där

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \forall (\theta, \varphi) \in \underbrace{[0, \pi] \times [0, 2\pi[}_{\text{parameterområdet}},$$

i det här fallet en  
*rektangel* i  
parameterplanet  
( $\theta\varphi$ -planet).



## Kurvor i rummet

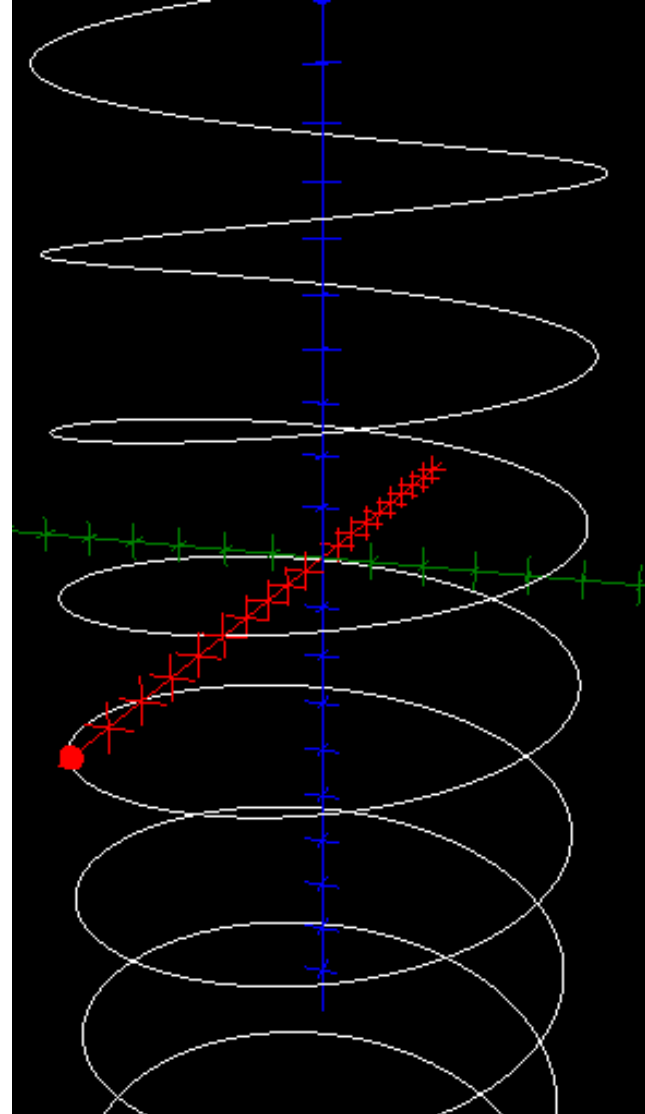
En kurva i rummet kan naturligtvis inte skrivas som en ekvation i rummets koordinater (för en sådan ekvation ger ju en *yta* eftersom  $3 - 1 = 2$ ). Däremot kan en kurva förstås anges med hjälp av *två* sådana ekvationer; kurvan är då tydligen snittet mellan två ytor (en *skärningskurva*).

En kurva i rummet kan också parameteriseras, d.v.s. skrivas som värdemängden till en funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Till exempel är helixen

$$H = \mathbf{r}(\mathbb{R})$$

där

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$



## Mer om ytor på parameterform

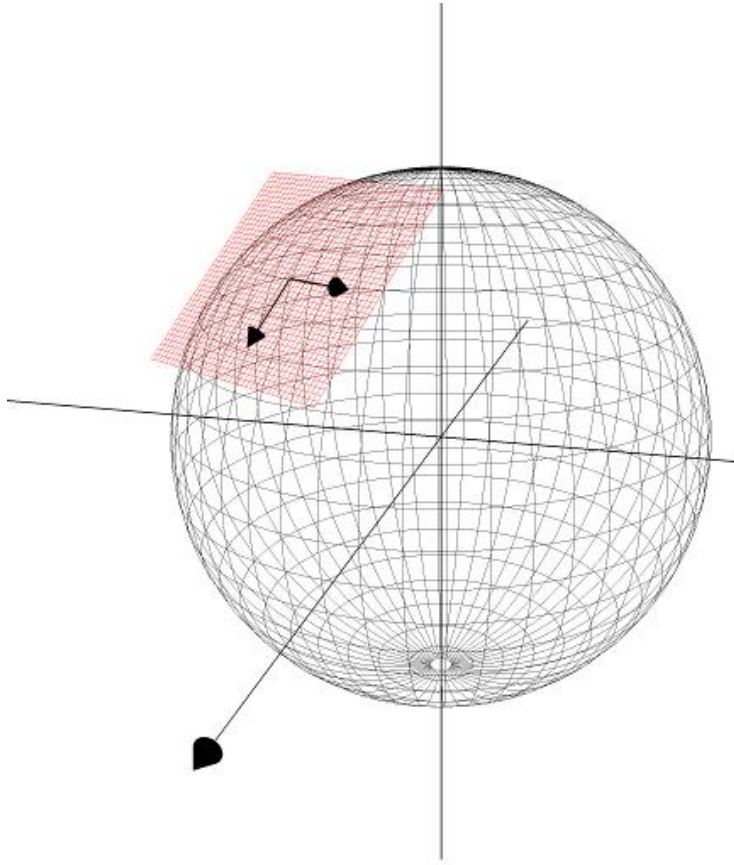
Låt  $\Sigma = \mathbf{r}(D) \subset \mathbb{R}^3$  vara en yta given på parameterform, d.v.s. den är bilden av parameterområdet  $D \subset \mathbb{R}^2$  under parametriseringsfunktionen  $\mathbf{r}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Låt koordinaterna i parameterplanet vara  $(u, v)$ .

Det är klart att  $\mathbf{r}'_u(u, v)$  och  $\mathbf{r}'_v(u, v)$  är *parameterkurvornas hastighetsvektorer* och  $\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)$  är en *normal* till ytan, allt i punkten  $\mathbf{r}(u, v) \in \Sigma$  med koordinaterna  $(u, v) \in D$ . Tangentplanet till ytan i den här punkten kan alltså parameteriseras

$$(x, y, z) = \mathbf{r}(u, v) + s \mathbf{r}'_u(u, v) + t \mathbf{r}'_v(u, v), \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

*Areaelementet* är  $dA = |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| du dv$ . Det är areaförstoringen mellan parameterområdet och ytan. Mer precist, om  $U \subset D$  är en delmängd till parameterområdet, så har motsvarande del av ytan  $\Sigma$  arean  $\iint_U dA = \iint_U |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| du dv$ . Hela ytan  $\Sigma$  har följaktligen arean

$$A(\Sigma) = \iint_D dA = \iint_D |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| du dv.$$



**Exempel.** Sfären med radie  $r > 0$  kring origo är  $\Sigma = \mathbf{r}(D)$  där

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

och parameterområdet är rektangeln

$$D = [0, \pi] \times [0, 2\pi[ \subset \mathbb{R}^2.$$

Parameterkurvornas hastighetsvektorer är

$$\mathbf{r}'_{\theta}(\theta, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} \text{ och}$$

$$\mathbf{r}'_{\varphi}(\theta, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Enhetsnormalen är

$$\hat{\mathbf{N}}(\theta, \varphi) = \frac{\mathbf{r}'_{\theta}(\theta, \varphi) \times \mathbf{r}'_{\varphi}(\theta, \varphi)}{|\mathbf{r}'_{\theta}(\theta, \varphi) \times \mathbf{r}'_{\varphi}(\theta, \varphi)|} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Areaelementet är

$$dA = |\mathbf{r}'_{\theta}(\theta, \varphi) \times \mathbf{r}'_{\varphi}(\theta, \varphi)| d\theta d\varphi = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

och ytans area är därför

$$A(\Sigma) = \iint_D dA = \iint_D r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = r^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = r^2 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi r^2.$$

## Mer om kurvor och ytor

Mer om kurvor och ytor finns på

[www.trecs.se](http://www.trecs.se)

Se i synnerhet artikeln "Basic Theory".

## **Del 2: Vektoranalys**

## Kurvintegraler i planet

**Fysikalisk motivering:** Låt  $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara ett kraftfält i planet, och låt  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  vara en kurva i planet. Hur stort arbete utför kraftfältet  $\mathbf{F}$  på en partikel när den förflyttar sig längs  $\gamma$ ?

**Lösning:** Antag att  $\gamma = \mathbf{r}(I)$  där  $\mathbf{r}$  är parametriseringsfunktionen och  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  är ett intervall. Dela in kurvan i en  $N$  bitar ( $N$  stort tal, så att varje bit blir väldigt liten). Låt  $t_i \in I$  vara tidpunkten då partikeln är vid bit nummer  $i$ ; den befinner sig då nära punkten  $\mathbf{r}(t_i)$  och känner av kraften  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t_i))$ . Samtidigt gör partikeln nästan exakt den rätlinjiga förflyttningen

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i) \approx \mathbf{r}'(t_i)\Delta t.$$

Arbetet under denna förflyttning är sålunda nästan precis

$$\Delta W_i = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_i)) \cdot \mathbf{r}'(t_i)\Delta t.$$

Det totala arbetet blir då nästan precis

$$\sum_{i=1}^N \Delta W_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_i)) \cdot \mathbf{r}'(t_i)\Delta t \quad \text{som} \rightarrow \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt$$

när indelningen blir finare och finare. Det är alltså rimligt att antaga att det sökta arbetet är precis gränsvärdet av Riemannsumman, d.v.s. integralen

$$W = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt.$$

**Definition.** Låt  $\mathbf{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara ett vektorfält och  $\gamma = \mathbf{r}([a, b])$  en kurva. Då är *kurvintegralen* av  $\mathbf{A}$  längs  $\gamma$

$$\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} := \int_a^b \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Om  $\mathbf{A}$  är ett kraftfält kan kurvintegralens värde följaktligen tolkas som det arbete kraftfältet utför på en partikel när den rör sig längs  $\gamma$ .

**Observation:** Vad händer om  $\mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \perp \mathbf{r}'(t)$  för alla  $t \in [a, b]$ ?



**Exempel 1.** Låt  $\mathbf{A}(x, y) = (x - y, x)$  och låt  $\gamma$  vara halvcirkeln från  $(1, 0)$  till  $(-1, 0)$  i övre halvplanet  $y \geq 0$ . Beräkna  $\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ .

*Lösning:*

Kurvan är  $\gamma = \mathbf{r}([0, \pi])$  där

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [0, \pi].$$

Sålunda är

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^{\pi} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_0^{\pi} (-\sin t \cos t + \sin^2 t + \cos^2 t) dt = \\ &= \int_0^{\pi} \left( -\frac{1}{2} \sin 2t + \sin^2 t + \cos^2 t \right) dt = \int_0^{\pi} dt = \pi. \end{aligned}$$

**Exempel 2.** Låt  $\mathbf{A}(x, y) = (x, y^3)$  och låt  $\gamma$  vara den räta linjen från  $(3,0)$  till  $(1,1)$ . Beräkna  $\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ .

*Lösning:*

Kurvan är  $\gamma = \mathbf{r}([0,1])$  där

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 - 2t \\ t \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [0,1].$$

Sålunda är

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 - 2t \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (-6 + 4t + t^3) dt = \\ &= -\frac{15}{4}. \end{aligned}$$

## Greens sats

Låt  $\gamma$  vara en *sluten och enkel* kurva i planet, nämligen randen till området  $D$ , d.v.s.  $\gamma = \partial D$ . Om  $(x, y) \mapsto \mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  är ett vektorfält i planet, så är

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

där kurvintegralen är tagen i *positiv* riktning, d.v.s. området  $D$  är alltid till *vänster* om randen när man går i kurvans riktning.

( $\mathbf{F}$  är  $C^1$  i en omgivning till  $D$ ,  $\gamma$  är styckvis  $C^1$ .)

**Exempel 1.** Låt  $\gamma$  vara enhetscirkeln och sätt  $\mathbf{F}(x, y) = (x^2y, y^2x)$ . Eftersom  $\gamma = \mathbf{r}([0, 2\pi[)$  där  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$  ger en naiv beräkning att kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos^2 t \sin t \\ \sin^2 t \cos t \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (-\cos^2 t \sin^2 t + \sin^2 t \cos^2 t) dt = 0$$

och med Greens sats får vi, där  $D$  är den fyllda enhetsdisken,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (x^2 - y^2) dx dy = \begin{bmatrix} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ J = r \end{bmatrix} = \\ &= \iint_E (r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi) r dx dy = \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) d\varphi = \\ &= \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

[Att arbetet blir noll kan man faktiskt se direkt eftersom  $\mathbf{F}(x, y) = xy(x, y) \parallel (x, y)$  överallt är vinkelrät mot enhetscirkeln.]

**Exempel 2.** Låt  $\gamma$  vara enhetscirkeln och sätt  $\mathbf{F}(x, y) = (\sin x^2 + y, \sin e^y)$ . Eftersom  $\gamma = \mathbf{r}([0, 2\pi[)$  där

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

kan vi försöka att beräkna kurvintegralen på vanligt sätt:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \sin(\cos^2 t) + \sin t \\ \sin(e^{\sin t}) \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin(\cos^2 t) \sin t - \sin^2 t + \sin(e^{\sin t}) \cos t) dt = ??? \end{aligned}$$

men med Greens sats får vi, där  $D$  är den fyllda enhetsdisken,

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_D dx dy = -A(D) = -\pi.$$

## Greens sats och areor i planet

Greens sats kan användas för att beräkna plana areor. Låt  $\gamma = \partial D$  vara en enkel sluten kurva, randen till det plana området  $D$ . Om vi betraktar något av vektorfälten

$$\mathbf{F}(x, y) = (0, x) \quad \text{eller} \quad (-y, 0) \quad \text{eller} \quad \frac{1}{2}(-y, x)$$

så ger Greens sats att

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D dx dy = A(D) = \text{Arean av } D.$$

I ord: *Arean av ett område är lika med kurvintegralen av något av vektorfälten  $\mathbf{F}$  ovan längs områdets rand (taget i positiv riktning).*

För ett förträffligt pedagogiskt exempel, se [exemplet där vi bestämmer arean innanför den så kallade "astroiden"](#).

## Ytintegraler

Antag att du har en funktion  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  definierad på någon yta  $\Sigma = \mathbf{r}(D)$ . Tänk dig att du delar in ytan  $N$  bitar ( $N$  mycket stort, så varje bit är mycket liten) av arean  $\Delta A$ , och i varje bit beräknar produkten  $f\Delta A$ . Summera sedan. När indelningen blir finare går Riemannsumman mot en integral, den så kallade *ytintegralen* av  $f$  över  $\Sigma$ :

$$\sum f\Delta A \rightarrow \iint_{\Sigma} f dA = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv.$$

(I praktiken anges ofta  $f$  som en funktion  $D \rightarrow \mathbb{R}$ .) Notera att om  $f \equiv 1$  erhålles ytans area.

**Exempel.** Betrakta sfären  $S = \mathbf{r}(D)$  där

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \forall (\theta, \varphi) \in D$$

och  $D := [0, \pi[ \times [0, 2\pi]$ . Om ytladdningstätheten [i enheten  $\text{C}/\text{m}^2$ ] på  $S$  är  $f(\theta, \varphi) = \theta + \varphi$  i punkten med koordinater  $(\theta, \varphi) \in D$ , vad är då den totala laddningen på sfären?

*Lösning:* Laddningen är ytintegralen av  $f$  över  $S$ , d.v.s.

$$Q = \iint_S f dA = \iint_D (\theta + \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \dots = 6\pi^2.$$



## Flödesintegraler

Antag att  $\mathbf{J}$  är ett vektorfält i rummet som anger *flödestätheten* för något (t.ex. vätske-) flöde, d.v.s.  $\mathbf{J}$  har enheten  $\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ . Om  $\Sigma = \mathbf{r}(D)$  är en yta i rummet med enhetsnormal  $\hat{\mathbf{n}}$  i varje punkt så är *flödet av  $\mathbf{J}$  genom  $\Sigma$*  värdet av *flödesintegralen*

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} &:= \iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA := \iint_D \mathbf{J}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|} \cdot |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| dudv = \\ &= \iint_D \mathbf{J}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) dudv.\end{aligned}$$

Notera att en flödesintegral är en speciell sorts ytintegral, nämligen en där funktionen vi integrerar över ytan är  $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ , flödets projektion på normalriktningen.

**Exempel.** Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och paraboloiden  $S = \mathbf{r}([0,1]^2)$  där

$$\mathbf{r}(u, v) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}.$$

Flödet av  $\mathbf{F}$  genom  $S$  är

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA &= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) dudv = \iint_D \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} dudv = \\ &= \iint_D (-2uv + 1) dudv = \int_0^1 \int_0^1 (-2uv + 1) du dv = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Exempel.** Ibland behöver man inte ens parameterisera en yta för att beräkna en flödesintegral. I stället kan det räcka med att "hoppa in" direkt i definitionen.

Låt t.ex.

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0, 1], y \in [0, 1], z = 3\}$$

vara en kvadrat i planet  $z = 3$ , och betrakta vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}.$$

Eftersom  $S$  naturligtvis har enhetsnormalen  $(0, 0, 1)$  ser vi direkt att

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \iint_S \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dA = 3 \iint_S dA = 3A(S) = 3$$

där  $A(S) = 1 \cdot 1 = 1$  är arean av kvadraten  $S$ .

## Gauss' sats

Låt  $\mathbf{A}$  vara ett vektorfält i rummet och låt  $S = \partial K$  vara en sluten yta, nämligen begränsningsytan till området  $K$ . Då är flödet *ut ur*  $K$

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \iiint_K (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV.$$

( $\mathbf{A}$  är  $C^1$  i en omgivning av  $K$ ,  $S$  styckvis  $C^1$ .)

**Exempel.** Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \\ z + 1 \end{pmatrix}$$

och enhetsfären  $S = \mathbf{r}(D)$ , som är randen till enhetsklotet  $K$ , där

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \forall (\theta, \varphi) \in D$$

och  $D := [0, \pi[ \times [0, 2\pi]$ . Flödet ut genom  $S$  kan beräknas på naivt sätt:

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \iint_D \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \\ \cos \theta + 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \sin \theta d\theta d\varphi = \dots = 4\pi.$$

Med Gauss' sats blir räkningarna enklare, eftersom  $(\nabla \cdot \mathbf{A})(x, y, z) = 3$ . Vi får

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \iiint_K (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = 3 \iiint_K dV = 3V(D) = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} = 4\pi.$$

## Kurvintegraler i rummet

Kurvintegraler i rummet fungerar *exakt* som kurvintegraler i planet.

**Exempel.** Betrakta helixen  $\gamma = \mathbf{r}([a, b])$  där

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

samt vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Arbetet som kraftfältet  $\mathbf{F}$  utför på partikeln när den rör sig från  $\mathbf{r}(a)$  till  $\mathbf{r}(b)$  längs  $\gamma$  är

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_a^b (\sin^2 t + \cos^2 t + 1) dt = \int_a^b 2 dt = 2(b - a). \end{aligned}$$

## Stokes sats

Låt  $\mathbf{A}$  vara ett vektorfält i rummet, och  $\gamma$  en sluten och enkel kurva. Låt också  $W = \oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  vara kurvintegralen av  $\mathbf{A}$  längs  $\gamma$ .

Betrakta *någon* yta  $S$  som har  $\gamma$  som randkurva ( $\gamma = \partial S$ ) och låt  $\phi = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$  vara flödet av  $\nabla \times \mathbf{A}$  genom  $S$ . Då är

$$W = \pm \phi,$$

där plustecknet väljs omm  $\mathbf{n} \times \mathbf{t}$  pekar *in mot ytan*, där  $\mathbf{n}$  är ytans normal och  $\mathbf{t}$  är kurvans tangent, d.v.s. omm vi har ytan till *vänster* om oss när vi går i kurvans riktning med huvudet i ytans normalriktning.

( $\mathbf{A}$  är  $C^1$  i en omgivning av  $S$ ,  $S$  styckvis  $C^1$ .)

**Exempel 1.** Betrakta vektorfältet  $\mathbf{A}(x, y, z) = (x^2, xz^2, xz)$  och låt  $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$  vara en cirkel i planet  $z = 1$  (positivt orienterad sett ovanifrån). Då är  $\gamma = \mathbf{r}([0, 2\pi[)$  där  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ , så vi kan beräkna arbetet på vanligt sätt:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \cos^2 t \sin t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi. \end{aligned}$$

Men vi kan också använda Stokes sats. Rotationen av  $\mathbf{A}$  är

$$(\nabla \times \mathbf{A})(x, y, z) = (-2xz, -z, z^2).$$

Vi måste nu välja någon yta som har  $\gamma$  som randkurva. Det uppenbara valet är den del av planet  $z = 1$  som ligger innanför  $\gamma$ , d.v.s. vi väljer ytan  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$ . Vi behöver inte ens parameterisera ytan för att bestämma flödet genom den:

$$\phi = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \iint_S \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2xz \\ -z \\ z^2 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dA = \iint_S z^2 dA = \iint_S dA = A(S) = \pi.$$

När vi går runt  $\gamma$  med huvudet i riktningen  $\hat{\mathbf{z}}$  har vi ytan till vänster om oss, så  $W = \phi$ .



**Exempel 2.** Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} y \cos x e^{\sin x} \\ e^{\sin x} + ze^y \\ e^y \end{pmatrix}$$

och kurvan  $\gamma = \mathbf{r}([0, 2\pi[)$  där

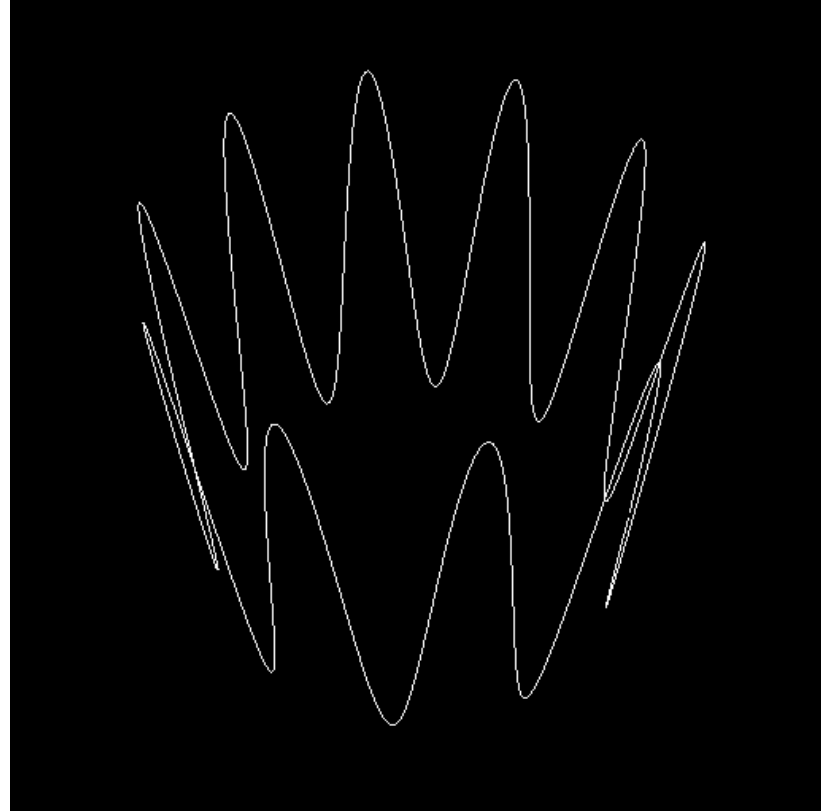
$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sin 10t \end{pmatrix}.$$

Vad är  $\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ ? Det är klart att det existerar en yta med  $\gamma$  som rand; låt  $S$  vara någon sådan yta. Eftersom

$$(\nabla \times \mathbf{A})(x, y, z) = \mathbf{0}$$

(visa det!) ger Stokes sats att

$$\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \pm \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \pm \iint_S 0 dA = \pm 0 = 0.$$



## Potentialfält

Betrakta ett vektorfält  $\mathbf{A}$  i ett område  $D$  i rummet eller planet. Om det existerar ett skalärfält  $\phi$  [av klassen  $C^1$ ] sådant att  $\mathbf{A} = \nabla\phi$  i hela  $D$  säger vi att  $\mathbf{A}$  är ett *potentialfält* i  $D$ , och att  $\phi$  är *potentialen* till  $\mathbf{A}$ .

Det är mycket enkelt att visa att om  $\mathbf{A} = (P, Q)$  är ett potentialfält i *planet* [med potential av klassen  $C^2$ ] så är

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0.$$

Om  $\mathbf{A}$  är ett potentialfält i *rummet*, så är det lika lätt att visa att

$$\nabla \times \mathbf{A} \equiv 0.$$

Vi kan alltså direkt dra tämligen långtgående slutsatser om hur (tillräckligt kontinuerliga) potentialfält beter sig vad kurvintegraler beträffar med hjälp av Greens och Stokes satser: kurvintegralen längs en sluten och enkel kurva är noll. *Det är ekvivalent med att kurvintegralen mellan två punkter är oberoende av den precisa vägen mellan punkterna.* (Visa den ekvivalensen!)

Om  $\mathbf{F}$  är ett potentialfält med potentialen  $\phi$  så är

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$$

för varje kurva  $\gamma$  som går från  $\mathbf{a}$  till  $\mathbf{b}$ .

Det medför också att kurvintegraler av  $\mathbf{F}$  är oberoende av vägen mellan start- och slutpunkt och att kurvintegralen för varje sluten kurva är noll.

I en sammanhängande öppen mängd i planet/rummet gäller

$$\mathbf{F} = \nabla\phi \text{ är ett potentialfält}$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \text{ är oberoende av vägen}$$

$\Leftrightarrow$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \text{ för varje sluten kurva } \gamma$$

$\Downarrow$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0 \quad (\text{i planet}), \quad \nabla \times \mathbf{F} \equiv \mathbf{0} \quad (\text{i rummet})$$

Om området är **enkelt** sammanhängande gäller även den omvända implikationen nederst.

**Exempel.** Betrakta gravitationsfältet

$$\mathbf{F}(x, y) = -g\hat{y}$$

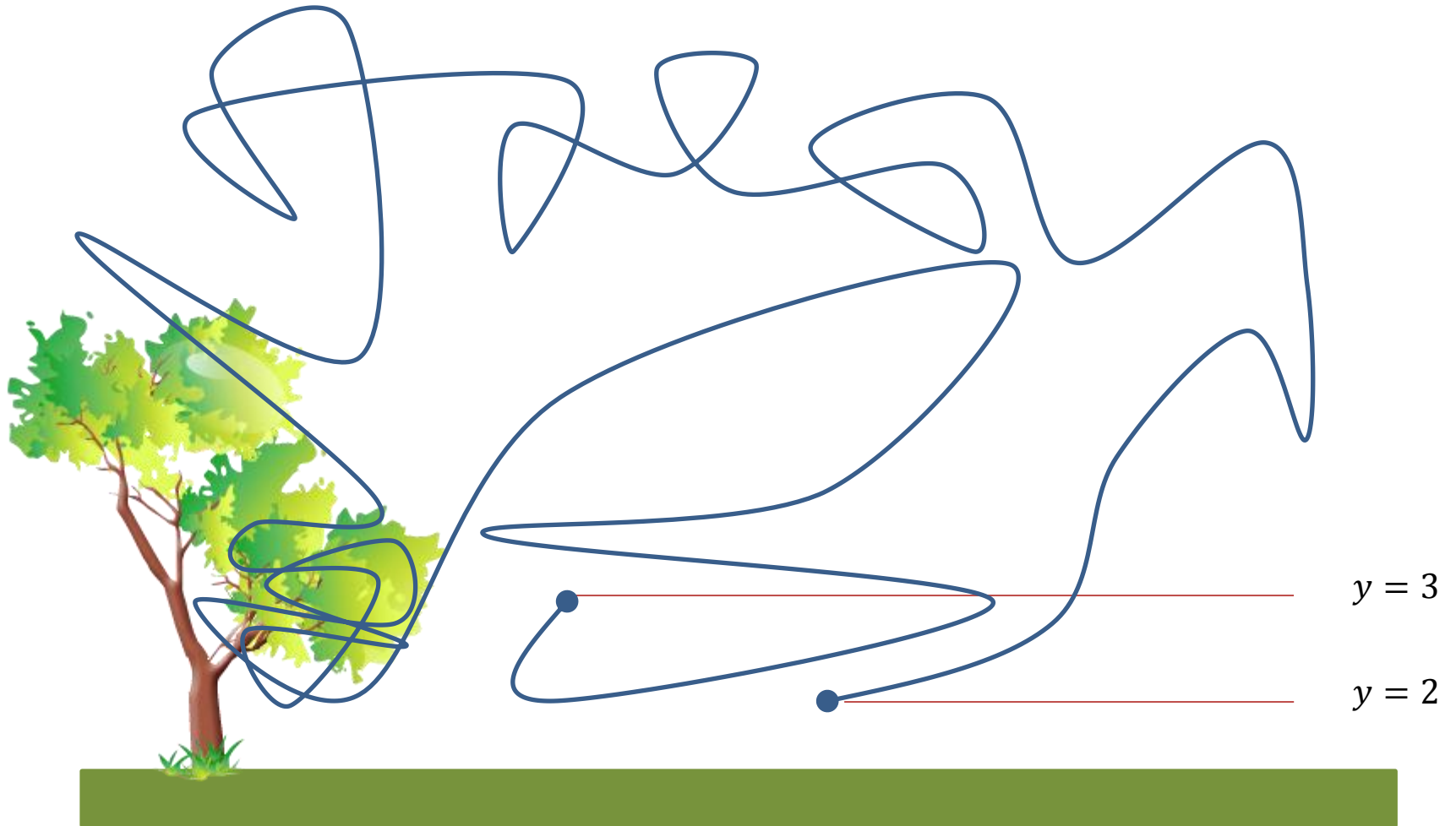
nära jordens yta. En potential är

$$\phi(x, y) = -gy$$

eftersom  $\mathbf{F}(x, y) = \nabla\phi(x, y)$ . Notera att potentialen (som vi vill tolka som den potentiella energin för en kropp med massan 1) *minskar* med ökad höjd över referensnivån  $y = 0$ . Det känns konstigt!

Inom fysiken definierar man potentialen med  $\mathbf{F} = -\nabla\phi$  i stället!

**Exempel.** Vilket arbete utför gravitationsfältet på en partikel med massan 1 kg när den rör sig längs kurvan nedan?



**Exempel.** Gravitationsfältet från en punktmassa  $M$  i origo (t.ex. solen) är

$$\mathbf{G}(x, y, z) = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

och har potentialen

$$\phi(x, y, z) = \frac{GM}{r} = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (\text{matematik})$$

eller

$$\phi(x, y, z) = -\frac{GM}{r} = -\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (\text{fysik}).$$

Det elektrostatiska fältet från en punktladdning  $Q$  i origo är

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

och är alltså identiskt till formen.

**Exempel.** Det magnetiska fältet från en oändligt lång ledare längs  $z$ -axeln i vilken en stationär ström flyter är utanför  $z$ -axeln

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{k}{\rho} \hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{k}{x^2 + y^2} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Det är lätt att visa att

$$(\nabla \times \mathbf{B})(x, y, z) \equiv \mathbf{0}$$

(gör det!) men trots det är  $\mathbf{B}$  inte ett potentialfält i  $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-axeln}\}$ . Till exempel, om

$$\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

som är  $\gamma = \mathbf{r}([0, 2\pi[)$  där

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

så är

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{B}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} k \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = k \int_0^{2\pi} dt = \\ &= 2\pi k \neq 0. \end{aligned}$$



## Krokinjiga koordinater

Låt  $(u_1, u_2, u_3)$  vara koordinaterna i ett ortogonalt krokinjigt koordinatsystem med skal-faktorer  $h_1, h_2, h_3$ . Då är gradienten

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial u_1} \hat{\mathbf{u}}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial u_2} \hat{\mathbf{u}}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial u_3} \hat{\mathbf{u}}_3$$

för varje skalärfält  $\phi$ , och för varje vektorfält  $\mathbf{A} = A_1 \hat{\mathbf{u}}_1 + A_2 \hat{\mathbf{u}}_2 + A_3 \hat{\mathbf{u}}_3$  är divergensen

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 A_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$$

och rotationen

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{\mathbf{u}}_1 & h_2 \hat{\mathbf{u}}_2 & h_3 \hat{\mathbf{u}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}.$$

Notera att alla punkter anges i de krokinjiga koordinaterna, och alla vektorkomponenter är givna relativt den bas i varje tangentrum som ges av det krokinjiga koordinatsystemet.

**Exempel.** I planet definieras de polära koordinaterna  $(\rho, \varphi)$  av

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi \\y &= \rho \sin \varphi.\end{aligned}$$

Planet kan alltså parameteriseras

$$\mathbf{r}(\rho, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Parameterkurvornas hastighetsvektorer är

$$\mathbf{r}'_{\rho}(\rho, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}'_{\varphi}(\rho, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\rho \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi \end{pmatrix}$$

med längder  $h_{\rho} = 1$  och  $h_{\varphi} = \rho$ . I tangentrummet till punkten med polära koordinater  $(\rho, \varphi)$  har vi sålunda basvektorerna

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}(\rho, \varphi) = \frac{1}{h_{\rho}} \mathbf{r}'_{\rho}(\rho, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\rho, \varphi) = \frac{1}{h_{\varphi}} \mathbf{r}'_{\varphi}(\rho, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Notera att  $\hat{\boldsymbol{\rho}}(\rho, \varphi) \perp \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\rho, \varphi)$  i varje punkt. Notera också att den geometriska tolkningen av en skalfaktor är "så långt man går i rummet när man ändrar motsvarande koordinat en enhet" (lokalt i just den punkten).