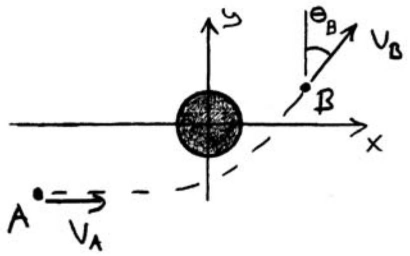
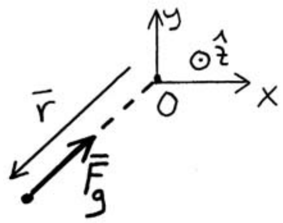
103)



<u>Sökt:</u> $v_{\mathcal{B}}$

Frilägg farkosten vid godtyckligt läge:



$$\overline{M}_{\mathcal{O}} \overset{(7.2)}{=} \overline{r} \times \overline{F}_g = \overline{0}$$

Impulsmomentlagen, (7.3), $\displaystyle\int_{t_{\mathcal{A}}}^{t_{\mathcal{B}}} \overline{M}_{\mathcal{O}}\, dt = (\overline{h}_{\mathcal{O}})_{\mathcal{B}} - (\overline{h}_{\mathcal{O}})_{\mathcal{A}},\ \mathcal{O}$ fix $\quad\Rightarrow$

$$(\overline{h}_{\mathcal{O}})_{\mathcal{A}} = (\overline{h}_{\mathcal{O}})_{\mathcal{B}} \qquad (1)$$

$$(\overline{h}_{\mathcal{O}})_{\mathcal{A}} \overset{(7.2)}{=} \overline{r}_{\mathcal{A}} \times m\overline{v}_{\mathcal{A}} = (x_{\mathcal{A}}\,\hat{x} + y_{\mathcal{A}}\,\hat{y}) \times mv_{\mathcal{A}}\,\hat{x} = -my_{\mathcal{A}}v_{\mathcal{A}}\,\hat{z}$$

$$(\overline{h}_{\mathcal{O}})_{\mathcal{B}} = \overline{r}_{\mathcal{B}} \times m\overline{v}_{\mathcal{B}} = (x_{\mathcal{B}}\,\hat{x} + y_{\mathcal{B}}\,\hat{y}) \times mv_{\mathcal{B}}\,(\sin\theta_{\mathcal{B}}\,\hat{x} + \cos\theta_{\mathcal{B}}\,\hat{y}) =$$

$$= mv_{\mathcal{B}}\,(x_{\mathcal{B}}\cos\theta_{\mathcal{B}}\,\hat{z} - y_{\mathcal{B}}\sin\theta_{\mathcal{B}}\,\hat{z})$$

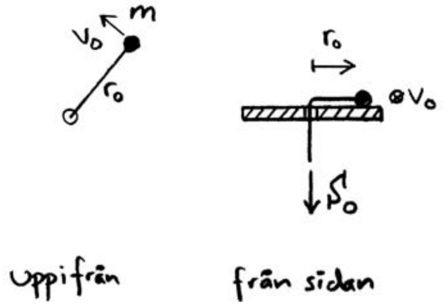
Insättning i (1) $\Rightarrow$

$$-y_{\mathcal{A}} v_{\mathcal{A}} \;=\; v_{\mathcal{B}} \left(x_{\mathcal{B}} \cos\theta_{\mathcal{B}} \;-\; y_{\mathcal{B}} \sin\theta_{\mathcal{B}} \right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{v_{\mathcal{B}} \;=\; -\frac{y_{\mathcal{A}} v_{\mathcal{A}}}{x_{\mathcal{B}} \cos\theta_{\mathcal{B}} \;-\; y_{\mathcal{B}} \sin\theta_{\mathcal{B}}}}}$$

Dimensionen ok!

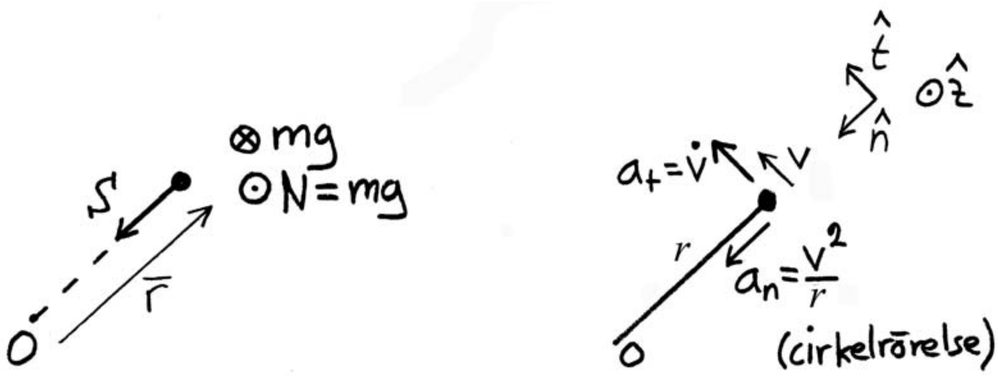
102)



<u>Givet:</u> r_0: v_0 och S_0

<u>Sökt:</u> v och S vid radien r.

Frilägg masspunkten vid godtycklig konstant radie r:



Eftersom masspunkten utför cirkelrörelse är det lämpligt att teckna accelerationen i den naturliga basen. Eftersom vi söker farten v och inte vinkelhastigheten $\dot{\theta}$, använder vi det allmänna uttrycket (1.14) i stället för (1.16).

$$\overline{M}_{\mathcal{O}} = \overline{r} \times \overline{S} = \overline{0}$$

N:s och mg:s bidrag till momentet $\overline{M}_{\mathcal{O}}$ tar ut varandra eftersom N och mg tar ut varandra. Snörkraftens bidrag till momentet blir också noll eftersom snörkraften pekar rakt in mot $\mathcal{O}$.

Impulsmomentlagen, (7.3), $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \overline{M}_{\mathcal{O}}\, dt = (\overline{h}_{\mathcal{O}})_2 - (\overline{h}_{\mathcal{O}})_1,\ \mathcal{O}$ fix $\quad\Rightarrow$

Vi tecknar impulsmomentlagen mellan tidpunkten t_1 då radien är r_0, och tidpunkten t_2 då radien är r.

$$\overline{h}_{\mathcal{O}}(r) = \overline{h}_{\mathcal{O}}(r_0) \qquad (1)$$

$$\overline{h}_{\mathcal{O}}(r) \overset{(7.2)}{=} \overline{r} \times m\overline{v} = (-r\,\hat{n}) \times m(v\,\hat{t}) = mvr\,\hat{z}$$

$$\overline{h}_{\mathcal{O}}(r_0) \;=\; mv_0r_0\,\hat{z}$$

Eftersom uttrycket för $\overline{h}_{\mathcal{O}}(r)$ gäller för en godtycklig radie, är det bara att byta ut r mot r_0 och v mot v_0 för att få $\overline{h}_{\mathcal{O}}(r_0)$.

Insättning i (1) $\Rightarrow$

$$rv \;=\; r_0v_0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{v \;=\; \frac{r_0}{r}v_0}} \qquad (2)$$

Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

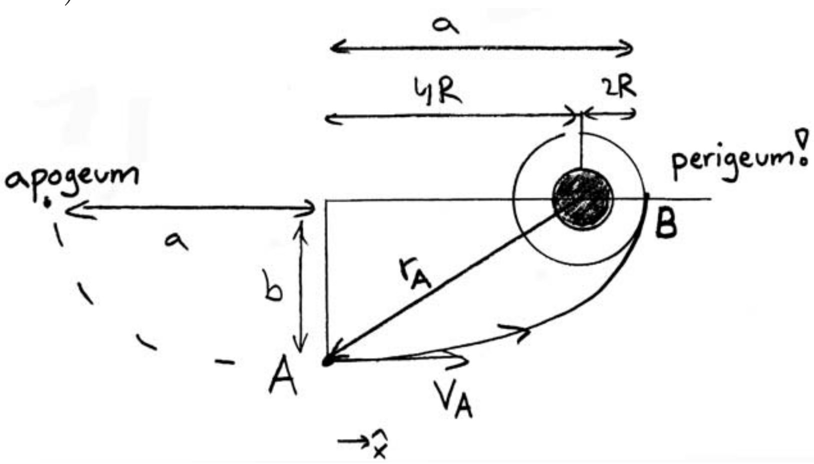
$$\hat{n}: \quad S \;=\; ma_n \;=\; \frac{mv^2}{r} \overset{(2)}{=} \frac{mr_0^2v_0^2}{r^3}$$

På samma sätt $S_0 \;=\; \dfrac{mv_0^2}{r_0}$

$$\therefore \quad \underline{\underline{S \;=\; S_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^3}}$$

Dimensionen ok!

104)



Sökt: $v_{\mathcal{A}}$ så $v_{\mathcal{B}} \uparrow$

$$v_{\mathcal{A}}^2 \overset{(8.39)}{=} 2g_0R^2\left(\frac{1}{r_{\mathcal{A}}} - \frac{1}{2a}\right) \qquad (1)$$

$$\text{Figuren} \Rightarrow \quad r_{\mathcal{A}} = \sqrt{b^2 + (4R)^2} \qquad (2)$$

$$b \overset{(8.30)}{=} a\sqrt{1-e^2} \qquad (3)$$

Figuren $\Rightarrow r_{\min}$ vid $\mathcal{B}$, d.v.s. $\mathcal{B}$ är perigeum.

Se sid. 172.

$$r_{\min} \overset{(8.31)}{=} a(1-e) = 2R$$

Figuren $\Rightarrow \quad a = 6R$ (ty $v_{\mathcal{A}} \rightarrow$ och $v_{\mathcal{B}} \uparrow$)

$$\therefore \quad 2R = 6R(1-e) \quad \Leftrightarrow \quad e = \frac{2}{3}$$

$e < 1$ ok ty ellipsbana.

Insättning i (3) $\Rightarrow \quad b = 6R\sqrt{1 - \dfrac{4}{9}} = 2\sqrt{5}\,R$

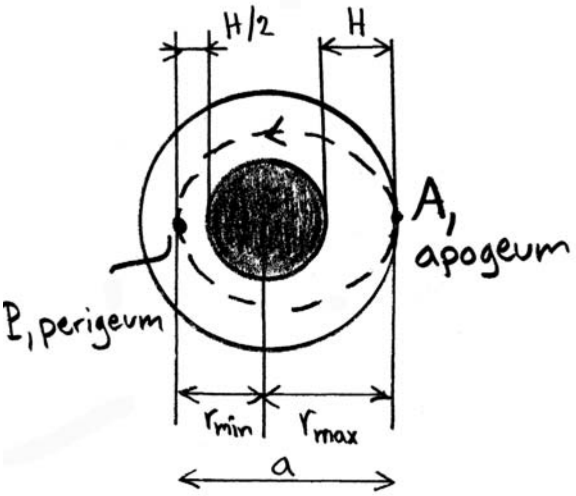
Insättning i (2) $\Rightarrow \quad r_{\mathcal{A}} = 6R$

Insättning i (1) $\Rightarrow v_{\mathcal{A}}^2 = \dfrac{g_0 R}{6} \quad \Rightarrow$

$$\underline{\underline{v_{\mathcal{A}} = \sqrt{\frac{g_0 R}{6}}}}$$

Dimensionen ok!

108)



Givet: $m = 1000$ kg

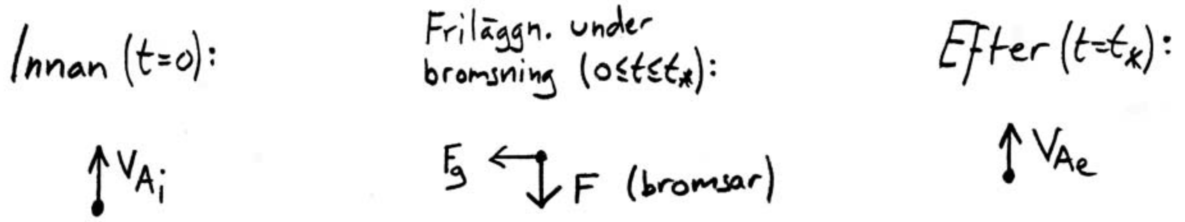
$H = 6000$ km

$F = 3000$ N

Sökt: Brinntid t_*

$v_{\mathcal{A}_i}$: fart vid $\mathcal{A}$ precis innan bromsningen.

$v_{\mathcal{A}_e}$: fart vid $\mathcal{A}$ precis efter bromsningen.



Enligt uppgiften är t_* så liten att $\overline{v}_{\mathcal{A}_e} \parallel \overline{v}_{\mathcal{A}_i}$.

Impulslagen, (4.1), $\displaystyle\int_0^{t_*} \overline{F}\,dt = \overline{p}(t = t_*) - \overline{p}(t = 0), \qquad \overline{p} = m\overline{v}$:

$$\uparrow: \quad -Ft_* = mv_{\mathcal{A}_e} - mv_{\mathcal{A}_i} \qquad (1)$$

$$v_{\mathcal{A}_i}^2 \overset{(8.39)}{=} 2g_0R^2\left(\frac{1}{r_{\mathcal{A}}} - \frac{1}{2a}\right) = \Big/ \begin{array}{c} r = R + H \\ 2a = 2(R + H) \end{array} \Big/ =$$

Cirkelbana radie $R + H$.

$$= g_0R^2\frac{1}{R + H}$$

$$v_{\mathcal{A}_e}^2 \;=\; \Bigg/ \begin{array}{c} r = R + H \\ 2a = r_{\min} + r_{\max} = 2R + H + \dfrac{H}{2} \end{array} \Bigg/ \;=$$

$$= \; 2g_0R^2\left(\frac{1}{R+H} \;-\; \frac{1}{2R+\dfrac{3H}{2}}\right)$$

Insättning i (1) $\Rightarrow$

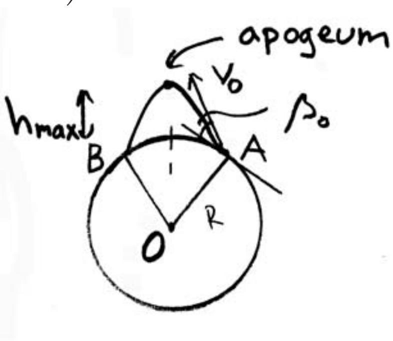
$$\underline{\underline{t_* \;=\; \frac{mR}{F}\left(\sqrt{\frac{g_0}{R+H}} \;-\; \sqrt{2g_0\left(\frac{1}{R+H} \;-\; \frac{2}{4R+3H}\right)}\right) \;=\; 135\text{ s}}}$$

Dimensionen ok!

$m \uparrow \Rightarrow \; t_* \uparrow$ ok!

$F \uparrow \Rightarrow \; t_* \downarrow$ ok!

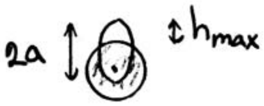
109)



Givet: $v_0 = 2000$ m/s

$\beta_0 = 40°$

Sökt: a, e, $h_{\max}$



$$h_{\max} = r_{\max} - R \qquad (1)$$

$$r_{\max} \overset{(8.31)}{=} a(1+e) \qquad (2)$$

a, e?

Vid $\mathcal{A}$:

$$v_0^2 \overset{(8.39)}{=} 2g_0R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2a}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{a}} = \frac{1}{\dfrac{2}{R} - \dfrac{v_0^2}{g_0R^2}} = \underline{\underline{3291 \text{ km}}} \qquad (3)$$

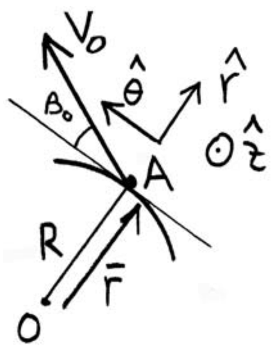
$$e \overset{(8.40)}{=} \sqrt{1 + \frac{2EH^2}{mg_0^2R^4}} \qquad (4)$$

Total energi vid $\mathcal{A}$, E:

$$E = T + V_g \overset{(8.19)}{=} \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mg_0R^2}{R} = -6.06m\,\text{MJ} \qquad (5)$$

$E < 0$ ok ty ellipsbana.

$$H \overset{(8.35)}{=} \frac{|\overline{h}_{\mathcal{O}}|}{m} \qquad (6)$$



$$\overline{h}_{\mathcal{O}} \overset{(7.2)}{=} \overline{r} \times m\overline{v} =$$

$$= R\,\hat{r} \times mv_0(\cos\beta_0\,\hat{\theta} + \sin\beta_0\,\hat{r}) = mv_0R\cos\beta_0\,\hat{z}$$

$\overline{h}_{\mathcal{O}}$ riktad i positiv $\hat{z}$-led, ok ty rör sig moturs runt $\mathcal{O}$.

Insättning i (6) $\Rightarrow$

$$H = v_0R\cos\beta_0 = 9.76 \cdot 10^9\ \text{m}^2/\text{s} \qquad (7)$$

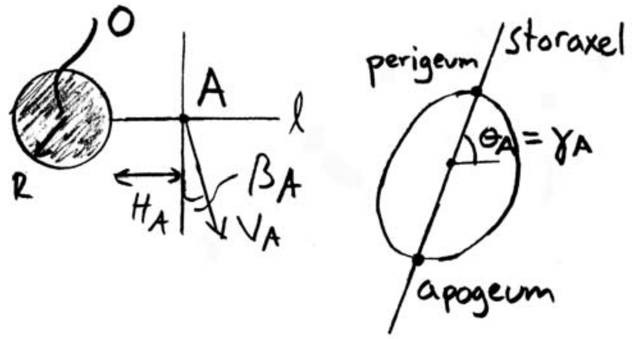
Insättning av (5) och (7) i (4) $\Rightarrow$ $\underline{\underline{e = 0.963}}$

$e < 1$ ok ty ellipsbana.

Insättning i (2) $\Rightarrow$ $r_{\max} = 6460$ km

Insättning i (1) $\Rightarrow$ $\underline{\underline{h_{\max} = 88.6\text{ km}}}$

110)



<u>Givet:</u> $v_{\mathcal{A}} = 7500$ m/s

$\beta_{\mathcal{A}} = 2°$

$H = 1000$ km

<u>Sökt:</u> $2a$, e, $\gamma_{\mathcal{A}}$, krockar med jorden?

$$v_{\mathcal{A}}^2 \overset{(8.39)}{=} 2g_0R^2\left(\frac{1}{R+H_{\mathcal{A}}} - \frac{1}{2a}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$2a = \frac{1}{\dfrac{1}{R+H_{\mathcal{A}}} - \dfrac{v_{\mathcal{A}}^2}{2g_0R^2}} = 15360 \text{ km} \quad (1)$$

e?

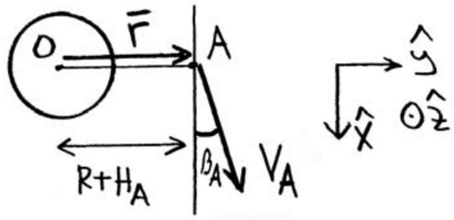
$$e \overset{(8.40)}{=} \sqrt{1 + \frac{2EH^2}{mg_0^2R^4}} \qquad (2)$$

Total energi vid $\mathcal{A}$, E:

$$E = T + V_g \overset{(8.19)}{=} \frac{mv_{\mathcal{A}}^2}{2} - \frac{mg_0R^2}{R+h_{\mathcal{A}}} = -25.956m \text{ MJ} \qquad (3)$$

$E < 0$ ok ty ellipsbana.

$$H \overset{(8.35)}{=} \frac{|\overline{h}_{\mathcal{O}}|}{m} \qquad (4)$$



$$\overline{h}_{\mathcal{O}} \overset{(7.2)}{=} \overline{r} \times m\overline{v} =$$

$$= (R+H_{\mathcal{A}})\,\hat{y} \times m v_{\mathcal{A}}(\cos\beta_{\mathcal{A}}\,\hat{x} + \sin\beta_{\mathcal{A}}\,\hat{y}) =$$

$$= -m v_{\mathcal{A}}(R+H_{\mathcal{A}})\cos\beta_{\mathcal{A}}\hat{z}$$

$\overline{h}_{\mathcal{O}}$ riktad i negativ $\hat{z}$-led, ok ty rör sig medurs runt $\mathcal{O}$.

Insättning i (4) $\Rightarrow$

$$H = v_{\mathcal{A}}(R+H_{\mathcal{A}})\cos\beta_{\mathcal{A}} = 5.52 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s} \qquad (5)$$

Insättning av (3) och (5) i (2) $\Rightarrow$ $\underline{\underline{e = 0.053}}$

$e < 1$ ok ty ellipsbana.

$$\gamma_{\mathcal{A}} = \theta_{\mathcal{A}} \qquad (2)$$

Ty θ för ellipsbanan mäts alltid från perigeum.

$\theta_{\mathcal{A}}$?

Ellipsbanans ekvation:

$$r_{\mathcal{A}} \overset{(8.29)}{=} \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta_{\mathcal{A}}} = R + H_{\mathcal{A}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\cos\theta_{\mathcal{A}} = \frac{1}{e}\left(\frac{a(1-e^2)}{R+H_{\mathcal{A}}} - 1\right) \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\gamma_{\mathcal{A}}}} = \theta_{\mathcal{A}} = \underline{\underline{43.0^\circ}}$$

Träffar jorden om $r_{\min} < R$:

$$r_{\min} \overset{(8.31)}{=} a(1-e) = 7271 \text{ km} > R$$

$\therefore$ $\underline{\underline{\text{Träffar inte jorden.}}}$