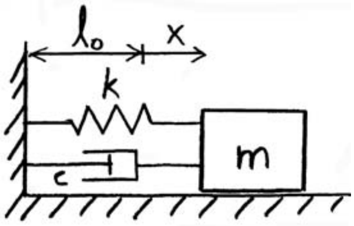
78, 79)



Givet: $m = 1.0$ kg

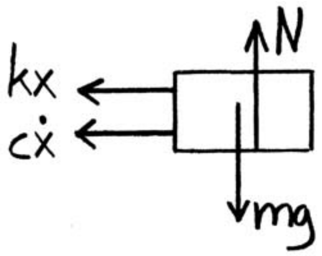
$k = 36$ N/m

$c = 1.0$ Ns/m

$t = 0$: $x = x_0 = 20$ mm, $\dot{x} = 0$ m/s

Sökt: ζ, δ, $x(t)$

Frilägg klossen i godtyckligt läge:



Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$$\rightarrow: \quad -kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{2\zeta\omega_n}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_n^2}x = 0 \qquad (1)$$

Standardform.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 6.0 \text{ rad/s}$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{c}{m} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\zeta}} = \frac{c}{2m\omega_n} = \underline{\underline{0.083}}$$

Logaritmiskt dekrement, δ:

$$\underline{\underline{\delta}} \overset{(6.25)}{=} \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \underline{\underline{0.53}}$$

$\zeta < 1 \quad \Rightarrow \quad$ underdämpat.

$$\therefore \quad x = x_h = e^{-\zeta\omega_n t}\,(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t)$$

$$\dot{x} = -\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}\,(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t) +$$

$$+\,\omega_d e^{-\zeta\omega_n t}\,(-A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t)$$

där

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n = 6.0 \text{ rad/s}$$

<u>Begynnelsevillkor:</u>

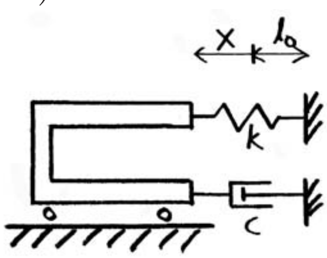
$$x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad A = x_0 = 20 \text{ mm}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\zeta\omega_n A + \omega_d B = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$B = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} A = 1.7 \text{ mm}$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{x = e^{-0.50t}\,(20\cos 6.0t + 1.7\sin 6.0t) \text{ mm}}}$$

94)



<u>Givet:</u> $x(0) = 0$

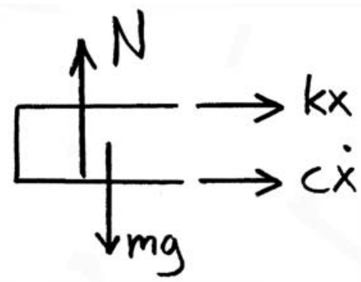
$\dot{x}(0) = v_0$

Kritiskt dämpat

<u>Sökt:</u> $x_{\max}$

Frilägg kanonen i godtyckligt läge:

Vi anger läget på kanonen m.h.a. koordinaten x mätt från en fix punkt. Vi väljer här, helt godtyckligt, att mäta x från den punkt där fjädern är ospänd. Eftersom fjädern är ospänd vid $t = 0$, rör sig kanonen sträckan x efter avfyrningen. Den eftersökta sträckan är alltså max-värdet av x.



Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$$\leftarrow: \quad -kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{2\zeta\omega_n}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_n^2}x = 0 \qquad (1)$$

Standardform.

Kritiskt dämpat ($\zeta = 1$) $\Rightarrow$

$$x = x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$$

$$\dot{x} = Be^{-\omega_n t} - \omega_n(A + Bt)e^{-\omega_n t}$$

Begynnelsevillkor:

$$x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad B - \omega_n A = v_0 \quad \Leftrightarrow$$

$$B = v_0$$

$$\therefore \quad x = v_0 t e^{-\omega_n t} \qquad (1)$$

$x_{\max}$ fås vid $t = t_*$ då $\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow$

$$v_0 e^{-\omega_n t_*} - v_0 \omega_n t_* e^{-\omega_n t_*} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$v_0 \left(1 - \omega_n t_*\right) e^{-\omega_n t_*} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$t_* = \frac{1}{\omega_n}$$

Insättning i (1) $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{x_{\max}}} = x(t_*) = \frac{v_0}{\omega_n} e^{-1} = \underline{\underline{\frac{v_0}{e}\sqrt{\frac{m}{k}}}}$$

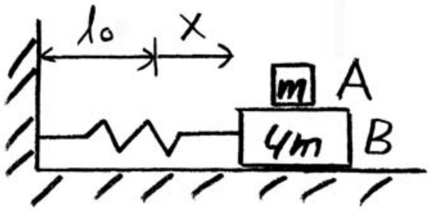
Dimensionen ok!

$v_0 \uparrow \Rightarrow \ x_{\max} \uparrow$ ok!

$m \uparrow \Rightarrow \ x_{\max} \uparrow$ ok!

$k \uparrow \Rightarrow \ x_{\max} \downarrow$ ok!

93)



<u>Givet:</u> $x(0) = 0$

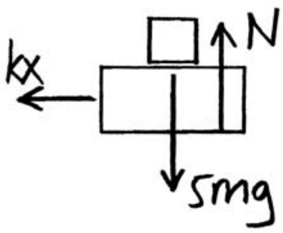
$\dot{x}(0) = -v_0$

<u>Sökt:</u> $v_{0,\max}$ så ej glider

Frilägg kloss $\mathcal{A}$ inklusive $\mathcal{B}$ i godtyckligt läge innan det börjar glida:

Vi anger läget på $\mathcal{B}$ m.h.a. koordinaten x mätt från en fix punkt. Vi väljer här, helt godtyckligt, att mäta x från den punkt där fjädern är ospänd.

Vi börjar med att teckna $x = x(t)$ när $\mathcal{A}$ inte glider på $\mathcal{B}$, d.v.s. när $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ rör sig som en enda stor kloss. Därefter kan vi bestämma friktionskraften $F_{\text{fr}} = F_{\text{fr}}(t)$ mellan klossarna. Enligt (2.10) glider det inte så länge $|F_{\text{fr}}| \leq \mu_s N$. Detta villkor kommer ge oss $v_{0,\max}$.



Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$$\rightarrow: \quad -kx = 5m\ddot{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{5m}}_{\omega_n^2} x = 0$$

Standardform.

$$\therefore \quad x = x_h = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t$$

$$\dot{x} = -A\omega_n \sin\omega_n t + B\omega_n \cos\omega_n t$$

Begynnelsevillkor:

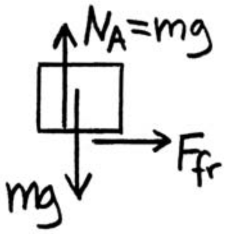
$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

$$\dot{x}(0) = -v_0 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{v_0}{\omega_n}$$

$$\therefore \quad x = -v_0\sqrt{\frac{5m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{5m}}\,t$$

$$\ddot{x} = v_0\sqrt{\frac{k}{5m}}\sin\sqrt{\frac{k}{5m}}\,t \qquad (1)$$

Frilägg kloss $\mathcal{A}$ i godtyckligt läge innan det börjar glida:



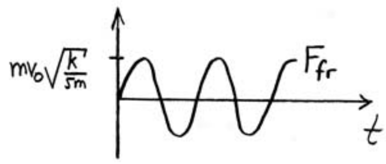
Friktionskraftens riktning kommer att variera med tiden (se nedan). Att vi ritat den åt höger betyder bara att vi valt höger som positiv riktning för kraften.

Newton II:

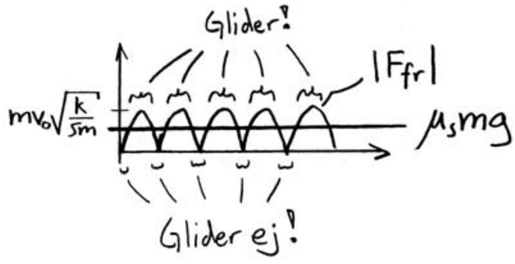
$$\rightarrow: \quad F_{\text{fr}} = m\ddot{x} \overset{(1)}{=} mv_0\sqrt{\frac{k}{5m}}\sin\sqrt{\frac{k}{5m}}\,t$$

Glider ej om $|F_{\mathrm{fr}}| \leq \mu_s N_{\mathcal{A}} = \mu_s mg$

Enligt (2.10).



Villkoret för att det *aldrig* ska glida är alltså att $|F_{\mathrm{fr}}|_{\max} \leq \mu_s N_{\mathcal{A}} = \mu_s mg \quad \Leftrightarrow$



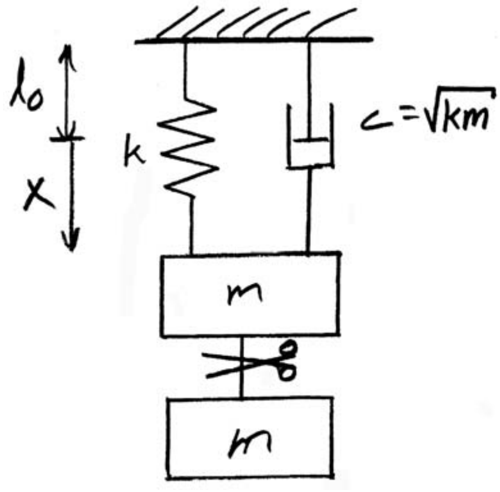
$$mv_0\sqrt{\frac{k}{5m}} \leq \mu_s mg \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{v_0 \leq \mu_s g\sqrt{\frac{5m}{k}}}}$$

Dimensionen ok!

$\mu_s \uparrow \Rightarrow v_0 \uparrow$ ok!

95)



<u>Givet:</u> Hänger i jämviktsläget.

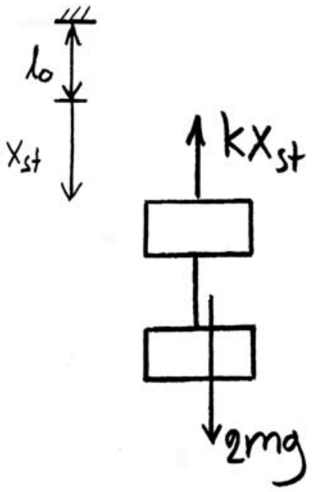
Klipper vid $t = 0$.

<u>Sökt:</u> $l = l_0 + x$

Vi anger läget på den övre klossen m.h.a. koordinaten x mätt från en fix punkt. Vi väljer här, helt godtyckligt, att mäta x från den punkt där fjädern är ospänd.

För att kunna teckna begynnelsevillkoren korrekt, måste vi först bestämma jämviktsläget eftersom det är givet att man klipper snöret då systemet är i jämvikt. Då klossarna hänger stilla i jämviktsläget är dämparkraften noll eftersom $\dot{x} = 0$.

Frilägg klossarna i jämviktsläget (statiskt, så ingen dämparkraft):



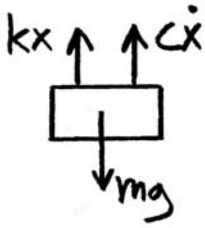
Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$$\downarrow: \quad 2mg - kx_{\mathrm{st}} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

Accelerationen är noll eftersom systemet hänger i vila.

$$x_{\mathrm{st}} = \frac{2mg}{k} \qquad (1)$$

Frilägg den övre klossen vid godtyckligt läge efter klippet:



Newton II:

$$\downarrow: \quad mg - kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{2\zeta\omega_n}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_n^2}x = g \qquad (2)$$

Standardform.

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{1}{2} < 1$$

$\therefore$ underdämpat

$$x = x_h + x_p$$

$$x_p = C$$

Högerledet i (2) är en konstant, så vi ansätter partikulärlösningen x_p som en konstant C.

Insättning i (2) $\Rightarrow$

$$\frac{k}{m}C = g \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{mg}{k}$$

$$x_h \;=\; e^{-\zeta\omega_n t}\left(A\cos\omega_n t \;+\; B\sin\omega_n t\right),$$

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_n$$

$$\therefore \quad x \;=\; e^{-\zeta\omega_n t}\left(A\cos\omega_d t \;+\; B\sin\omega_d t\right) \;+\; \frac{mg}{k}$$

$$\dot{x} \;=\; -\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}\left(A\cos\omega_d t \;+\; B\sin\omega_d t\right) +$$

$$+\,\omega_d e^{-\zeta\omega_n t}\left(-A\sin\omega_d t \;+\; B\cos\omega_d t\right)$$

<u>Begynnelsevillkor:</u>

$$x(0) \;=\; x_{\text{st}} \;\overset{(1)}{=}\; \frac{2mg}{k} \quad \Rightarrow \quad A \;+\; \frac{mg}{k} \;=\; \frac{2mg}{k} \quad \Leftrightarrow$$

$$A \;=\; \frac{mg}{k}$$

$$\dot{x}(0) \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad -\zeta\omega_n A \;+\; \omega_d B \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$B \;=\; \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}A \;=\; \frac{mg}{\sqrt{3}k}$$

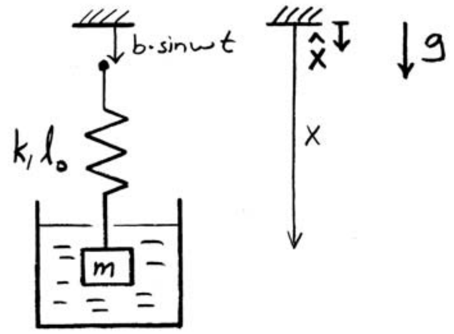
$$\therefore \quad x \;=\; \frac{mg}{k}\left(\cos\omega_d t \;+\; \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\omega_d t\right)e^{-\zeta\omega_n t} \;+\; \frac{mg}{k} \;=$$

$$= \underline{\underline{\frac{mg}{k}\left[\left(\cos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t\right) e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t} + 1\right]}}$$

Dimensionen ok!

$$\underline{\underline{l = x + l_0}}$$

96)



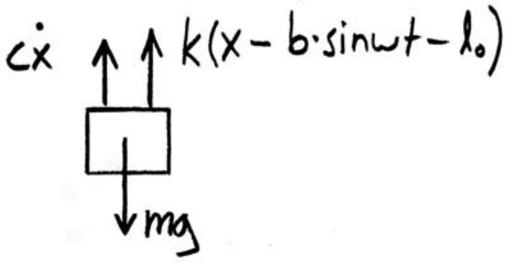
<u>Givet:</u> $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Amplitud i fortvarighet: $2b$

<u>Sökt:</u> c

Vi bestämmer ett uttryck för amplituden i fortvarighet, d.v.s. då $t \to \infty$. Detta kommer ge oss c.

Frilägg klossen i godtyckligt läge:



Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$$\downarrow: \quad mg - c\dot{x} - k(x - b\sin\omega t - l_0) = m\ddot{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_n^2 = \omega \text{ här}} x = \frac{kb}{m}\sin\omega t + g + \frac{kl_0}{m} \qquad (1)$$

Standardform.

$$x = x_h + x_p$$

$x_h \to 0$ i fortvarighet ($t \to \infty$)

$$x_p = X_1 \sin\omega t + X_2 \cos\omega t + C$$

$$\dot{x}_p = X_1\omega\cos\omega t - X_2\omega\sin\omega t$$

$$\ddot{x}_p = -X_1\omega^2\sin\omega t - X_2\omega^2\cos\omega t$$

Insättning i (1) $\Rightarrow$

$$-X_1\omega^2\sin\omega t - X_2\omega^2\cos\omega t +$$

$$+\frac{c}{m}X_1\omega\cos\omega t - \frac{c}{m}X_2\omega\sin\omega t +$$

$$+\frac{k}{m}X_1\sin\omega t + \frac{k}{m}X_2\cos\omega t + \frac{kC}{m} =$$

$$= \frac{kb}{m}\sin\omega t + g + \frac{kl_0}{m}$$

Identifiera:

konst.: $\quad \dfrac{kC}{m} = g + \dfrac{kl_0}{m} \quad \Leftrightarrow \quad C = \dfrac{mg}{k} + l_0$

cos: $\quad -X_2\omega^2 + \dfrac{c}{m}X_1\omega + \underbrace{\dfrac{k}{m}}_{\omega^2}X_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X_1 = 0$

sin: $\quad -X_1\omega^2 - \dfrac{c}{m}X_2\omega + \dfrac{k}{m}X_1 = \dfrac{kb}{m} \quad \Leftrightarrow$

$$X_2 = -\frac{kb}{c\omega} = -\frac{kb\sqrt{m}}{c\sqrt{k}} = -\frac{b\sqrt{km}}{c}$$

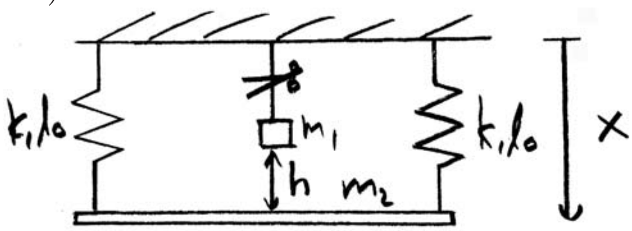
Amplituden är $|X_1| = \dfrac{b\sqrt{km}}{c} = 2b \quad \Leftrightarrow$

Rent allmänt är amplituden $\sqrt{X_1^2 + X_2^2}$.

$$\underline{\underline{c = \frac{\sqrt{km}}{2}}}$$

Dimensionen ok!

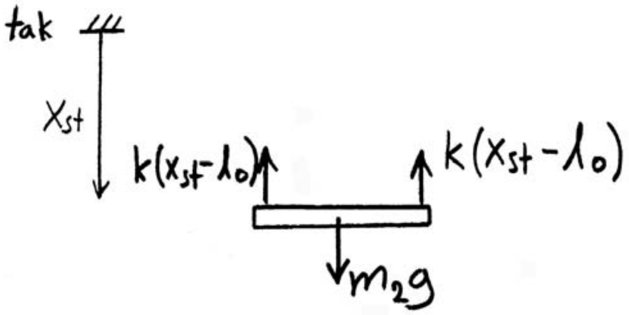
97)



Sökt: Fjäderlängd $x(t)$

Frilägg staven före stöten (jämvikt):

För att kunna teckna begynnelsevillkoren korrekt måste vi först bestämma fjäderns längd då staven hänger i jämvikt, samt stavens fart precis efter stöten. Denna fart beror i sin tur på klossens fart precis före stöten.



Newton II, (2.2), $\overline{F} = m\overline{a}$:

$\downarrow$: $\quad m_2 g - 2k(x_{\text{st}} - l_0) = 0 \quad \Leftrightarrow$

Accelerationen är noll eftersom staven hänger i vila.

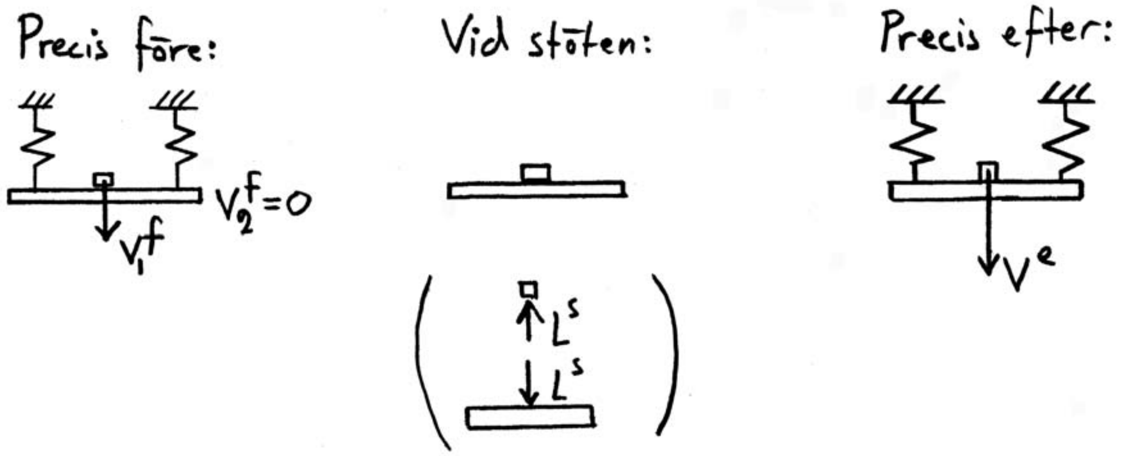
$$x_{\text{st}} = l_0 + \frac{m_2 g}{2k} \qquad (1)$$

Klossens fart precis före stöten, v_1^f:

Arbete–energilagen $\Rightarrow$

$$\frac{m_1 (v_1^f)^2}{2} = m_1 g h \quad \Rightarrow \quad v_1^f = \sqrt{2gh}$$

Stöten (studerar klossen och staven som *ett* system):



Stötimpulsen av en tyngdkraft och en fjäderkraft är alltid noll vid en momentan stöt, se sid. 109.

Efter stöten fastnar klossen på staven, så båda kropparna har samma hastighet efter stöten.

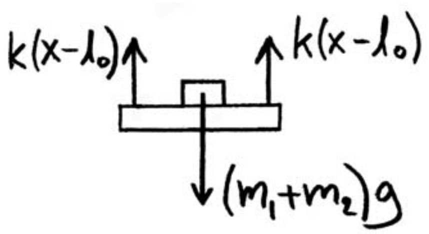
Stötimpulslagen, (5.15), $\overline{L}^{\text{s,ext}} = \sum_{i=1}^{2} \overline{p}_e^i - \sum_{i=1}^{2} \overline{p}_f^i, \quad \overline{p}^i = m_i \overline{v}_i$:

$$\downarrow: \quad 0 = (m_1 + m_2)v^e - (m_1 v_1^f + 0) \quad \Leftrightarrow$$

$$v^e = \frac{m_1 v_1^f}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\sqrt{2gh}}{m_1 + m_2} \qquad (2)$$

Efter stöten:

Frilägg staven med klossen på vid godtyckligt läge:



Newton II:

$$\downarrow: \quad (m_1+m_2)g \;-\; 2k(x-l_0) \;=\; (m_1+m_2)\ddot{x} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{2k}{m_1+m_2}}_{\omega_n^2} x \;=\; g + \frac{2kl_0}{m_1+m_2} \qquad (3)$$

$$x \;=\; x_h + x_p$$

$$x_p = C$$

Högerledet i (3) är en konstant, så vi ansätter partikulärlösningen x_p som en konstant C.

Insättning i (3) $\Rightarrow$

$$\frac{2k}{m_1+m_2}C \;=\; g + \frac{2kl_0}{m_1+m_2} \qquad \Leftrightarrow$$

$$C \;=\; \frac{(m_1+m_2)g}{2k} + l_0$$

$$x_h \;=\; A\cos\omega_n t \;+\; B\sin\omega_n t$$

$$\therefore \quad x \;=\; A\cos\omega_n t \;+\; B\sin\omega_n t \;+\; \frac{(m_1+m_2)g}{2k} \;+\; l_0$$

$$\dot{x} \;=\; -A\omega_n\sin\omega_n t \;+\; B\omega_n\cos\omega_n t$$

<u>Begynnelsevillkor:</u>

$$x(0) \;=\; x_{\text{st}} \;\overset{(1)}{=}\; l_0 \;+\; \frac{m_2 g}{2k} \quad \Rightarrow$$

$$A + \frac{(m_1+m_2)}{2k} + l_0 \;=\; l_0 + \frac{m_2 g}{2k} \quad \Leftrightarrow$$

$$A \;=\; -\frac{m_1 g}{2k}$$

$$\dot{x}(0) \;=\; v^e \;\overset{(2)}{=}\; \frac{m_1\sqrt{2gh}}{m_1+m_2} \quad \Rightarrow$$

$$B\omega_n \;=\; \frac{m_1\sqrt{2gh}}{m_1+m_2} \quad \Leftrightarrow$$

$$B \;=\; \sqrt{\frac{m_1+m_2}{2k}}\,\frac{m_1\sqrt{2gh}}{m_1+m_2} \;=\; \frac{m_1\sqrt{gh}}{\sqrt{k(m_1+m_2)}}$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{x \;=\; l_0 \;+\; \frac{(m_1+m_2)g}{2k} \;-\; \frac{m_1 g}{2k}\cos\omega_n t \;+\; \frac{m_1\sqrt{gh}}{\sqrt{k(m_1+m_2)}}\sin\omega_n t,}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m_1 + m_2}}$$

Dimensionen ok!

Begynnelsevillkoren ok!