23)

Givet: $R = 100$ m

$$\dot{\theta} = 11\ °/\text{s} = 11\,\frac{\pi}{180}\ \text{rad/s}$$

$$\ddot{\theta} = 2.0\ °/\text{s}^2 = 2.0\,\frac{\pi}{180}\ \text{rad/s}^2$$

Sökt: a) $|\overline{v}|$, $|\overline{a}|$

b) $\dfrac{d|\overline{v}|}{dt}$

Cirkelrörelse, (1.16) $\Rightarrow$

$$\overline{v} = R\dot{\theta}\,\hat{t}$$

I stället för den naturliga basen kan vi lika gärna använda polära koordinater, (1.27).

$$\therefore \quad \underline{\underline{|\overline{v}|}} = |R\dot{\theta}| = R\dot{\theta} = \underline{\underline{19.2\ \text{m/s} = 19.2 \cdot 3.6 = 69\ \text{km/h}}}$$

Observera att $\dot{\theta}$ måste anges i rad/s i alla formler.

(1.16) $\Rightarrow$

$$\overline{a} = R\ddot{\theta}\,\hat{t} + R\dot{\theta}^2\,\hat{n}$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{|\overline{a}|}} = \sqrt{(R\ddot{\theta})^2 + (R\dot{\theta}^2)^2} = \underline{\underline{5.1\ \text{m/s}^2}}$$

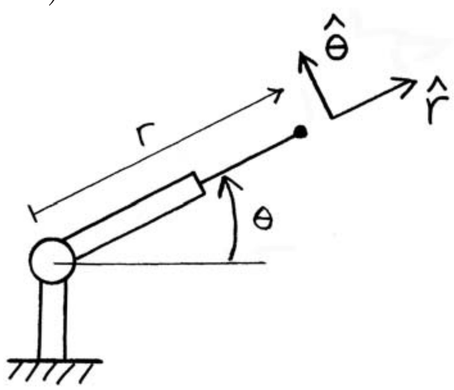
b)

$$\underline{\underline{\frac{d|\overline{v}|}{dt}}} = \frac{d(R\dot{\theta})}{dt} = R\ddot{\theta} = \underline{\underline{3.5\ \text{m/s}^2}}$$

Eftersom $\ddot{\theta} > 0$ ökar $\dot{\theta}$, så att farten $R\dot{\theta}$ ökar, d.v.s. $d|\overline{v}|/dt > 0$ ok!

Rent allmänt är $a_t = \dot{v}$, där v *här* är farten eftersom $v = R\dot{\theta} > 0$ (om i stället $v < 0$ är fartändringen $-a_t$).

24)



Givet: $r = 1.2 - 0.6\cos 2\pi t$ m

$\theta = 0.5 - 0.3\sin 2\pi t$ rad

Sökt: $|\overline{v}|$ och $|\overline{a}|$ då $t = 1.0$ s

$$\overline{v} \overset{(1.24)}{=} \underbrace{\dot{r}}_{v_r}\,\hat{r} + \underbrace{r\dot{\theta}}_{v_\theta}\,\hat{\theta}$$

Eftersom vi känner punktens bana i polära koordinater, använder vi naturligtvis uttrycken för hastighet och acceleration i polära koordinater, (1.24) och (1.25).

$$\overline{a} \overset{(1.25)}{=} \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{a_r}\,\hat{r} + \underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}_{a_\theta}\,\hat{\theta}$$

$$r = 1.2 - 0.6\cos 2\pi t = \Big/ t = 1\text{ s} \Big/ = 0.6\text{ m}$$

$$\dot{r} = 0.6\cdot 2\pi\sin 2\pi t = \Big/ t = 1\text{ s} \Big/ = 0\text{ m/s}$$

$$\ddot{r} = 0.6\cdot(2\pi)^2\cos 2\pi t = \Big/ t = 1\text{ s} \Big/ = 23.69\text{ m/s}^2$$

$$\theta = 0.5 - 0.3\sin 2\pi t = \Big/ t = 1\text{ s} \Big/ = 0.5\text{ rad } (28.6^\circ)$$

$$\dot{\theta} = -0.3\cdot 2\pi\cos 2\pi t = \Big/ t = 1\text{ s} \Big/ = -1.89\text{ rad/s}$$

$$\ddot{\theta} = 0.3\cdot(2\pi)^2\sin 2\pi t = \Big/ t = 1\text{ s} \Big/ = 0\text{ rad/s}^2$$

$$\therefore \quad v_r = \dot{r} = 0 \text{ m/s}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = -1.13 \text{ m/s}$$

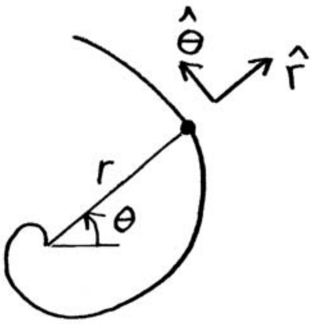
$$\underline{\underline{|\overline{v}|}} = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \underline{\underline{1.13 \text{ m/s}}}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 21.6 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \text{ m/s}^2$$

$$\underline{\underline{|\overline{a}|}} = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \underline{\underline{21.6 \text{ m/s}^2}}$$

15)



Givet: $r = b\theta$

$\dot{\theta} = \omega$, konstant

Sökt: Vinkeln α mellan $\overline{v}$ och $\overline{a}$

$$\overline{a} \cdot \overline{v} \;=\; |\overline{a}|\,|\overline{v}|\cos\alpha \qquad (1)$$

Enligt definitionen av skalärprodukt.

Vi behöver ta fram $\overline{v}$ och $\overline{a}$. Eftersom vi känner banans form i polära koordinater, använder vi uttrycken för $\overline{v}$ och $\overline{a}$ i just dessa koordinater.

$$\overline{v} \overset{(1.24)}{=} \dot{r}\,\hat{r} \;+\; r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\overline{a} \overset{(1.25)}{=} (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} \;+\; (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta}$$

$$r \;=\; b\theta \quad \Rightarrow$$

$$\dot{r} \;=\; b\dot{\theta} \;=\; b\omega$$

$$\ddot{r} \;=\; b\ddot{\theta} \;=\; 0$$

$$\therefore \quad \overline{v} = b\omega\,\hat{r} + r\omega\,\hat{\theta}$$

$$|\overline{v}| = \omega\sqrt{b^2 + r^2}$$

$$\overline{a} = -r\omega^2\,\hat{r} + 2b\omega^2\,\hat{\theta}$$

$$|\overline{a}| = \omega^2\sqrt{r^2 + 4b^2}$$

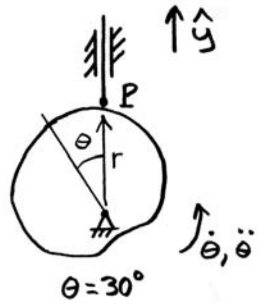
$$\overline{v} \cdot \overline{a} = -br\omega^3 + 2br\omega^3 = br\omega^3$$

Insättning i (1) $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{\alpha = \arccos\left(\frac{br}{\sqrt{r^2 + b^2}\,\sqrt{r^2 + 4b^2}}\right)}}$$

Dimensionen ok (dim b = dim r)!

25)



<u>Givet:</u> $r = 0.2 + 0.15\cos\theta$ m

$\dot{\theta} = 5.0$ rad/s

$\ddot{\theta} = 6.0$ rad/s^2

<u>Sökt:</u> $\overline{v}$ och $\overline{a}$ för $\mathcal{P}$ då $\theta = 30°$

Läget av $\mathcal{P}$ ges enligt figuren av $\overline{r} = r\,\hat{y}$.

$$\therefore \quad \overline{v} = \dot{r}\,\hat{y} \qquad (1)$$

$$\overline{a} = \ddot{r}\,\hat{y} \qquad (2)$$

$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \dot{r}\,\hat{y}$ eftersom $\hat{y}$ är en konstant (vertikalriktningen).

Här kan $\dot{r}$ och $\ddot{r}$ bestämmas eftersom vi känner $r = r(\theta)$ samt $\dot{\theta}$ och $\ddot{\theta}$.

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -0.15\sin\theta\,\dot{\theta}$$

Kedjeregeln används här eftersom $r = r\big(\theta(t)\big)$.

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{\partial\dot{r}}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\dot{r}}{\partial\dot{\theta}}\frac{d\dot{\theta}}{dt} =$$

$$= \frac{\partial\dot{r}}{\partial\theta}\,\dot{\theta} + \frac{\partial\dot{r}}{\partial\dot{\theta}}\,\ddot{\theta} =$$

$$= -0.15\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - 0.15\sin\theta\,\ddot{\theta}$$

Kedjeregeln används igen eftersom $\dot{r} = \dot{r}\big(\theta(t), \dot{\theta}(t)\big)$.

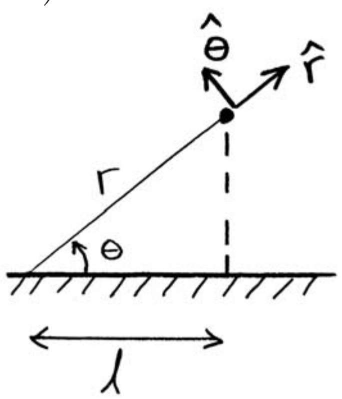
Insätts $\theta = 30°$, ger (1) och (2) att

$$\underline{\underline{\overline{v} = -0.38\,\hat{y}\ \text{m/s}, \quad \overline{a} = -3.7\,\hat{y}\ \text{m/s}^2}}$$

Kammens form är sådan att $\mathcal{P}$ rör sig nedåt hela tiden när θ ökar från 0 till 30° (se figuren). Alltså måste $\overline{v}$ vara riktad nedåt.

Att även $\overline{a}$ är riktad nedåt, innebär att $\mathcal{P}$:s fart nedåt ökar, vilket åtminstone inte verkar orimligt från figuren.

14)



<u>Givet:</u> $\theta = 60°$:

$$r = r_0,\ \ddot{r} = k,\ \dot{\theta} = \omega$$

<u>Sökt:</u> $|\overline{v}|$, $|\overline{a}|$

$$\overline{v} \overset{(1.24)}{=} \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} \qquad (1)$$

r och θ är raketens polära koordinater, så vi använder uttrycket för $\overline{v}$ i polära koordinater.

$\dot{r}$?

Allt är känt utom $\dot{r}$. Den kan vi få fram genom att utnyttja att raketen rör sig vertikalt (detta måste på något sätt bestämma $\dot{r}$ eftersom raketen ju skulle röra sig på ett godtyckligt sätt om $\dot{r}$ vore godtycklig).

Geometri:

$$l = r\cos\theta, \text{ där } l \text{ är konstant.} \qquad (2)$$

Vi för in avståndet l i figuren, vilket måste vara konstant eftersom raketen rör sig vertikalt.

Eftersom $r = r_0$ då $\theta = 60°$, fås att $l = \frac{r_0}{2}$, men det är inte väsentligt att veta.

Tidsderivera (2):

För att få fram $\dot{r}$ från (2) kan vi tänka oss två alternativ:
i) Tidsderivera (2) direkt.

ii) Använd (2) för att teckna r som $r = \frac{l}{\cos\theta}$ och derivera detta uttryck.

För att slippa derivera en kvot, väljer vi alternativ *i)*.

$$0 = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta} \qquad (3)$$

$$\therefore \quad \dot{r} = r\dot{\theta}\tan\theta$$

$$\theta = 60° \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \sqrt{3}r_0\omega$$

Insättning i (1) $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{|\overline{v}|}} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2} = \sqrt{3r_0^2\omega^2 + r_0^2\omega^2} = \underline{\underline{2r_0\omega}}$$

$$\overline{a} \overset{(1.25)}{=} (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} \;+\; (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta} \qquad (4)$$

Allt är känt utom $\ddot{\theta}$, vilken vi kan få fram genom att derivera (3).

Tidsderivera (3):

$$0 \;=\; \ddot{r}\cos\theta \;-\; \dot{r}\sin\theta\,\dot{\theta} \;-\; \dot{r}\sin\theta\,\dot{\theta} \;-\; r\cos\theta\,\dot{\theta}^2 \;-\; r\sin\theta\,\ddot{\theta}$$

$$\therefore \quad \ddot{\theta} \;=\; \frac{\ddot{r}\cos\theta \;-\; 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta \;-\; r\dot{\theta}^2\cos\theta}{r\sin\theta}$$

$$\theta = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} \;=\; \frac{\dfrac{k}{2} \;-\; 2r_0\sqrt{3}\omega\,\omega\dfrac{\sqrt{3}}{2} \;-\; r_0\omega^2\dfrac{1}{2}}{r_0\dfrac{\sqrt{3}}{2}} \;=\; \frac{\dfrac{k}{2} \;-\; \dfrac{7}{2}r_0\omega^2}{r_0\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$$

Insättning i (4) $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{|\overline{a}|}} \;=\; \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 \;+\; (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2} \;=$$

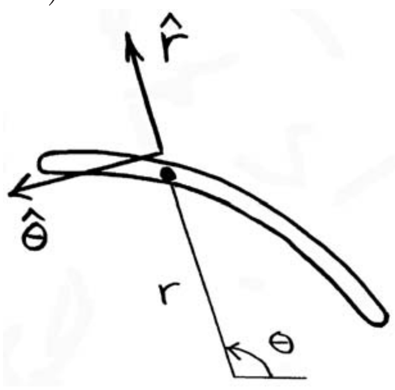
$$=\; \sqrt{(k - r_0\omega^2)^2 \;+\; \left(\frac{k}{\sqrt{3}} \;-\; \frac{7}{\sqrt{3}}r_0\omega^2 \;+\; 2\sqrt{3}r_0\omega^2\right)^2} \;=$$

$$=\; \sqrt{(k - r_0\omega^2)^2 \;+\; \frac{1}{3}\left(k - r_0\omega^2\right)^2} \;=\; \underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{3}}\left|k - r_0\omega^2\right|}}$$

Dimensionen ok!

Raketen måste ju kunna röra sig med konstant fart, d.v.s. så att $|\overline{a}| = \overline{0}$, så det är helt naturligt att $|\overline{a}| = \overline{0}$ för en viss kombination av mätdata r_0, ω, k. Observera att konstant fart inte implicerar att $\dot{r}$ är konstant (d.v.s. $\ddot{r} = k = 0$), vilket syns i (1).

13)



<u>Givet:</u> $r = k\theta$

$\ddot{\theta} = \alpha$, konstant

$t = 0$: Vila, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

<u>Sökt:</u> $|\overline{a}|$ då $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$

$$\overline{a} \overset{(1.25)}{=} \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{a_r}\,\hat{r} + \underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}_{a_\theta}\,\hat{\theta} \qquad (1)$$

Eftersom vi känner banans form i polära koordinater, använder vi uttrycket för $\overline{a}$ i dessa koordinater.

Vi behöver ta fram $\dot{\theta}$, $\dot{r}$ och $\ddot{r}$. Vi börjar med $\dot{\theta}$.

$\dot{\theta}$?

Varignons sats, (1.26), $\Rightarrow$

$$\ddot{\theta}\, d\theta = \dot{\theta}\, d\dot{\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \alpha\, d\theta = \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \sqrt{\alpha\pi}$$

Lämplig att använda eftersom vi känner vinkelaccelerationen $\ddot{\theta}$ och hur vinklarna ändras, och söker hur vinkelhastigheten $\dot{\theta}$ ändras.

Alternativt kan vi integrera upp sambandet $\ddot{\theta} = \alpha$ till $\theta = \frac{\alpha}{2}t^2 + C_1 t + C_2$ där konstanterna C_1 och C_2 bestäms av begynnelsevillkoren $\theta(0) = \frac{\pi}{4}$ och $\dot{\theta}(0) = 0$. Därefter kan tiden t^* då $\theta = \frac{3\pi}{4}$ bestämmas ($t^* = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$), vilket sedan ger $\dot{\theta}$ vid denna tid.

Fördelen med att använda Varignons sats är att man slipper gå omvägen över tiden t^* vilken ju inte är eftersökt.

$\dot{r}$, $\ddot{r}$?

$$r = k\theta \quad \Rightarrow$$

$$\dot{r} = k\dot{\theta}$$

$$\ddot{r} \;=\; k\ddot{\theta} \;=\; k\alpha$$

Vid $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ fås

$$r = k\frac{3\pi}{4}, \qquad \dot{r} = k\sqrt{\alpha\pi}, \qquad \ddot{r} = k\alpha$$

$$\therefore \quad a_r \;=\; \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \;=\; k\alpha \;-\; k\frac{3\pi}{4}\alpha\pi \;=\; \left(1 - \frac{3\pi^2}{4}\right)k\alpha$$

$$a_\theta \;=\; r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \;=\; k\frac{3\pi}{4}\alpha \;+\; 2k\sqrt{\alpha\pi}\sqrt{\alpha\pi} \;=\; \frac{11}{4}k\alpha\pi$$

$$\underline{\underline{|\overline{a}|}} \;=\; \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} \;=\; \underline{\underline{k\alpha\sqrt{\left(1 - \frac{3\pi^2}{4}\right)^2 \;+\; \left(\frac{11\pi}{4}\right)^2}}}$$

Dimensionen ok (dim k = dim r)!