1 Ekvationssystem

Uppgift 1.1 (Sid. 3)

Lösning

$$\begin{cases} x+2y-z=2 \quad (-2)\,(-1) \\ 2x-4y+3z=1 \\ x-3y+4z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=2 \\ -8y+5z=-3 \\ -5y+5z=0 \quad (-1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=2 \\ -3y=-3 \\ -5(y-z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y+z+2 \\ y=1 \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}.$$

Annan lösning

$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-4y+3z=1 \\ x-3y+4z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right] (-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right] (-1) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right] (1/3) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] (8) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] (-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] (1/5) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] (1) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \text{(som ovan).}$$

Datamaskinerna fungerar på detta sätt; en radoperation i taget.

Uppgift 1.2 (Sid. 3)

Lösning

$$\begin{cases} x+2y-z=2 \quad (-2) \\ 2x-y+3z=3 \\ x-3y+4z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=2 \quad (-1) \\ -5y+5z=-1 \\ x-3y+4z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=2 \\ -5y+5z=-1 \\ -5y+5z=0 \end{cases};$$

Ur ekvationerna 2 och 3 drar vi slutsatsen att ekvationssystemet är <u>inkonsistent</u>.

<u>Resultat</u>: Lösning saknas.

Uppgift 1.3 (Sid. 3)

Lösning

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \quad (-1) \\ 2x-y+3z=0 \\ x-3y+4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ -5y+5z=0 \quad (-1/5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ y-z=0 \quad (-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \quad (1) \\ 2x-y+3z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 3x+3z=0 \quad (1/3) \\ y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=y \\ y=-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=-t \end{cases}, \quad -\infty<t<+\infty.$$

<u>Prövning</u>: $\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=t-2t+t=0 \\ 2x-y+3z=2t+t-3t=0 \\ x-3y+4z=t+3t-4t=0 \end{cases}.$

Systemet har <u>oändligt många</u> lösningar.

Uppgift 1.4 (Sid. 3)

Lösning

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] -1 \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} -2 \\ \\ -1/2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] -1 \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] -1 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_4=0 \\ x_3+x_4 \quad = 0 \\ x_2=-s \\ x_4=-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=s+t \\ x_2=-s \\ x_3= \ \ t \\ x_4= -t \end{cases}$$

Lösningarna är <u>tvåparametriga:</u> $-\infty < s,t < \infty$.

Uppgift 1.5 (Sid. 3)

Lösning

(1) $\underline{\lambda=3}$: $\begin{cases} x \qquad\quad = 3x \\ x+3y \quad = 3y \\ x+2y+z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \qquad\quad = 0 \\ x \qquad\qquad = 0 \\ x+2y-2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$

(2) $\underline{\lambda=1}$: $\begin{cases} x \qquad\quad = x \\ x+3y \quad = y \\ x+2y+z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2s \\ x+2y=0 \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2s \\ y=-s \\ z=t \end{cases}; s,t\in\mathbb{R}.$

(3) $\underline{\lambda\neq 1,3}$: $\begin{cases} x \qquad\quad = \lambda x \\ x+3y \quad = \lambda y \\ x+2y+z = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x=0 \\ x+(3-\lambda)y=0 \\ x+2y+(1-\lambda)z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0. \\ z=0 \end{cases}$

Uppgift 1.6 (Sid. 3)

Lösning

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 2s \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-t \\ 2s+t \\ s \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=s-t \\ x_2=2s+t \\ x_3=s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_3-t \\ x_2=2x_3+t \\ x_3=s \end{cases} 1 \Leftrightarrow x_1+x_2=3x_3 \Leftrightarrow \underline{x_1+x_2-3x_3=0.}$$

Uppgift 1.7 (Sid. 3)

Lösning

$$\begin{cases} ax+y+2z=4 \\ x+y+z=1 \\ x+ay+2z=0 \end{cases}, a\in\mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} ax+y+2z=4 \\ x+y+z=1 \\ x+ay+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+y+2z=4 \\ x+ay+2z=0 \end{cases} -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ (a-2)x-y=2 \\ -x+(a-2)y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ (a-2)x-y=2 \\ x=2+(a-2)y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ (a-2)(2+(a-2)y)-y=2 \\ x=2+(a-2)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ (a-2)^2y-y=6-2a \\ x=2+(a-2)y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ (a-1)(a-3)y=-2(a-3) \\ x=2+(a-2)y \end{cases}; \quad \begin{cases} \text{Fall 1: } a=1 \\ \text{Fall 2: } a=3 \\ \text{Fall 3: } a\neq 1,3 \end{cases}$$

forts

(1) $a=1$ ger $0=4$, vilket är självmotsägande; några lösningar finns inte i detta fall.

(2) $a=3$ ger $0 \cdot y = 0$, dvs y kan tas godtyckligt; $y=t$ ger $x=2+t$ och $z=-1-2t$.

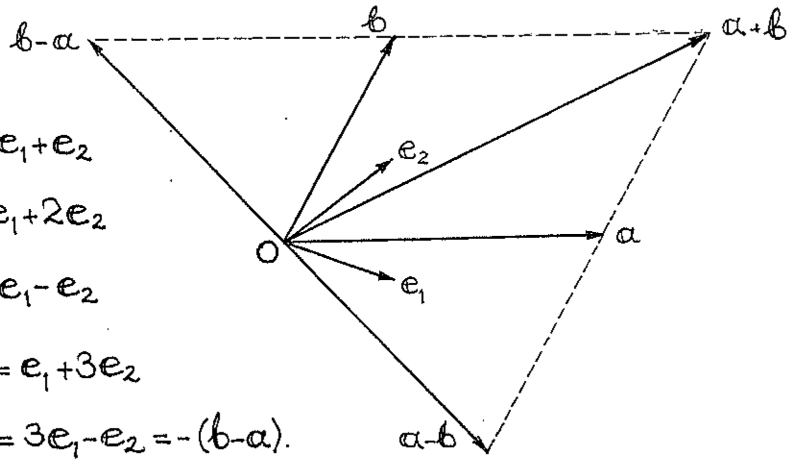
(3) För $a \neq 1$ och $a \neq 3$ fås $y=-\frac{2}{a-1}$, vilket i sin tur ger $x=\frac{2}{a-1}$ och $z=1$.

<u>Svar</u>: $a=1$ ger ingen lösning; $a=3$ ger $x=2+t$, $y=t$, $z=-1-2t$; för övrigt har vi $x=\frac{2}{a-1}$, $y=-\frac{2}{a-1}$ och $z=1$.

2. Vektorer och koordinatsystem

Uppgift 2.1 (Sid. 3)

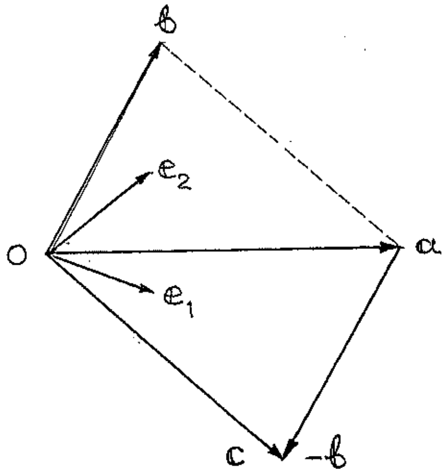
a)



$$\begin{cases} a = 2e_1 + e_2 \\ b = -e_1 + 2e_2 \\ c = 3e_1 - e_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = e_1 + 3e_2 \\ a-b = 3e_1 - e_2 = -(b-a). \end{cases}$$

b)



Det är uppenbart att $c = a - b$, dvs $\underline{a - b - c = 0}$.

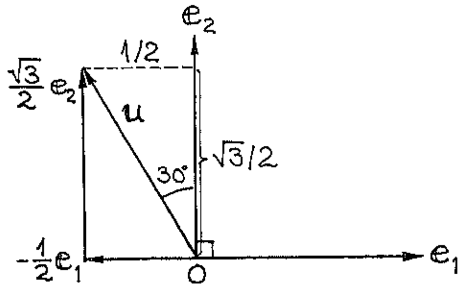
c) Man inser efter en stunds betraktelse att

$$w = u - v \iff \underline{u - v - w = 0}.$$

u, v och w är kantvektorer i en triangel. Att för hand rita (trogna) tredimensionella vektorer är inte alltid lätt.

Uppgift 2.2 (Sid. 4)

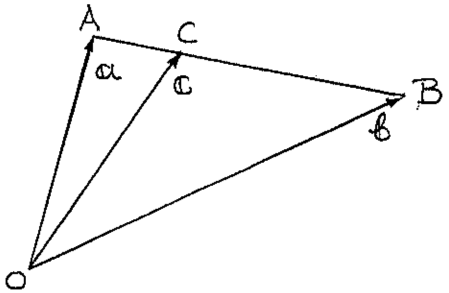
<u>Lösning</u>



$$u = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2 = e\cdot\begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = [-\tfrac{1}{2} \;\; \tfrac{\sqrt{3}}{2}]_e .$$

Uppgift 2.3 (Sid. 4)

Lösning



Jag sätter $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$.

(1) $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = b - a$;

(2) $\dfrac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|} = 1:3 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow |\overline{CB}| = 3|\overline{AC}| \Leftrightarrow \overline{CB} = 3\overline{AC}$;

(3) $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} \overset{(2)}{=} \overline{AC} + 3\overline{AC} = 4\overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{1}{4}\overline{AB}$;

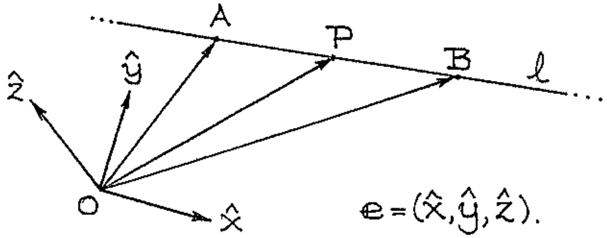
(4) $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OA} + \frac{1}{4}\overline{AB} = a + \frac{1}{4}(b - a) = a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}a =$

$= \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b = \frac{3}{4}\overline{OA} + \frac{1}{4}\overline{OB}$, VSV.

Uppgift 2.4 (Sid. 5)

Lösning

a) A: $(1,0,2)$
B: $(-3,2,4)$
P: (x,y,z)



$e = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$.

$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP} = \overline{OA} + t\overline{AB} = \overline{OA} + t(\overline{OB} - \overline{OA})$, t skalär.

$$e\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = e\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t\left(e\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - e\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = e\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + te\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = e\begin{bmatrix} 1-4t \\ 2t \\ 2+2t \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-4t \\ y = \quad 2t \\ z = 2+2t \end{cases}, \; -\infty < t < \infty . \qquad (*)$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-4t = 3 \\ \quad 2t = -1 \\ 2+2t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{(3,-1,1) \in l}.$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-4t = 5 \Rightarrow t = -1 \\ \quad 2t = -3 \Rightarrow t = -3/2 \\ 2+2t = 0 \Rightarrow t = -1 \end{cases} \Rightarrow \underline{(5,-3,0) \notin l}.$$

b) $$l_1: \begin{cases} x = -1-2s \\ y = \;\; 1+s \\ z = \;\; 3+s \end{cases}, \; s \in \mathbb{R}; \quad l_2: \begin{cases} x = 4+t \\ y = -3+t \\ z = -2+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$l_1 \cap l_2: \begin{cases} -1-2s = 4+t \\ 1+s = -3+t \\ 3+s = -2+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s+t = -5 \quad 1 \\ s-t = -4 \\ s-2t = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s+t = -5 \\ 3s \quad = -9 \\ s-2t = -5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -5-2s \\ s = -3 \\ s-2t = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = -3 \\ t = 1 \\ s-2t = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = -3 \\ \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{l_1 \cap l_2 = \{(5,-2,0)\}}.$$

Resultat: a) Linjens ekvation ges av (*) ovan; punkten $(3,-1,1)$ ligger på linjen.

b) Linjerna skär varandra i punkten $(5,-2,0)$.

Uppgift 2.5 (Sid. 4)

Lösning

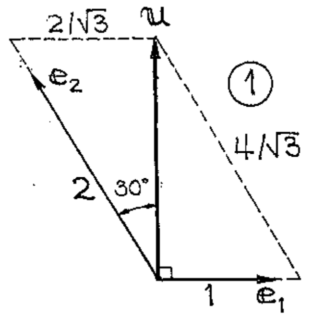
$\pi_1: x+z=1$; $\pi_2: x-y-2z=0$; $\pi_3: x+y+4z=2$.

$$\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3: \begin{cases} x \quad +z=1 & (-1) \\ x-y-2z=0 \\ x+y+4z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad +z=1 \\ -y-3z=-1 & (1) \\ y+3z=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

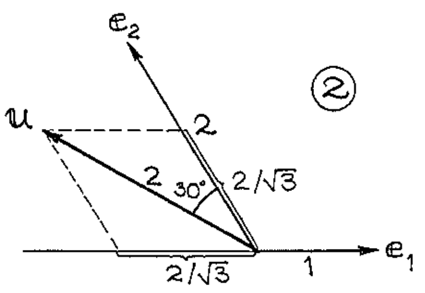
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=1-3z \\ z=-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=1+3t \\ z=\quad -t \end{cases} \Leftrightarrow \underline{e\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = e\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} t,\ t\in\mathbb{R}.}$$

Uppgift 2.6 (Sid. 4)

Lösning



$$u=\frac{2}{\sqrt{3}}e_1+\frac{2}{\sqrt{3}}e_2$$



$$u=-\frac{2}{\sqrt{3}}e_1+\frac{1}{\sqrt{3}}e_2.$$

Ovanstående härledning är rent geometrisk. Det går att förfara även algebraiskt; $e_1=e_1'$, $e_2=-e_1'+\sqrt{3}e_2'$; $e'=(e_1', e_2')$ standard.

3. Skalärprodukt

Uppgift 3.1 (Sid. 4)

Lösning

$$u=2e_1+3e_2+4e_3,\quad v=5e_1-6e_2+7e_3$$

(1) $(u|v)=(2e_1+3e_2+4e_3\,|\,5e_1-6e_2+7e_3)=2\cdot5+3\cdot(-6)+4\cdot7=$

$=10-18+28=\underline{20.}$

(2) $(u|u)=|u|^2=2^2+3^2+4^2=4+9+16=29 \Rightarrow |u|=\underline{\sqrt{29}.}$

(3) $(v|v)=|v|^2=5^2+6^2+7^2=110 \Rightarrow |v|=\underline{\sqrt{110}.}$

Uppgift 3.2 (Sid. 5)

Lösning

$u_1=e_1+e_2+e_3$; $u_2=e_1-e_2$; $u_3=e_1+e_2-2e_3$.

(1) $(u_1|u_2)=(e_1+e_2+e_3\,|\,e_1-e_2)=$

$=(e_1+e_2+e_3|e_1)-(e_1+e_2+e_3|e_2)=$

$=(e_1|e_1)+(e_2|e_1)+(e_3|e_1)-(e_1|e_2)-(e_2|e_2)-(e_3|e_2)=$

$=1+0+0-0-1-0=0 \Leftrightarrow u_1\perp u_2.$

(2) $(u_1|u_3)=(e_1+e_2+e_3\,|\,e_1+e_2-2e_3)=$

$=(e_1+e_2|e_1+e_2)+(e_1+e_2|-2e_3)+(e_3|e_1+e_2)-2(e_3|e_3)$

$=(e_1|e_1)+(e_1|e_2)+(e_2|e_1)+(e_2|e_2)-$

$$-2((e_1|e_3)+(e_2|e_3))+(e_3|e_1)-(e_3|e_2)-2=$$
$$=1+0+0+1-2\cdot(0+0)+0-0-2=0 \Leftrightarrow u \perp u_3.$$

(3) $(u_2|u_3)=(e_1-e_2|e_1+e_2-2e_3)=(e_1-e_2|e_1+e_2)+$
$+(e_1-e_2|-2e_3)=(e_1|e_1)-(e_2|e_2)+(-2)(e_1|e_3)+$
$+2(e_2|e_3)=1-1-0+0=0 \Leftrightarrow u_2 \perp u_3.$

(4) $u_1=e_1+e_2+e_3 \Rightarrow |u_1|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\underline{\sqrt{3}}. \Rightarrow \hat{e}_1=\dfrac{u_1}{\sqrt{3}}.$

(5) $u_2=e_1-e_2 \Rightarrow |u_2|=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\underline{\sqrt{2}} \Rightarrow \hat{e}_2=\dfrac{u_2}{\sqrt{2}}.$

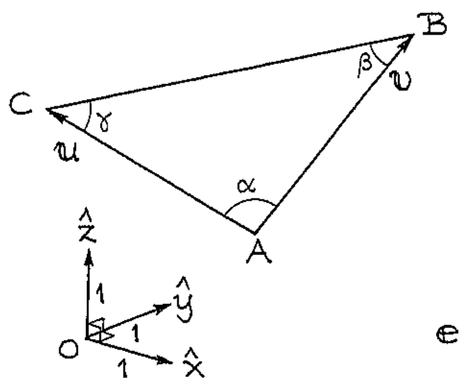
(6) $u_3=e_1+e_2-2e_3 \Rightarrow |u_3|=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=\underline{\sqrt{6}} \Rightarrow \hat{e}_3=\dfrac{u_3}{\sqrt{6}}.$

Den nya ON-basen är $\hat{e}=(\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3)$.

Uppgift 3.3 (Sid. 5)

Lösning

$\underline{A:(-2,1,2)}$, $\underline{B:(-1,1,1)}$, $\underline{C:(0,3,2)}$.



$e=(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$.

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=e\cdot\begin{bmatrix}0\\3\\2\end{bmatrix}-e\cdot\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix}=e\cdot\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \underline{|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}}.$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=e\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}-e\cdot\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix}=e\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \Rightarrow \underline{|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}}.$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=e\cdot\begin{bmatrix}0\\3\\2\end{bmatrix}-e\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}=e\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \underline{|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{6}}.$$

$(u|v)=|u||v|\cos\alpha \Rightarrow 2\cdot1+2\cdot0+0\cdot(-1)=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos\alpha \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2=4\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \underline{\alpha=60^\circ}.$

$$\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}=-u\,;\ \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=v-u.$$

$(-u|v-u)=(u|u-v)=|u||u-v|\cos\gamma \Leftrightarrow 2\cdot1+2\cdot2+0\cdot1=$
$=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cos\gamma \Leftrightarrow 6=2^2\sqrt{3}\cos\gamma \Leftrightarrow \cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \gamma=30^\circ.$

<u>Svar</u>: Sidorna är $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ och $\sqrt{6}$; vinklarna är 30°, 60° och 90°; det är frågan om en liksidig triangeln med den räta vinkeln vid toppen (hörnet) $(-1,1,1)$.

<u>Anm.</u> Att bestämma sidor och vinklar i en triangel kallas i trigonometrin "att solvera triangeln". Uttrycket används <u>sparsamt</u>.

Uppgift 3.4 (Sid. 5)

Lösning

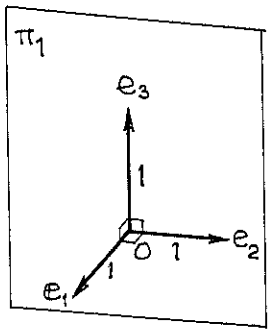
$\pi_1: x_1 = 0$; $\pi_2: x_1 = 1$; $\pi_3: x_1+x_2=0$, $\pi_4: x_1+x_2=1$;

$\pi_5: x_1+x_2+x_3=1.$

(1) $\pi_1: x_1 = 0 \Leftrightarrow 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 0 \Rightarrow n_1 = \mathbf{e}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \mathbf{e}_1.$

π_1 är x_2x_3-planet; en normalvektor är $\mathbf{e}_1$.

Fig. 1.

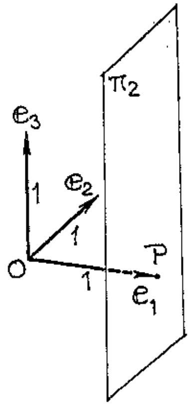


π_1 går genom origo (dess ekvation satisfieras av $(0,0,0)$), så $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ i systemet $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ ligger på π_1.

(2) $\pi_2: x_1 = 1 \Leftrightarrow \pi_2: 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 1 \Rightarrow n_2 = \mathbf{e}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$

π_2 är parallellt med π_1 (skrivs $\pi_1 /\!/ \pi_2$), ty de har en gemensam normalvektor; π_2 går gm punkten $(1,0,0)$ och är ett "translat" till π_1.

Fig. 2

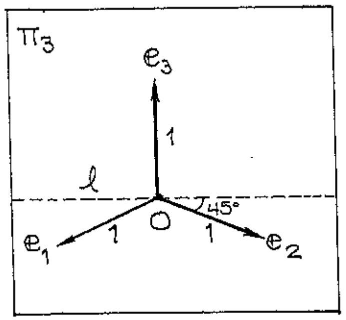


P: $(1,0,0)$.

(3) $\pi_3: x_1+x_2 = 0 \Leftrightarrow 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 0 \Rightarrow n_3 = \mathbf{e}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2.$

π_3 går genom origo och omfattar $\mathbf{e}_3$ (Fig. 3).

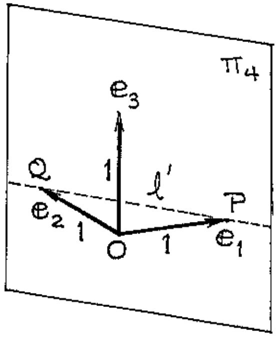
Fig. 3



Linjen l är skärningen mellan π_3 och x_1x_2-planet.

(4) $\pi_4: x_1+x_2 = 1$ är ett translat till planet π_3 ovan. π_4 går genom punkterna $P:(1,0,0)$ och $Q:(0,1,0)$. ligger båda på π_4.

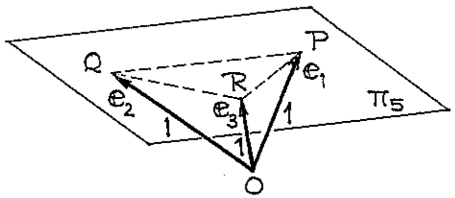
Fig. 4



Linjen l' är skärningen mellan π_4 och x_1x_2-planet.

(5) $\pi_5: x_1+x_2+x_3=1 \Leftrightarrow 1\cdot x_1+1\cdot x_2+1\cdot x_3=1 \Rightarrow n_5 = e\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} e_i.$

π_5 går genom punkterna $P:(1,0,0)$, $Q:(0,1,0)$ och $R:(0,0,1)$.



Uppgift 3.5 (Sid. 5)

Lösning

a) $a = \alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3\ ;\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$ $\qquad e=(e_1,e_2,e_3)$

$$\left.\begin{array}{l}(a\,|\,e_1) = |a|\cdot|e_1|\cdot\cos 45^\circ \Leftrightarrow \alpha = 1/\sqrt{2}\\ (a\,|\,e_3) = |a|\cdot|e_3|\cdot\cos 60^\circ \Leftrightarrow \gamma = 1/2\end{array}\right\} \Rightarrow \beta^2 = 1/4 \Rightarrow \beta = \pm 1/2.$$

Resultat: $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1+\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{2}e_3\ ;\quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1-\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{2}e_3.$

b) $a = a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3\,,\quad a_1^2+a_2^2+a_3^2=1.$

$$\begin{cases}(a\,|\,e_1+e_2) = |a|\cdot|e_1+e_2|\cos 45^\circ\\ (a\,|\,e_2+e_3) = |a|\cdot|e_2+e_3|\cos 45^\circ\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1+a_2 = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 1\\ a_2+a_3 = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a_1 = a_3\\ a_1+a_2 = 1\\ a_1 = t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1 = t\\ a_2 = 1-t\\ a_3 = t\end{cases} \Rightarrow a_1^2+a_2^2+a_3^2 = 3t^2-2t+1\ ;$$

$$|a| = 1 \Rightarrow 3t^2-2t = 0 \Leftrightarrow t=0 \vee t=\frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases}a_1 = e_2\\ a_2 = \frac{2}{3}e_1+\frac{1}{3}e_2+\frac{2}{3}e_3\end{cases}$$

Uppgift 3.6 (Sid. 5)

Lösning

$\pi: Ax_1+Bx_2+Cx_3 = D;\quad P_1:(1,0,1),\ P_2:(2,3,0),\ P_3:(1,2,3).$

$$\begin{cases}P_1\in\pi \Rightarrow A+C = D\\ P_2\in\pi \Rightarrow 2A+3B = D\\ P_3\in\pi \Rightarrow A+2B+3C = D\end{cases} \begin{matrix}-2 & -1\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases}A \quad +C = D\\ 3B-2C = -D\\ 2B+2C = 0\end{cases} 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}A \quad +C = D\\ 3B-2C = -D\\ 5B \quad = -D\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A \quad +C = D\\ 3B-2C = -D\\ B \quad = -D/5\end{cases} -3 \Leftrightarrow \begin{cases}A+C = D\\ -2C = -2D/5\\ B = -D/5\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}A = D-C\\ B = -D/5\\ C = D/5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A = 4D/5\\ B = -D/5\\ C = D/5\end{cases} \Rightarrow \frac{4D}{5}x_1-\frac{D}{5}x_2+\frac{D}{5}x_3 = D$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5}x_1-\frac{1}{5}x_2+\frac{1}{5}x_3 = 1 \Leftrightarrow \pi: 4x_1-x_2+x_3 = 5.$$

Uppgift 3.7 (Sid. 7)

Lösning

$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$; $v_1 = 2e_1 + e_2 + 2e_3$, $v_2 = 3e_1 + 4e_3$.

$$\left.\begin{cases} (a|v_1) = |a|\cdot|v_1|\cos\theta \Rightarrow 2a_1 + a_2 + 2a_3 = 3\,|a|\cos\theta \\ (a|v_2) = |a|\cdot|v_2|\cos\theta \Rightarrow 3a_1 + 4a_3 = 5\,|a|\cos\theta \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2a_1 + a_2 + 2a_3}{3a_1 + 4a_3} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5(2a_1 + a_2 + 2a_3) = 3(3a_1 + 4a_3)$$

$$\Leftrightarrow 10a_1 + 5a_2 + 10a_3 = 9a_1 + 12a_3 \Leftrightarrow \underline{a_1 + 5a_2 - 2a_3 = 0.}$$

Svar: Alla vektorer parallella med planet

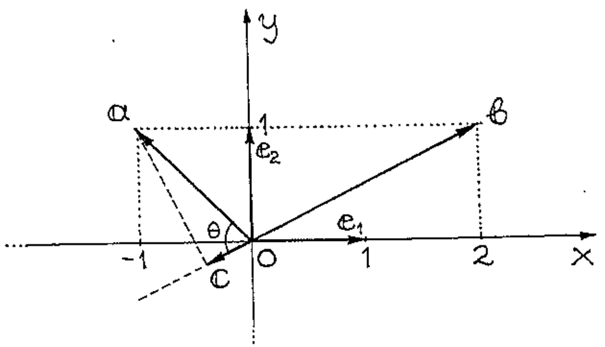
$$x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0.$$

4. Linjer och plan

Uppgift 4.1 (Sid. 6)

Lösning

a)



Den sökta projektionen kallas $c = |c|\hat{b}$, där $\hat{b}$ är en enhetsvektor (anti)parallell med b.

$\cos\theta = \frac{|c|}{|a|} \Leftrightarrow |c| = |a|\cos\theta$; $(a|b) = |a||b|\cos\theta = |b|\cdot|c|$;

$$\therefore |c| = \frac{(a|b)}{|b|} \Rightarrow c = \frac{(a|b)}{|b|}\cdot\hat{b} \overset{!}{=} \frac{(a|b)}{(b|b)}b = \frac{-1}{5}b = e\begin{bmatrix} -2/5 \\ -1/5 \end{bmatrix}.$$

Anm. $(b|b) = |b|\cdot|b|\cos 0 = |b|^2 = |b|\cdot|b|$ (Jfr $\overset{!}{=}$).

Mer allmänt gäller att u:s ortogonala projektion på b är $a_b = \frac{(a|b)}{(b|b)}b$. (Se Janfalk).

b) $a' = \frac{(a|b)}{(b|b)}b = \frac{1}{3}b \Rightarrow a'' = a - a' = a - \frac{1}{3}b = \frac{1}{3}(3a - b) =$

$$= \frac{1}{3}\left(e\cdot 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - e\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left(e\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} - e\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}e\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Resultat: a) $a_b = e\begin{bmatrix} -2/5 \\ -1/5 \end{bmatrix}$; b) $a' = e\cdot\begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$, $a'' = e\begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$.

Uppgift 4.2 (Sid. 6)

Lösning

$e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$, $e_3 \times e_1 = e_2$; $e_i \times e_j = -e_j \times e_i$

a) $(e_1 - e_2)\times(e_2 - e_3) = e_1 \times (e_2 - e_3) - e_2 \times (e_2 - e_3) = e_1 \times e_2 -$

$- e_1 \times e_3 - e_2 \times e_2 + e_2 \times e_3 = e_3 + e_2 - 0 + e_1 = \underline{e_1 + e_2 + e_3}$;

(1) $(e_1 - e_2 \,|\, e_1 + e_2 + e_3) = (e_1 \,|\, e_1 + e_2 + e_3) - (e_2 \,|\, e_1 + e_2 + e_3) =$

$=(e_1|e_1)+(e_1|e_2)+(e_1|e_3)-(e_2|e_1)-(e_2|e_2)-(e_2|e_3)=$

$=1+0+0-0-1-0=0 \Leftrightarrow \underline{e_1-e_2 \perp e_1+e_2+e_3.}$

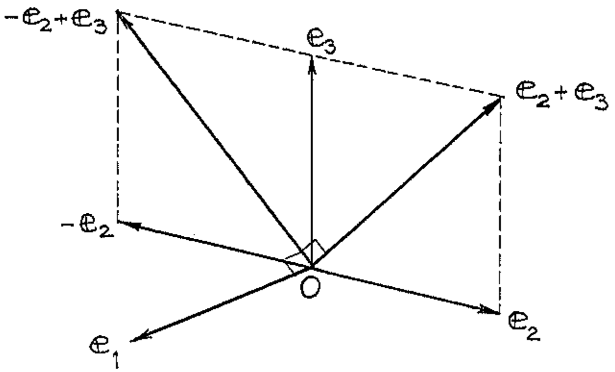
(2) $(e_2-e_3|e_1+e_2+e_3)=(e_2|e_1+e_2+e_3)-(e_3|e_1+e_2+e_3)=$

$=(e_2|e_1)+(e_2|e_2)+(e_2|e_3)-(e_3|e_1)-(e_3|e_2)-(e_3|e_3)=$

$=0+1+0-0-0-1=0 \Leftrightarrow \underline{e_2-e_3 \perp e_1+e_2+e_3.}$

(3) $T=\frac{1}{2}|(e_1-e_2)\times(e_2-e_3)|=\frac{1}{2}|e_1+e_2+e_3|=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ae.

b) $e_1\times(e_2+e_3)=e_1\times e_2+e_1\times e_3=\underline{e_3-e_2.}$



Uppgift 4.3 (Sid. 6)

Lösning

$u=e\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} \wedge v=e\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix} \Rightarrow (u|v)=2\cdot1+1\cdot2+2(-2)=0 \Leftrightarrow u\perp v.$

$(u|u)=|u|^2=2^2+1^2+2^2=9 \Leftrightarrow |u|=3 \Rightarrow \hat{u}=\frac{u}{|u|}=\frac{1}{3}u$;

$(v|v)=|v|^2=1^2+2^2+(-2)^2=9 \Leftrightarrow |v|=3 \Rightarrow \hat{v}=\frac{v}{|v|}=\frac{1}{3}v$;

$w=u\times v=(2e_1+e_2+2e_2)\times(e_1+2e_2-2e_3)=$

$=2e_1\times(e_1+2e_2-2e_3)+e_2\times(e_1+2e_2-2e_3)+2e_3\times(e_1+2e_2-2e_3)=$

$=2e_1\times e_1+4e_1\times e_2-4e_1\times e_3+e_2\times e_1+2e_2\times e_2-2e_2\times e_3+$

$+2e_3\times e_1+4e_3\times e_2-4e_3\times e_3=2\cdot0+4e_3+4e_2-e_3+0-$

$-2e_1+2e_2-4e_1-0=-6e_1+6e_2+3e_3 \Rightarrow (w|w)=81$

$\Rightarrow |w|=9 \Rightarrow \hat{w}=\frac{w}{|w|}=-\frac{2}{3}e_1+\frac{2}{3}e_2+\frac{1}{3}e_3.$

Resultat: $\hat{u}=e\begin{bmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{bmatrix}$, $\hat{v}=e\begin{bmatrix}1/3\\2/3\\-2/3\end{bmatrix}$, $\hat{w}=e\begin{bmatrix}-2/3\\2/3\\1/3\end{bmatrix}$.

$\mathcal{B}=(\hat{u},\hat{v},\hat{w})$ är en sådan bas.

Uppgift 4.4 (Sid. 6)

Lösning

a) Låt $P_0:(1,2,3)$ och $n=e\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}$. Om $P:(x,y,z)$ är löpande punkt i π (de sökta planet), så är $n\perp\overrightarrow{P_0P}$, dvs $(n|\overrightarrow{P_0P})=0$. Detta leder till $1\cdot(x-1)+0\cdot(y-2)-2(z-3)=0 \Leftrightarrow \underline{\pi: x-2z+5=0.}$

b) $\underline{P_0:(1,2,-1)}$; $\underline{v=e_1-e_2+2e_3}$, $\underline{v'=e_1+e_2}$; $\underline{P:(x,y,z).}$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_0}+sv+tv'$ (Se sid. 35 i kursboken).

$$e\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = e\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+se\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}+te\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=e\begin{bmatrix}1+s+t\\2-s+t\\-1+2s\end{bmatrix};\ s,t\in\mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_1=1+s+t & (-1)\\ x_2=2-s+t\\ x_3=-1+2s\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=1+s+t\\ x_2-x_1=1-2s & (1)\\ x_3=-1+2s\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=1+s+t\\ x_2=2-s-t\\ x_2-x_1+x_3=0\end{cases}.$$

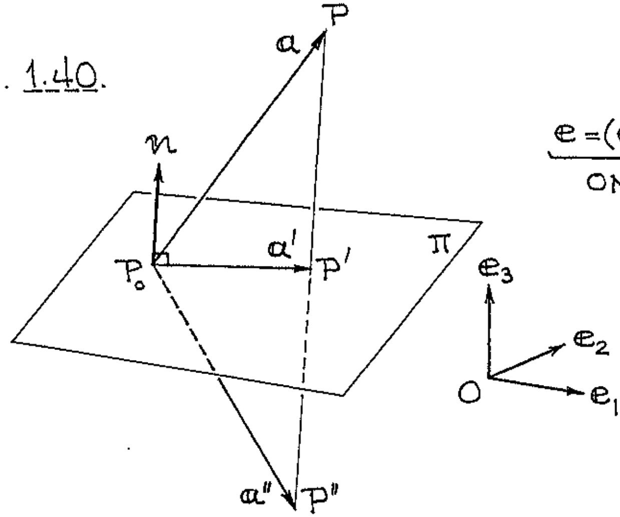
Det sökta planets ekvation är $\underline{x_1-x_2-x_3=0.}$

Uppgift 4.5 (Sid. 6)

Lösning

$\underline{P:(4,2,-2)}$; $\underline{\pi: x_1-x_3=2.}$ $\underline{P_0:(1,0,-1)\in\pi.}$

Jfr fig. 1.40.



$\underline{e=(e_1,e_2,e_3)}$
ON-bas

(1) $\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{P_0P}+\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{P_0P}+k\cdot n$, för ngt k.

$$\Leftrightarrow e\cdot\begin{bmatrix}a_1'\\a_2'\\a_3'\end{bmatrix}=e\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+e\begin{bmatrix}4-1\\2-0\\-2+1\end{bmatrix}+e\begin{bmatrix}k\\0\\-k\end{bmatrix}=e\begin{bmatrix}1+3+k\\2\\-1-1-k\end{bmatrix}=e\begin{bmatrix}4+k\\2\\-2-k\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a_1'=4+k\\ a_2'=2\\ a_3'=-2-k\end{cases} \Rightarrow P':(4+k,2,-2-k);\ (*)$$

$P'\in\pi \Rightarrow 4+k-(-2-k)=2 \Leftrightarrow 4+k+2+k=2 \Leftrightarrow k=-2 \overset{(*)}{\Rightarrow}$

$P':(2,2,0) \Rightarrow |\overrightarrow{PP'}|=\sqrt{(4-2)^2+(2-2)^2+(-2-0)^2}=\underline{2\sqrt{2}.}$

Jämför med anmärkningen i problemet 4.1.

$$\overrightarrow{P'P}=\frac{(a|n)}{(n|n)}n;\quad a=\overrightarrow{P_0P}=e\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix} \text{ och } n=e\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix};$$

$$\overrightarrow{P'P}=\frac{4}{2}n=2n \Rightarrow |\overrightarrow{P'P}|=2|n|=2\sqrt{2}.$$

(2) P' ligger mittemellan P och dess spegelbild i π P''.

$$\overrightarrow{OP'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP''}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP''}=2\overrightarrow{OP'} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP''}=2\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OP}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OP''}=2e\cdot\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}-e\begin{bmatrix}4\\2\\-2\end{bmatrix}=e\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix} \Rightarrow P'':(0,2,2).$$

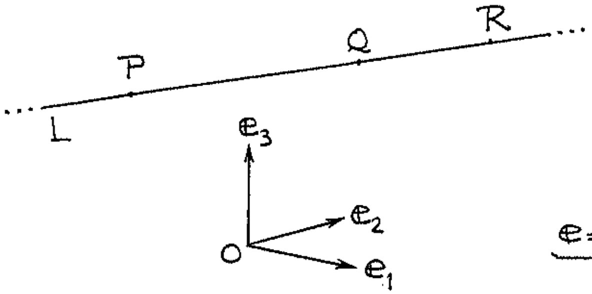
Resultat: P:s ortogonala projektion i planet är P': (2,2,0); avståndet från P till detta planet är $2\sqrt{2}$ le. P:s spegelbild i π är P'': (0,2,2).

Anm. Mina figurer är inte trogna.

Uppgift 4.6 (Sid. 6)

Lösning

a) P:(1,-1,0), Q:(3,1,-2); R:(x_1,x_2,x_3).



$$\mathbf{e}=\underbrace{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)}_{\text{ON-bas}}.$$

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \mathbf{e}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\mathbf{e}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+t\cdot\mathbf{e}\begin{bmatrix}3-1\\1+1\\-2-0\end{bmatrix},\ t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{e}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\mathbf{e}\begin{bmatrix}1+2t\\-1+2t\\-2t\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=1+2t\\x_2=-1+2t\\x_3=\ \ -2t\end{cases},\ -\infty<t<\infty. \quad (*)$$

För t=0 får vi P och för t=1 får vi Q. Alla punkter i segmentet [P,Q] har $0\leq t\leq 1$.

b) $$\begin{cases}1+2t=0\\-1+2t=-2\\-2t=1\end{cases} \Leftrightarrow t=-1/2 \Rightarrow \text{punkten } (0,-2,1) \text{ ligger i } L.$$

Denna punkt ligger "före" P, enligt (*) ovan.

$$\begin{cases}1+2t=2\\-1+2t=0\\-2t=-1\end{cases} \Leftrightarrow t=1/2 \Rightarrow (2,0,-1) \text{ ligger på } [P,Q].$$

$$\begin{cases}1+2t=5\\-1+2t=3\\-2t=-4\end{cases} \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow (5,3,-4) \text{ ligger på } L \text{ t.h. om } Q.$$

c) $VL=x_1+x_2+x_3=(*)=1+2t-1+2t+2t=6t=3 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ S:(2,0,-1) ligger på sträckan [P,Q], ty $0<\frac{1}{2}<1$.

5. Linjer och plan

Uppgift 5.1 (Sid. 6)

Lösning

Ett plan bestäms av tre icke-kollinjära punkter.

$P_1:(1,0,0)$, $P_2:(0,1,1)$, $P_3:(2,0,1)$, $P_4:(1,1,0)$.

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=\mathbf{e}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}-\mathbf{e}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\mathbf{e}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_1P_3}=\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP_1}=\mathbf{e}\cdot\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}-\mathbf{e}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\mathbf{e}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=$$

$$\overrightarrow{P_1P_4}=\overrightarrow{OP_4}-\overrightarrow{OP_1}=\mathbf{e}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-\mathbf{e}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\mathbf{e}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$=(-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)\times(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3)=(-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)\times\mathbf{e}_1+(-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)\times\mathbf{e}_3=$$

$$=\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_1=$$

$= e_1+2e_2-e_3 \not\parallel e_2 = \overline{P_1P_4}$.

Resultat: Nej, det finns inte.

Uppgift 5.2 (Sid.6)

Lösning

$$\pi:\begin{cases} x_1 = \phantom{2+{}} 2s-3t \\ x_2 = 2+s+4t \\ x_3 = -1-s+t \end{cases} (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \phantom{2+{}} 2s-3t \\ x_2 = 2+s+4t \\ x_2+x_3 = 1+5t \end{cases} (-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1-2x_2 = -4-11t \\ x_2 = 2+s+4t \\ x_2+x_3 = 1+5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11t = -4-x_1+2x_2 \\ \\ 5t = -1+x_2+x_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{11\cancel{t}}{5\cancel{t}} = \frac{-4-x_1+2x_2}{-1+x_2+x_3} \Leftrightarrow 11(-1+x_2+x_3) = 5(-4-x_1+2x_2)$$

$$\Leftrightarrow -11+11x_2+11x_3 = -20-5x_1+10x_2 \Leftrightarrow \underline{5x_1+x_2+11x_3 = -9}.$$

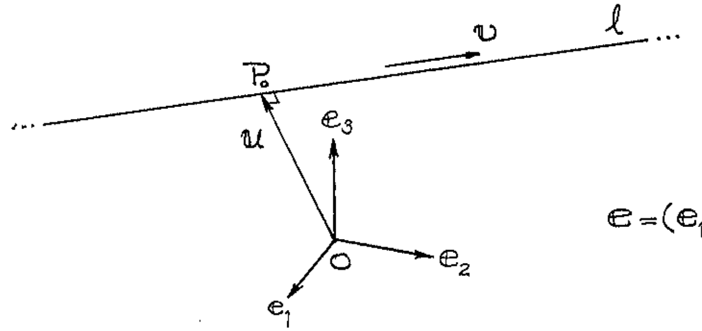
$$\ell:\begin{cases} x_1 = 2-2s \\ x_2 = -1+4s \\ x_3 = 3-s \end{cases} \Rightarrow VL = 5(2-2s)-1+4s+11(3-s) = 42-$$

$$-17s = -9 = HL \Leftrightarrow 17s = 51 \Leftrightarrow s = 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 11 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Resultat: Skärningspunkten mellan planet och linjen är $(-4,11,0)$.

Uppgift 5.3 (Sid. 7)

Lösning



$e = (e_1,e_2,e_3)$.

$v = e_1+e_2+e_3$ är en riktningsvektor till linjen ℓ.

Antag att P_0 ligger närmast origo. Låt $s = s_0$ svara mot P_0 och att $u = \overrightarrow{OP_0}$, dvs $\overrightarrow{OP_0} \perp \ell$;

$$u = e\cdot\begin{bmatrix} s_0 \\ 3+s_0 \\ s_0 \end{bmatrix} \perp v \Rightarrow (u|v) = 0 \Rightarrow s_0+3+s_0+s_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3s_0+3 = 0 \Leftrightarrow s = -1 \Rightarrow \overrightarrow{OP_0} = e\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{P_0:(-1,2,-1)}.$$

Svar: Punkten $(-1,2,-1)$.

Uppgift 5.4 (Sid. 7)

Lösning

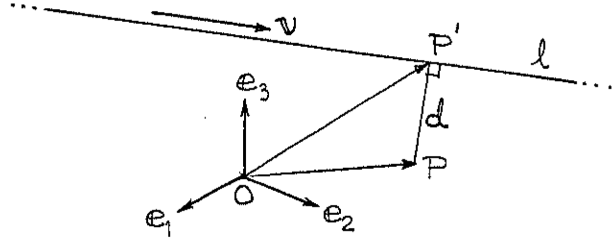
$\underline{\pi_1: x_1+2x_2+x_3 = -1}$; $\underline{\pi_2: x_1-x_3 = 1}$; $\underline{P:(1,-4,0)}$.

$$\pi_1\cap\pi_2:\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 = -1 \\ \\ x_1-x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3+1+2x_2+x_3 = -1 \\ \\ x_1 = x_3+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2+2x_3=-2 \\ x_1=1+x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1+x_3 \\ x_2=-1-x_3 \\ x_3=\quad t \end{cases} \Leftrightarrow L:\begin{cases} x_1=1+t \\ x_2=-1-t, \ t\in\mathbb{R}. \\ x_3=\quad t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{e}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{e}\begin{bmatrix} 1+t \\ -1-t \\ 0+t \end{bmatrix} = \mathbf{e}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\cdot\mathbf{e}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{e}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (*)$$

$\mathbf{v}$ är en <u>riktningsvektor</u> till linjen l ovan.



$d=|\overline{PP'}|$; P' är P:s ortogonala projektion på L.

Låt $t=t_0$ svara mot P'. Vi har att

$$\overline{PP'} = \overline{OP'} - \overline{OP} = \mathbf{e}\cdot\begin{bmatrix} 1+t_0 \\ -1-t_0 \\ t_0 \end{bmatrix} - \mathbf{e}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}\begin{bmatrix} t_0 \\ 3-t_0 \\ t_0 \end{bmatrix} = \mathbf{u}; \ |\mathbf{u}|=d.$$

$$\mathbf{u}\perp\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{u}|\mathbf{v})=0 \Leftrightarrow t_0-(3-t_0)+t_0=0 \Leftrightarrow t_0=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}.$$

<u>Svar</u>: P:s ortogonala projektion på L är $(2,-2,1)$; avståndet från P till planens skärningslinje är $\sqrt{6}$ l.e.

<u>Uppgift 5.5 (Sid. 7)</u>

<u>Lösning</u>: (Studera författarnas tips.)

$P:(-1,2,3)$, $Q:(3,4,-3)$; $R:(x_1,x_2,x_3)$; $\mathbf{e}=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{PR} = \overline{OR}-\overline{OP} = \mathbf{e}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \mathbf{e}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbf{e}\cdot\begin{bmatrix} x_1+1 \\ x_2-2 \\ x_3-3 \end{bmatrix} \\ \overline{QR} = \overline{OP}-\overline{OQ} = \mathbf{e}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \mathbf{e}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \mathbf{e}\cdot\begin{bmatrix} x_1-3 \\ x_2-4 \\ x_3+3 \end{bmatrix} \end{array}\right\} : |\overline{PR}|=|\overline{QR}|$$

$$\Rightarrow (x_1+1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2+(x_3+3)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x_1+1-4x_2+4-6x_3+\emptyset = -6x_1+\emptyset-8x+16+6x+9$$

$$\Leftrightarrow 8x_1+4x_2-12x_3=16+9-5 \Leftrightarrow 8x_1+4x_2-12x_3=20$$

$$\Leftrightarrow \underline{\pi: 2x_1+x_2-3x_3=5.}$$

6. <u>Linjer och plan</u>

<u>Uppgift 6.1 (Sid. 7)</u>

<u>Lösning</u>

$\underline{\mathbf{u}_1=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3}$, $\underline{\mathbf{u}_2=2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2}$, $\underline{\mathbf{u}_3=-2\mathbf{e}_1-4\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3}$.

$$\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2 = (\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3)\times(2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1\times(2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)+\mathbf{e}_3\times(2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)$$

$$= 2\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2 = 2\cdot 0-\mathbf{e}_3+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_1 =$$

$= \underline{e_1+2e_2-e_3};$

$u_1\times u_3 = (e_1+e_3)\times(-2e_1-4e_2+2e_3) = e_1\times(-2e_1-4e_2+2e_3)+$

$+e_3\times(-2e_1-4e_2+2e_3) = -2e_1\times e_1 - 4e_1\times e_2 +$

$+2e_1\times e_3 - 2e_3\times e_1 - 4e_3\times e_2 + 2e_3\times e_3 =$

$= -2\cdot 0 - 4e_3 - 2e_2 - 2e_2 + 4e_1 + 2\cdot 0 = \underline{4e_1-4e_2-4e_3}.$

$u_2\times u_3 = (2e_1-e_2)\times(-2e_1-4e_2+2e_3) = 2e_1\times(-2e_1-4e_2+2e_3)+$

$+(-e_2)\times(-2e_1-4e_2+2e_3) = -4e_1\times e_1 - 8e_1\times e_2 +$

$+4e_1\times e_3 + 2e_2\times e_1 + 4e_2\times e_2 - 2e_2\times e_3 =$

$= -4\cdot 0 - 8e_3 - 4e_2 - 2e_3 + 4\cdot 0 - 2e_1 = \underline{-2e_1-4e_2-10e_3}.$

$(u_1|u_2\times u_3) = (u_2|u_3\times u_1) = (u_3|u_1\times u_2) =$

$= (e_1+e_2|-2e_1-4e_2-10e_3) =$

$= -2(e_1|e_1) - 4(e_2|e_2) + 0(e_3|e_3) = -6.$

$S_1 = |u_1\times u_2| = |e_1+2e_2-e_3| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \underline{\sqrt{6}}.$

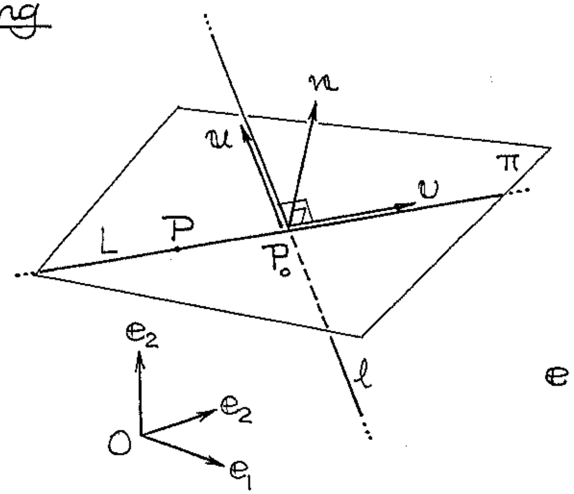
$S_2 = |u_1\times u_3| = |4e_1-4e_2-4e_3| = 4\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \underline{4\sqrt{3}}.$

$S_3 = |u_2\times u_3| = |-2e_1-4e_2-10e_1| = 2\sqrt{1+4+25} = \underline{2\sqrt{30}}.$

<u>Resultat</u>: Sidoytornas areor är $\sqrt{6}$ ae, $4\sqrt{3}$ ae resp. $2\sqrt{30}$ ae; parallellepipedens volym är 6 ve.

Uppgift 6.2 (Sid. 7)

<u>Lösning</u>



$e = (e_1, e_2, e_3)$

$\underline{\pi: x_1-2x_2+2x_3+1=0};\quad \underline{e\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = e\begin{bmatrix}-1\\4\\1\end{bmatrix} + t\,e\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix},\ t\in\mathbb{R}}.$

Med figurens beteckningar har vi bl.a.

$$u = e\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix},\quad n = e\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}.$$

L bestäms av P_0 och $v = u\times n$, så låt oss bestämma dessa två "objekt".

(1) $\begin{cases}x_1=-1-t\\ x_2=2-2t\\ x_3=1+2t\end{cases} \Rightarrow x_1-2x_2+2x_3+1 = -1-t-2(2-2t)+2(1+2t)+$

$+1 = -1-t-4+2t+2+4t+1 = 5t-2 = 0 \Leftrightarrow t = 2/5 \Rightarrow \overrightarrow{OP_0} =$

$$=e\cdot\begin{bmatrix}-1-2/5\\2-4/5\\1+4/5\end{bmatrix}=e\cdot\begin{bmatrix}-7/5\\6/5\\9/5\end{bmatrix}$$ (skärningspunktens "vektor").

$$v=u\times n=(-e_1+2e_2+e_3)\times(e_1-2e_2+2e_3)=$$
$$=-e_1\times(e_1-2e_2+2e_3)+2e_2\times(e_1-2e_2+2e_3)+e_3\times(e_1-2e_2+2e_3)=$$
$$=-e_1\times e_1+2e_1\times e_2-2e_1\times e_3+2e_2\times e_1-4e_2\times e_2+4e_2\times e_3+$$
$$+e_3\times e_1-2e_3\times e_2+2e_3\times e_3=0+2e_3+2e_2-2e_3-4\cdot 0-$$
$$+4e_1+e_2+2e_1+2\cdot 0=\underline{6e_1+3e_2}.$$

$$L:\ \overline{OP}=\overline{OP_0}+tv \Leftrightarrow L:\ e\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=e\cdot\begin{bmatrix}-7/5\\6/5\\9/5\end{bmatrix}+t\,e\cdot\begin{bmatrix}6\\3\\0\end{bmatrix},\ t\in\mathbb{R};$$

<u>Resultat</u>: $\begin{cases}x_1=-7/5+2s\\x_2=6/5+s\\x_3=9/5\end{cases}$, $-\infty<s<\infty$. $(s=3t)$.

<u>Uppgift 6.3 (Sid. 7)</u>

<u>Lösning</u>

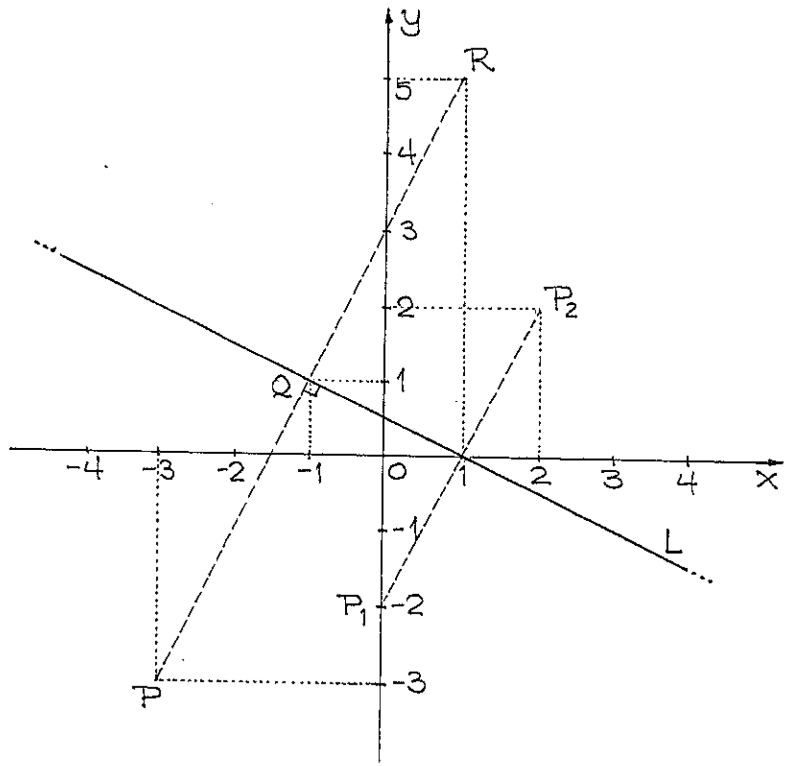
$P_1:(0,-2)$, $P_2:(2,2)$; $P:(-3,-3)$; $L:\ Ax+By=C$.

$v=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\overline{P_1P_2}=\begin{bmatrix}2-0\\2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ är en normal-vektor till L, dvs. $L:\ 2x+4y=C$; (*)

$\frac{1}{2}(\overline{OP_1}+\overline{OP_2})=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\Rightarrow Q:(1,0)\in L$;

insättning av Q:s koordinater i (*) ger C=2, dvs.

$$L:\ x+2y=1.$$



Ovanstående lösning är rent geometrisk. Jag löser problemet algebraiskt.

Normalen genom P har ekvationen

$$x=-3+t,\ y=-3+2t,\ t\in\mathbb{R}.$$

Antag att $t=\tau$ svarar mot Q; insättning $\Rightarrow$

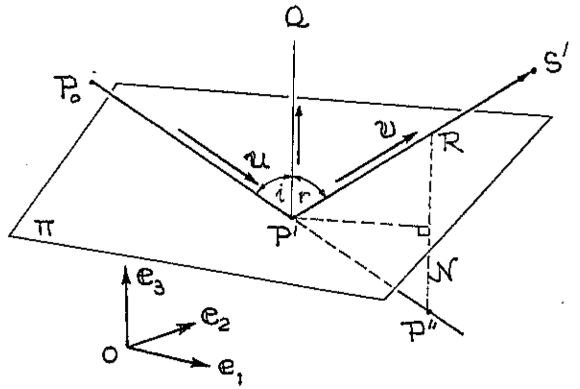
$x+2y=-3+\tau+2(-3+2\tau)=5\tau-9=1\Leftrightarrow 5\tau=10\Leftrightarrow\tau=2.$

$Q:(-1,1)$; spegelpunktens koordinater ges av $\tau=2\cdot 2=4$; insättning ger $R:(1,5)$; se figur.

Svar: $L:(x,y)=(1,0)+t(-1,\frac{1}{2})$; motsvarande parameterfri form $x+2y=1$. P:s ortogonala projektion i L är $Q:(-1,1)$; dess spegelbild i L är $R:(1,5)$.

Uppgift 6.4 (Sid. 7)

Lösning



$e=(e_1,e_2,e_3)$

$P_0:(4,3,-3)$; $u=-3e_1-2e_2+4e_3$; $\pi: 2x_1+x_2-x_3=2$.

Från fysiken (optiken) vet vi att infallsvinkeln $=i=r=$ reflexionsvinkeln och att linjerna P_0P', $P'Q$ och $P'S'$ ligger i samma plan.

$P'Q$ är en normal till planet π.

Jag börjar med att bestämma "träffpunkten" P'. Strålen ifrån P_0 parallell med vektorn u ges i vektorform av $\overline{OP}=\overline{OP_0}+tu$, dvs

$$e\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=e\begin{bmatrix}4\\3\\-3\end{bmatrix}+te\begin{bmatrix}-3\\-2\\4\end{bmatrix}=e\begin{bmatrix}4-3t\\3-2t\\-3+4t\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=4-3t\\x_2=3-2t\\x_3=-3+4t\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow 2x_1+x_2-x_3=2(4-3t)+3-2t-(-3+4t)=14-12t=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=1 \Rightarrow P':(1,1,1).$

För $t=2$ får jag $P'':(-2,-1,5)$; P'' speglas nu i π.

"Strålen" från P'' vinkelrät mot π har ekvationen

$$N:\begin{cases}x_1=-2+2t\\x_2=-1+t\\x_3=5-t\end{cases},\quad t\geq 0.$$

$2x_1+x_2-x_3=2(-2+2t)-1+t-(5-t)=6t-10=2\Leftrightarrow t=2\Rightarrow$

$\Rightarrow$ spegelbilden ges för $t=4$, dvs $R:(6,3,1)$.

Den reflekterade strålen bestäms av P' och R:

$$e\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=e\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+t\cdot e\begin{bmatrix}6-1\\3-1\\1-1\end{bmatrix}=e\begin{bmatrix}1+5t\\1+2t\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=1+5t\\x_2=1+2t\\x_3=1\end{cases},\ t\geq 0.$$

Anm En "stråle" har en ändpunkt.

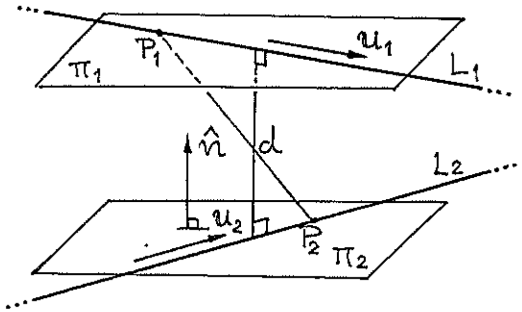
Övning 6.5 (Sid. 8)

Lösning

$$L_1:\begin{cases} x_1=-2-4s \\ x_2=\ \ 4+s \\ x_3=\ \ -s \end{cases},\ s\in\mathbb{R};\qquad L_2:\begin{cases} x_1=-1+2t \\ x_2=\ \ t \\ x_3=1+2t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

$$L_1\cap L_2:\begin{cases} -2-4s=-1+2t \\ 4+s=t \\ -s=1+2t \quad -1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -2-3s=-2 \\ 4+s=t \\ -s=1+2t \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} s=0 \\ t=4 \\ -s=1+2t \end{cases};$$

systemet är självmotsägande; linjerna är skeva.



$\pi_1 \parallel \pi_2$

$u_1=-4e_1+e_2-e_3$ är en riktningsvektor till L_1 och

$u_2=2e_1+e_2+2e_3$ är en riktningsvektor till L_2.

$n=u_1\times u_2=3e_1+6e_2-6e_3$ är vinkelrät mot såväl L_1 som L_2. En normerad normalvektor är $\hat{n}=\frac{n}{|n|}=\frac{1}{3}(e_1+2e_2-2e_3)$.

$P_1:(-2,4,0)\in L_1$ (fås för $s=0$); $P_2:(-1,0,1)\in L_2$ ($t=0$);

För att bestämma d använder jag $\overrightarrow{P_1P_2}$ och projektionssatsen: $\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=e_1-4e_2+e_3\Rightarrow$

$$\Rightarrow d=|(\hat{n}\,|\,\overrightarrow{P_1P_2})|=\frac{1}{3}|(e_1+2e_2-2e_3\,|\,e_1-4e_2+e_3)|=3\text{ le}.$$

$$\pi_2:(\hat{n}\,|\,\overrightarrow{P_2P})=\frac{1}{3}(e_1+2e_2-2e_3\,|\,(x_1+1)e_1+2x_2e_2-2(x_3-1)e_3)=0$$

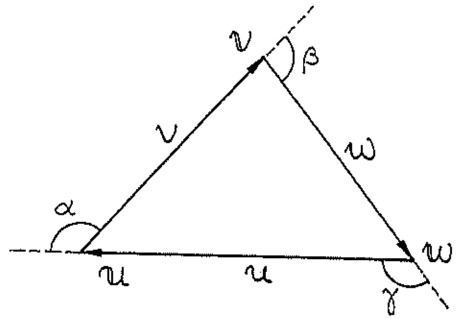
$$\Leftrightarrow x_1+2x_2-2x_3+3=0.$$

Uppgift 6.6 (Sid. 8)

Lösning

$$u+v+w=0\Rightarrow\begin{cases} u\times(u+v+w)=u\times v+u\times w=0 \\ v\times(u+v+w)=v\times u+v\times w=0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} u\times v=-u\times w=w\times u \\ v\times w=-v\times u=u\times v \end{cases}\Leftrightarrow \underline{u\times v=v\times w=w\times u}.$$



De 3 vektorerna bildar sidor i en triangel..

$$u\times v=v\times w=w\times u\Leftrightarrow uv\sin\alpha=vw\sin\beta=uw\sin\gamma$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin\alpha}{w}=\frac{\sin\beta}{u}=\frac{\sin\gamma}{v}\ \text{(sinussatsen)}.$$

7. Matriser

Uppgift 7.1 (Sid. 8)

Lösning

$$\mathbb{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&-1&1\end{bmatrix},\quad \mathbb{B}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \mathbb{C}=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}.$$

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2+0&0+2+0\\1-1+0&0-1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\0&-1\end{bmatrix}.$$

$$\mathbb{B}\cdot\mathbb{A}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0&2+0&3+0\\1+1&2-1&3+1\\0+0&0+0&0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&4\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{C}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+2-3\\2-1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}.$$

$$\mathbb{C}^t\cdot\mathbb{B}=\begin{bmatrix}2&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+1+0&0+1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\end{bmatrix}.$$

$$\mathbb{B}^t\mathbb{A}^t=(\mathbb{A}\mathbb{B})^t=\begin{bmatrix}3&2\\0&-1\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}3&0\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\\3&1\end{bmatrix}.$$

Uppgift 7.2 (Sid. 8)

Lösning

$$\mathbb{A}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix},\quad \mathbb{B}=\begin{bmatrix}1&-2\\3&4\end{bmatrix}.$$

---

(1) $\mathbb{A}+\mathbb{B}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1&1-2\\-1+3&1+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\2&5\end{bmatrix}.$

(2) $\mathbb{A}-\mathbb{B}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1&-2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-1&1+2\\-1-3&1-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3\\-4&-3\end{bmatrix}.$

(3) $(\mathbb{A}+\mathbb{B})(\mathbb{A}-\mathbb{B})=\begin{bmatrix}2&-1\\2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&3\\-4&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+4&6+3\\0-20&6-15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&9\\-20&-9\end{bmatrix}.$

(4) $(\mathbb{A}-\mathbb{B})(\mathbb{A}+\mathbb{B})=\begin{bmatrix}0&3\\-4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+6&0+15\\-8-6&4-15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&15\\-14&-11\end{bmatrix}.$

(5) $\mathbb{A}^2-\mathbb{B}^2=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\-2&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-5&-10\\15&10\end{bmatrix}=$

$$=\begin{bmatrix}5&12\\-17&-10\end{bmatrix}.$$

Övning 7.3 (Sid. 9)

Lösning

$$x_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\-x_1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-x_2\\0\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\x_3\\-2x_3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}x_1-x_2+0\\-x_2+0+x_3\\0+x_2-2x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\Leftrightarrow x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3=\mathbb{A}\mathbb{X}.$$

Ovanstående kolonnrepresentation är lämplig när man låter operera med linjära operatorer (se längre fram i kapitlet "Linjära avbildningar".

Uppgift 7.4 (Sid. 8)

Lösning

$$\mathbb{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&-2\end{bmatrix},\quad \mathbb{B}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \mathbb{C}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&-1\\1&5&2\end{bmatrix}.$$

Endast kvadratiska matriser kan ha invers.

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\mathbb{Y}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix};$$

Jag "eliminerar" de obekanta...

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\-1&0&1&0&1&0\\0&1&-2&0&0&1\end{array}\right]1\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&-1&1&1&1&0\\0&1&-2&0&0&1\end{array}\right]1\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&-1&1&1&1&0\\0&0&-1&1&1&1\end{array}\right]1\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&-1&0&2&2&1\\0&0&-1&1&1&1\end{array}\right]-1\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&-2&-1\\0&-1&0&2&2&1\\0&0&-1&1&1&1\end{array}\right]\begin{matrix}\\-1\\-1\end{matrix}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&-2&-1\\0&1&0&-2&-2&-1\\0&0&1&-1&-1&-1\end{array}\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-2&-1\\-2&-2&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}.$$

$$\mathbb{C}\mathbb{X}=\mathbb{Y}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&-1&-1&0&1&0\\1&5&2&0&0&1\end{array}\right]-1\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-2&-1&-1&1&0\\0&4&2&-1&0&1\end{array}\right]2\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-2&-1&-1&1&0\\0&0&0&-3&2&1\end{array}\right]\leftarrow \text{inkonsistent.}$$

Matrisen $\mathbb{C}$ saknar invers.

Uppgift 7.5 (Sid. 8)

Lösning

(1) $\mathbb{A}\mathbb{X}=\mathbb{F}$ och $\mathbb{A}\mathbb{X}'=\mathbb{G}$ kan lösas tillsammans:

$$\mathbb{A}[\mathbb{X}\ \mathbb{X}']=[\mathbb{F}\ \mathbb{G}]\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_1'\\x_2&x_2'\\x_3&x_3'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\3&1\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x_1&x_1'\\x_2&x_2'\\x_3&x_3'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-2&-1\\-2&-2&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&-3\\-5&-3\\-4&-2\end{bmatrix}\Leftrightarrow\mathbb{X}=\begin{bmatrix}-4\\-5\\-4\end{bmatrix}\wedge\mathbb{X}'=\begin{bmatrix}-3\\-3\\-2\end{bmatrix}.$$

(2) $$\mathbb{C}\mathbb{X}=\mathbb{F}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\1&-1&-1&0\\1&5&2&3\end{array}\right]-1\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&-2&-1&-1\\0&4&2&2\end{array}\right]2\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&-2&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=1\\2x_2+x_3=1\\x_2=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=1-t\\x_2=\ \ t\\x_3=1-2t\end{cases}\Leftrightarrow\mathbb{X}=\begin{bmatrix}1-t\\t\\1-2t\end{bmatrix}.$$

(3) $$\mathbb{C}\mathbb{X}=\mathbb{G}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\1&-1&-1&1\\1&5&2&1\end{array}\right]1\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&-2&-1&1\\0&4&2&3\end{array}\right]2\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&-2&-1&1\\0&0&0&3\end{array}\right];$$

systemet är inkonsistens (saknar lösning).

8. Linjärkombinationer

Uppgift 8.1 (Sid. 9)

Lösning: Vektorerna ges här i radform!

a) $u_1=(1,-7,2),\ u_2=(0,5,-2),\ u_3=(1,1,1)$

$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3 u_3=\lambda_1(1,-7,2)+\lambda_2(0,5,-2)+\lambda_3(1,1,1)=$

$=(\lambda_1,-7\lambda_1,2\lambda_1)+(0,5\lambda_2,-2\lambda_2)+(\lambda_3,\lambda_3,\lambda_3)=(0,0,0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\lambda_1+\lambda_3,-7\lambda_1+5\lambda_2+\lambda_3,2\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3)=(0,0,0)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0 \quad (-1)\\ -7\lambda_1+5\lambda_2+\lambda_3=0\\ 2\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\ -8\lambda_1+5\lambda_2=0\\ \lambda_1-2\lambda_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow u_1, u_2$ och u_3 är <u>lineärt oberoende</u>.

b) Fyra följder i $\mathbb{R}^3$ är <u>lineärt beroende</u>.

c) $v_1=(1,0,2,-1),\ v_2=(1,2,-1,0),\ v_3=(1,1,0,-1),\ v_4=(-1,-2,2,1)$

$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3+\lambda_4 v_4=\lambda_1(1,0,2,-1)+\lambda_2(1,2,-1,0)+$

$+\lambda_3(1,1,0,-1)+\lambda_4(-1,-2,2,1)=(\lambda_1,0,2\lambda_1,-\lambda_1)+(\lambda_2,2\lambda_2,-\lambda_2,0)+$

$+(\lambda_3,\lambda_3,0,-\lambda_3)+(-\lambda_4,-2\lambda_4,2\lambda_4,\lambda_4)=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_3,$

$2\lambda_2+\lambda_3-2\lambda_4,\ 2\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_4,\ -\lambda_1-\lambda_3+\lambda_4)=(0,0,0,0)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4=0 \quad (-2)\ (1)\\ 2\lambda_2+\lambda_3-2\lambda_4=0\\ 2\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_4=0\\ -\lambda_1-\lambda_3+\lambda_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4=0\\ 2\lambda_2+\lambda_3-2\lambda_4=0\\ -3\lambda_2-2\lambda_3+4\lambda_4=0\\ \lambda_2=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4=0\\ \lambda_3-2\lambda_4=0 \quad (2)\\ -2\lambda_3+4\lambda_4=0\\ \lambda_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3-\lambda_4=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=2\lambda_4\\ \lambda_4=t\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=-\lambda_3+\lambda_4\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=2t\\ \lambda_4=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=-t\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=2t\\ \lambda_4=t\end{cases}\overset{(t=1)}{\Longrightarrow}\underbrace{-v_1+0\cdot v_2+2v_3+v_4=0}_{\text{lineärt beroende}}.$$

d) $f_1(x)=x^2+x,\ f_2(x)=x^3-x,\ f_3(x)=x+1,\ f_4(x)=x^2.$

$\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\lambda_3 f_3(x)+\lambda_4 f_4(x)=\lambda_1(x^2+x)+\lambda_2(x^3-x)+$

$+\lambda_3(x+1)+\lambda_4 x^2=\lambda_2 x^3+(\lambda_1+\lambda_4)x^2+(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)x+\lambda_3=$

$$=0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\cdot 1\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_2=0\\ \lambda_1+\lambda_4=0\\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=0\\ \lambda_4=0\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ och $f_4(x)$ är <u>lineärt oberoende</u>.

Uppgift 8.2 (Sid. 9)

Lösning

$u=(2,-1,-1),\ v=(2,1,1),\ w=(x_1,x_2,x_3).$

$e=(1,0,1),\ f=(1,-1,2),\ g=(0,1,1).$

(1) $\lambda e+\mu f+\nu g=\lambda(1,0,1)+\mu(1,-1,2)+\nu(0,1,1)=(\lambda,0,\lambda)+$

$+(\mu,-\mu,2\mu)+(0,\nu,\nu)=(\lambda+\mu,-\mu+\nu,\lambda+2\mu+\nu)=u\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu = 2 \\ -\mu+\nu=-1 \\ \lambda+2\mu+\nu=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu = 2 \\ -\mu+\nu=-1 \\ \lambda+3\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu = 2 \\ -\mu+\nu=-1 \\ 2\mu = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu = 2 \\ \mu=-1 \\ \nu=\mu-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=3 \\ \mu=-1 \\ \nu=-2 \end{cases} \Rightarrow \underline{3e-f-2g=u.}$$

(2) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{3e-f+0\cdot g=v.}$$

(3) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & x_2 \\ 1 & 2 & 1 & x_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & x_2 \\ 1 & 3 & 0 & -x_2+x_3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & x_1+x_2-x_3 \\ 0 & -1 & 1 & x_2 \\ 1 & 3 & 0 & -x_2+x_3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -(x_1+x_2-x_3)/2 \\ 0 & -1 & 1 & x_2 \\ 1 & 3 & 0 & -x_2+x_3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -(x_1+x_2-x_3)/2 \\ 0 & 0 & 1 & -(x_1-x_2-x_3)/2 \\ 1 & 3 & 0 & -x_2+x_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -(x_1+x_2-x_3)/2 \\ 0 & 0 & 1 & -(x_1-x_2-x_3)/2 \\ 1 & 0 & 0 & (3x_1+x_2-x_3)/2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (3x_1+x_2-x_3)/2 \\ 0 & 1 & 0 & -(x_1+x_2-x_3)/2 \\ 0 & 0 & 1 & -(x_1-x_2-x_3)/2 \end{array}\right] \Rightarrow \underline{w=\tfrac{1}{2}(3x_1+x_2-x_3)e-}$$

$\underline{-\tfrac{1}{2}(x_1+x_2-x_3)f-\tfrac{1}{2}(x_1-x_2-x_3)g.}$ ((1), (2) specialfall.)

Uppgift 8.3 (Sid. 9)

Lösning

$e=(1,1,1)$, $f=(1,-1,2)$, $g=(1,-3,3)$; $u=(2,4,1)$, $v=(1,-1,1)$

(1) $\lambda e+\mu f+\nu g=\lambda(1,1,1)+\mu(1,-1,2)+\nu(1,-3,3)=(2,4,1)\Rightarrow$

$$\Rightarrow (\lambda,\lambda,\lambda)+(\mu,-\mu,2\mu)+(\nu,-3\nu,3\nu)=$$

$$=(\lambda+\mu+\nu,\ \lambda-\mu-3\nu,\ \lambda+2\mu+3\nu)=(2,4,1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu+\nu=2 \\ \lambda-\mu-3\nu=4 \\ \lambda+2\mu+3\nu=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu+\nu=2 \\ -2\mu-4\nu=2 \\ \mu+2\nu=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu+\nu=2 \\ \mu+2\nu=-1 \\ \nu=t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda-\nu=3 \\ \mu=-1-2\nu \\ \nu=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=3+t \\ \mu=-1-2t \\ \nu=t \end{cases} \Rightarrow (t=0) \Rightarrow \underline{u=3e-f.}$$

(2) $$\begin{cases} \lambda+\mu+\nu=1 \\ \lambda-\mu-3\nu=-1 \\ \lambda+2\mu+3\nu=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu+\nu=1 \\ -2\mu-4\nu=-2 \\ \mu+2\nu=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu+\nu=1 \\ 0=-2 \\ \mu+2\nu=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ <u>v kan inte skrivas som en linjär kombination av e, f och g.</u>

(3) $$\begin{cases} \lambda+\mu+\nu=x_1 \\ \lambda-\mu-3\nu=x_2 \\ \lambda+2\mu+3\nu=x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu+\nu=x_1 \\ -2\mu-4\nu=-x_1+x_2 \\ \mu+2\nu=-x_1+x_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu+\nu=x_1 \\ 0=-3x_1+x_2+2x_3 \\ \mu+2\nu=-x_1+x_3 \end{cases} \Rightarrow \underline{3x_1-x_2-2x_3=0} \text{ (ett plan).}$$

Uppgift 8.4 (Sid. 9)

Lösning

a) $S_1=[(1,1,0),(1,0,1)]$, $S_2=[(1,2,-1),(2,1,1)]$; $S_1 \overset{?}{=} S_2$.

(1) $\lambda(1,1,0)+\mu(1,0,1)=(\lambda,\lambda,0)+(\mu,0,\mu)=(\lambda+\mu,\lambda,\mu)=(1,2,-1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda+\mu=1\\ \lambda \quad =2\\ \mu \quad =-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=2\\ \mu=-1\end{cases} \Rightarrow 2(1,1,0)-(1,0,1)=(1,2,-1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{(1,2,-1)\in S_1.}$

(2) $\begin{cases}\lambda+\mu=2\\ \lambda \quad =1\\ \mu \quad =1\end{cases} \Leftrightarrow (1,1,0)+(1,0,1)=(2,1,1) \Rightarrow \underline{(2,1,1)\in S_1.}$

Resultat: Likhet gäller; $S_1=S_2$ (enl. ovan).

b) $S_1=[(1,1,0),(1,0,1)]$; $S_2=\{(x_1,x_2,x_3): x_1-x_2-x_3=0\}$.

$$x_1-x_2-x_3=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=x_2+x_3\\ x_2=s\\ x_3=t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=s+t\\ x_2=s\\ x_3=\quad t\end{cases}, \quad s,t\in\mathbb{R};$$

$(x_1,x_2,x_3)=s(1,1,0)+t(1,0,1) \Rightarrow S_2=S_1$. (se ovan).

$[(1,1,0),(1,0,1)] \overset{!}{=} \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3: x_1-x_2-x_3=0\}$!

c) $S=\{(x_1,x_2,x_3): x_1-x_2-x_3=0\}=[(1,1,0),(1,0,1)]$,

enligt b) ovan.

$(2,3,0)\notin S$ (den ligger inte i planet).

$(0,1,-2)\notin S$; $(2,1,1)\in S$; $(1,1,1)\notin S$; Likhet gäller ej.

Svar: a) Ja; b) Ja; c) Nej.

Uppgift 8.5 (Sid. 10)

Lösning

$\lambda v_1+\mu v_2+\nu v_3=\lambda(1,1,1,1)+\mu(1,2,3,4)+\nu(1,1,-1,-1)=$

$=(\lambda,\lambda,\lambda,\lambda)+(\mu,2\mu,3\mu,4\mu)+(\nu,\nu,-\nu,-\nu)=(x_1,x_2,x_3,x_4)$

$\Leftrightarrow (\lambda+\mu+\nu,\ \lambda+2\mu+\nu,\ \lambda+3\mu-\nu,\ \lambda+4\mu-\nu)=(x_1,x_2,x_3,x_4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda+\mu+\nu=x_1\\ \lambda+2\mu+\nu=x_2\\ \lambda+3\mu-\nu=x_3 \quad (-1)\\ \lambda+4\mu-\nu=x_4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda+\mu+\nu=x_1 \quad (-1)\\ \lambda+2\mu+\nu=x_2\\ \lambda+3\mu-\nu=x_3\\ \quad\mu=-x_3+x_4\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda+\mu+\nu=x_1\\ \quad\mu=-x_1+x_2 \quad (-1)\\ \lambda+3\mu-\nu=x_3\\ \quad\mu=-x_3+x_4\end{cases} \Rightarrow \underline{x_1-x_2-x_3+x_4=0.}$$

W: $x_1-x_2-x_3+x_4=0 \Leftrightarrow x_1=x_2+x_3-x_4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_1=x_2+x_3-x_4\\ x_2=r\\ x_3=s\\ x_4=t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=r+s+t\\ x_2=r\\ x_3=\quad s\\ x_4=\quad -t\end{cases}, \quad r,s,t\in\mathbb{R};$$

$\Rightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4)=r(1,1,0,0)+s(1,0,1,0)+t(1,0,0,-1)$;

$\Rightarrow \dim W=3 \Rightarrow \underline{[v_1,v_2,v_3]=W.}$

Uppgift 8.6 (Sid. 9)

Lösning

(1) Ett element i $\mathcal{P}_2$ är av typen $a+bx+cx^2$, s.a. $[\mathcal{M}_1]=[1,x,x^2]=\mathcal{P}_2$.

(2) $\lambda(1+x)+\mu(x+x^2)+\nu(1+x^2)=\lambda+\nu+(\lambda+\mu)x+(\mu+\nu)x^2=$

$$=a+bx+cx^2 \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda \quad +\nu = a \quad (-1)\\ \lambda+\mu \quad = b\\ \quad \mu+\nu = c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda \quad +\nu = a\\ \mu-\nu = -a+b \quad (-1)\\ \mu+\nu = c\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda \quad +\nu = a\\ \mu-\nu = -a+b\\ 2\nu = a-b+c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\lambda = 2a-2\nu = a+2b-2c\\ 2\mu = -2a+2b+2\nu = -a+b+3c\\ 2\nu = a-b+c\end{cases}$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}(a+2b-2c)(1+x)+\tfrac{1}{2}(-a+b+3c)(x+x^2)+\tfrac{1}{2}(a-b+c)(x^2+1) \equiv$$

$$\equiv a+bx+cx^2 \Rightarrow \underline{[1+x,\ x+x^2,\ x^2+1]=[\mathcal{M}_2]=\mathcal{P}_2.}$$

(3) $\lambda(1+x)^2+\mu(1-x)^2+\nu(1+x^2)=\lambda(1+2x+x^2)+\mu(1-2x+x^2)+$

$+\nu(x^2+1)=\lambda+\mu+\nu+(2\lambda-2\mu)x+(\lambda+\mu+\nu)x^2=a+bx+cx^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda+\mu+\nu = a \quad (-1)\\ 2\lambda-2\mu = b\\ \lambda+\mu+\nu = c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda+\mu+\nu = a\\ 2(\lambda-\mu) = b\\ c-a = 0\end{cases} \Rightarrow \mathcal{M}_3 \text{ spänner}$$

upp en delmängd till $\mathcal{P}_2$, de polynom i $\mathcal{P}_2$ s.a. $a=c$, där a är den konstanta termen och c är koefficienten på x^2; $[\mathcal{M}_3]\neq\mathcal{P}_2$ således.

9 Baser

Uppgift 9.1 (Sid. 9)

Lösning

$\underline{u_1=(2,0,2)},\ \underline{u_2=(1,1,1)},\ \underline{u_3=(0,1,-1)};\ \underline{u=(3,-1,5).}$

(1) $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,u_3\}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$ om de är lineärt oberoende.

$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0 \Leftrightarrow (2\lambda_1+\lambda_2,\ \lambda_2+\lambda_3,\ 2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\lambda_1+\lambda_2 \quad = 0\\ \lambda_2+\lambda_3 = 0\\ 2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=0\end{cases} \Rightarrow \mathcal{B} \text{ bas för } \mathbb{R}^3.$$

(2) $$\mu_1u_1+\mu_2u_2+\mu_3u_3=u \Leftrightarrow \begin{cases}2\mu_1+\mu_2 \quad = 3\\ \mu_2+\mu_3=-1\\ 2\mu_1+\mu_2-\mu_3=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mu_1=1\\ \mu_2=1\\ \mu_3=-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{(3,-1,5)=1\cdot(2,0,2)+1\cdot(1,1,1)-2\cdot(0,1,-1)=(1,1,-2)_{\mathcal{B}}.}$$

Uppgift 9.2 (Sid. 9)

Lösning

(1) $\underline{u=(1,0,2,1),\ v=(1,1,0,1),\ w=(2,1,2,1).}$

$\lambda u+\mu v+\nu w=(\lambda+\mu+2\nu,\ \mu+\nu,\ 2\lambda+2\nu,\ \lambda+\mu+\nu)=0$

$\Leftrightarrow \lambda+\mu+2\nu=0 \wedge \mu+\nu=0 \wedge \lambda+\mu+\nu=0 \Leftrightarrow \lambda=\mu=$

$= v = 0 \Rightarrow \{u, v, w\}$ *l. oberoende* $\Rightarrow \underline{\dim V = 3}.$

(2) $\underline{u_1=(1,-1,2,1),\ u_2=(1,-1,3,2),\ u_3=(-1,1,0,1),\ u_4=(1,-1,5,4).}$

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3 u_3+\lambda_4 u_4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4=0 \\ -\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4=0 \quad (1) \\ 2\lambda_1+3\lambda_2 \quad +5\lambda_4=0 \\ \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3+4\lambda_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4=0 \\ 2\lambda_1+3\lambda_2 \quad +5\lambda_4=0 \\ \lambda_2+2\lambda_3+3\lambda_4=0 \quad (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4=0 \\ 2\lambda_1+2\lambda_2-2\lambda_3+2\lambda_4=0 \\ \lambda_2+2\lambda_3+3\lambda_4=0 \quad (-2)\ (-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \quad -3\lambda_3-2\lambda_4=0 \quad (-2) \\ 2\lambda_1 \quad -6\lambda_3-4\lambda_4=0 \\ \lambda_2+2\lambda_3+3\lambda_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \quad -3\lambda_3-2\lambda_4=0 \\ \\ \lambda_2+2\lambda_3+3\lambda_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1=3\lambda_3+2\lambda_4 \\ \lambda_2=-2\lambda_3-3\lambda_4 \\ \lambda_3=s \\ \lambda_4=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1=3s+2t \\ \lambda_2=-2s-3t \\ \lambda_3=s \\ \lambda_3=t \end{cases} \Rightarrow (s=1,\ t=-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1\cdot u_1+1\cdot u_2+1 u_3-1\cdot u_4=0 \Leftrightarrow u_4=u_1+u_2+u_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [u_1, u_2, u_3, u_4]=[u_1, u_2, u_3]=W.$$

$\mu_1 u_1+\mu_2 u_2+\mu_3 u_3=(0,0,0,0)$ ger denna gång:

$$\begin{cases} \mu_1+\mu_2-\mu_3=0 \quad (1) \quad (-1) \\ -\mu_1-\mu_2+\mu_3=0 \\ 2\mu_1+3\mu_2 \quad =0 \\ \mu_1+2\mu_2+\mu_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1+\mu_2-\mu_3=0 \\ 2\mu_1+3\mu_2 \quad =0 \\ \mu_2+2\mu_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1=-3t \\ \mu_2=2t \\ \mu_3=-t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t=-1) \Rightarrow 3u_1-2u_2+u_3=0 \Leftrightarrow u_3=2u_2-3u_1\ ;$$

$$u_1 \nparallel u \Rightarrow W=[u_1,u_2] \Rightarrow \underline{\dim W=2.}$$

(3) $\underline{U=\{x\in\mathbb{R}^4:\ x_1+x_3-2x_4=0\}.}$

$$x_1=-x_3+2x_4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-x_3+2x_4 \\ x_2=s \\ x_3=t \\ x_4=u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1= \quad -t+2u \\ x_2=s \\ x_3=t \\ x_4=u \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=s(1,0,0,0)+t(-1,0,1,0)+u(2,0,0,1),\ s,t,u\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow U=[(1,0,0,0),(-1,0,1,0),(2,0,0,1)] \Rightarrow \underline{\dim U=3.}$$

Uppgift 9.3 (Sid. 10)

Lösning

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ \\ x_1+x_2-x_3 \quad =0 \quad (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_3+x_4=0 \\ \\ x_1+x_2-x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4=-2x_3 \\ \\ x_3=x_1+x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=s \\ x_2= \quad t \\ x_3=s+t \\ x_4=-2s-2t \end{cases} \Rightarrow \underline{(x_1,x_2,x_3,x_4)=s(1,0,1,-2)+t(0,1,1,-2).}$$

En bas för lösningsrummet är till exempel

$$\mathcal{B}=((1,0,1,-2),(0,1,1,-2)).$$

$u=(1,2,1,2)$ och $v=(1,1,1,0)$ testas som ... komplement till en bas för $\mathbb{R}^4$.

$a\cdot(1,0,1,-2)+b(0,1,1,-2)=(a,b,a+b,-2a-2b)=(1,2,1,2) \Rightarrow$

$\Rightarrow u\notin[(1,0,1,-2),(0,1,1,-2)]$; u antas till basvektor.

P.s.s. visas att även v duger som basvektor.

$u_1=(1,0,1,-2),\ u_2=(0,1,1,-2),\ u_3=(1,2,1,2),\ u_4=(1,1,1,0).$

$\mathcal{B}=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ är en bas för $\mathbb{R}^4$.

$a\cdot(1,0,1,-2)+b(0,1,1,-2)+c(1,2,1,2)+d(1,1,1,0)=(1,0,0,0)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a \quad +c+d=1 \quad (-1)\\ \quad b+2c+d=0\\ a+b+c+d=0\\ -2a-2b+c \quad =0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a \quad +c+d=1\\ \quad b+2c+d=0\\ \quad b \quad =-1\\ -2a-2b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a \quad +c+d=1\\ \quad 2c+d=1 \quad (-1)\\ b=-1\\ 2a-c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\ d=1-2c\\ b=-1\\ a=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-1\\ c=2\\ d=-3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1,0,0,0)=2u_1-u_2+2u_3-3u_4=(2,-1,2,-3)_{\mathcal{B}}.$$

Uppgift 9.4 (Sid. 10)

Lösning

$a(x-1)+b(x^2-1)+c(2x^2+x-3)=-a-b-3c+(a+c)x+(b+2c)x^2;$

$a(x-1)+b(x^2-1)+c(2x^2+x-3)=0=0\cdot1+0\cdot x+0\cdot x^2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+3c=0\\ a \quad +c=0\\ \quad b+2c=0 \quad (-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a \quad +c=0\\ a \quad +c=0\\ \quad b+2c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=t\\ b=2t\\ c=-t\end{cases},\ (t\in\mathbb{R});$$

$t=1\Rightarrow 2x^2+x-3=2\cdot(x^2-1)+1\cdot(x-1)\Rightarrow\mathcal{B}=(x-1,x^2-1).$

$\lambda(x-1)+\mu(x^2-1)=x-x^2\Leftrightarrow-\lambda-\mu+\lambda x+\mu x^2=1\cdot x-1\cdot x^2$

$\Leftrightarrow\lambda=1\wedge\mu=-1\Rightarrow p(x)=x-x^2=(1,-1)_{\mathcal{B}}.$

Uppgift 9.5 (Sid. 10)

Lösning

$U=[(1,1,1),(1,0,-1)],\quad V=[(2,1,1),(1,0,1)].$

U och V motsvarar plan i $\mathbb{R}^3$, det åskådliga rummet; deras skärning blir alltså endimensionell, en rät linje helt enkelt.

$n_1=(1,1,1)\times(1,0,-1)=(-1,2,-1)\perp U;\quad P_0:(0,0,0);$

$n_2=(2,1,1)\times(1,0,1)=(1,-1,-1)\perp V;\quad P_0:(0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{l}U:\ x_1-2x_2+x_3=0\\ V:\ x_1-x_2-x_3=0\end{array}\right\}\Rightarrow U\cap V:\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0 \quad (-1)\\ x_1-x_2-x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0\\ \quad x_2-2x_3=0 \quad (2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-3x_3=0\\ x_2-2x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=3t\\ x_2=2t\\ x_3=t\end{cases}$$

$\Rightarrow(x_1,x_2,x_3)=t(3,2,1)\Rightarrow U\cap V=[(3,2,1)].$

Uppgift 9.6 (Sid. 10)

Lösning

(1) $U_1+U_2=\{u+v: u\in U_1\wedge v\in U_2\}=$ summan av U_1 & U_2.

(1) $\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2$ är ett underrum till V, det minsta underrummet som omfattar såväl $\mathcal{U}_1$ som $\mathcal{U}_2$. Att visa att $\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2$ är ett delrum till V är ganska enkelt så jag visar att $\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2=[\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2]$.
Låt $u\in\mathcal{U}_1$. $u+0\in\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2$, ty $0\in\mathcal{U}_2$ (delrum). Det innebär att $\mathcal{U}_1$ omfattas av $\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2$; p.s.s. visas att $\mathcal{U}_2$ omfattas av $\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2$.
Då $\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2$ omfattar såväl $\mathcal{U}_1$ som $\mathcal{U}_2$ så måste det omfatta alla lineära kombinationer av $\mathcal{U}_1$ och $\mathcal{U}_2$, dvs $[\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2]\subseteq\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2$.(*)
Å andra sidan om $w\in\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2$ så är $w=u+v=$ $=1\cdot u+1\cdot v$, med $u\in\mathcal{U}_1$ och $v\in\mathcal{U}_2$. Det innebär att w är en lineär kombination av element i $\mathcal{U}_1\cup\mathcal{U}_2$, så den ligger i $[\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2]$; $\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2\subseteq$ $\subseteq[\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2]$, vilket kombinerat med (*) ovan ger

$$\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2=[\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2].$$

(2) Om $\{u_i\}$ genererar $\mathcal{U}_1$, dvs om $[u_1,\dots,u_n]=\mathcal{U}_1$ och $\{v_j\}$ genererar $\mathcal{U}_2$, dvs om $[v_1,\dots,v_m]=\mathcal{U}_2$, så genererar $\{u_i\}\cup\{v_j\}$ hela $\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2$, vilket visas ganska lätt: Om $w\in\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2$, existerar $u\in\mathcal{U}_1$ och $v\in\mathcal{U}_2$ s.a. $w=u+v=a_1u_1+\dots+a_nu_n+b_1v_1+\dots+b_mv_m$ $\Rightarrow\{u_i,v_j\}$ genererar $\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2$.

(3) Man säger att $\mathcal{U}$ är den direkta summan av delrummen $\mathcal{U}_1$ och $\mathcal{U}_2$ (skrivs $\mathcal{U}=\mathcal{U}_1\oplus\mathcal{U}_2$) om $\mathcal{U}=\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2$ och $\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2=\{0\}$. I detta fall blir summan $w=u+v$, med $u\in\mathcal{U}_1$ och $v\in\mathcal{U}_2$, entydigt bestämd. Beviset är som följer.
Antag att $\mathcal{U}=\mathcal{U}_1\oplus\mathcal{U}_2$. Låt $u\in\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i) } u=u+0,\ \text{ty } u\in\mathcal{U}_1 \text{ och } 0\in\mathcal{U}_2\\ \text{(ii) } u=0+u,\ \text{ty } 0\in\mathcal{U}_1 \text{ och } u\in\mathcal{U}_2\end{array}\right\}\Rightarrow u=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2=\{0\}$, ty summan är entydig.
Antag å andra sidan att $\mathcal{U}=\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2$ och att $\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2=\{0\}$. Låt $w\in\mathcal{U}$. Eftersom $\mathcal{U}=\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2$ så existerar $u\in\mathcal{U}_1$ och $v\in\mathcal{U}_2$ s.a. $w=u+v$.
Jag ska demonstrera att summan är entydig.
Antag att $w=u'+v'$, med $u'\in\mathcal{U}_1$ och $v'\in\mathcal{U}_2$, är

en annan representation av w.

$w = u+v = u'+v' \Leftrightarrow U_1 \ni u-u' = v'-v \in U_2 \Rightarrow u-u' = 0 =$

$= v'-v \Leftrightarrow u = u'$ och $v = v'$. Summan är alltså entydig, varav följer att $U = U_1 \oplus U_2$.

(4) Begreppet "direkt summa av delrum" kan nu utvidgas till att gälla för $n>2$. Om $U_1, U_2, \dots, U_n$ är delrum i vektorrummet V, s.a.

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n \quad (n>2)$$

så är $\dim U_i \leq \dim V$. Det är klart att

$$\dim U_1 + \dim U_2 + \cdots + \dim U_n = \dim V$$

s.a. $\dim U_1 + \dim U_2 \leq \dim V$.

Rum för kommentarer...

10. Euklidiska rum

Uppgift 10.1 (Sid. 10)

Lösning

$g_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $g_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $g_3 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 = x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot 2g_1 + \lambda_2 \cdot 2g_2 + \lambda_3 \cdot 2g_3 = 2\cdot(x_1, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, \lambda_2, -\lambda_2, -\lambda_2) + (\lambda_3, -\lambda_3, -\lambda_3, \lambda_3) =$$

$$= (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3, \lambda_1-\lambda_2-\lambda_3, \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3) = 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 2x_1 \quad -1 \\ \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3 = 2x_2 \\ \lambda_1-\lambda_2-\lambda_3 = 2x_3 \\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3 = 2x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 2x_1 \\ \qquad -2\lambda_3 = -2x_1+2x_2 \quad 1 \\ -2\lambda_2-2\lambda_3 = -2x_1+2x_3 \\ -2\lambda_2 \qquad = -2x_1+2x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 2x_1 \\ \qquad -2\lambda_3 = -2x_1+2x_2 \\ -2(\lambda_2+\lambda_3) = -2(x_1-x_3) \\ -2(\lambda_2+\lambda_3) = -4x_1+2x_2+2x_4 \end{cases} \Leftrightarrow -2(x_1-x_3) = -2(2x_1-$$

$$-x_2-x_4) \Leftrightarrow x_1-x_3 = 2x_1-x_2-x_4 \Leftrightarrow \underline{x_1-x_2+x_3-x_4 = 0.}$$

$g_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ kan vara komplementet.

$$u = (u|g_1)g_1 + (u|g_2)g_2 + (u|g_3)g_3 + (u|g_4)g_4 =$$

$$= \frac{3}{2}g_1 + (-\frac{1}{2})g_2 + \frac{3}{2}g_3 + (-\frac{1}{2})g_4 = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})_g.$$

Uppgift 10.2 (Sid. 10)

Lösning

$g_1=(1,1,-1,-1)$, $g_2=(1,2,-1,-2)$, $g_3=(1,3,-1,-3)$. $(W=?)$

$\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\lambda_3 g_3=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3,-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3,$
$-\lambda_1-2\lambda_2-3\lambda_3)=(x_1,x_2,x_3,x_4)=x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=x_1\\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=x_2\\ -\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=x_3\\ -\lambda_1-2\lambda_2-3\lambda_3=x_4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=-x_3\\ x_2=-x_4\end{cases} \Leftrightarrow x_1+x_2=-x_3-x_4$$

$\Leftrightarrow$ $W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$.

$g_4=(1,1,1,1)$ kompletterar $\{g_1,g_2,g_3\}$ till en bas.

$u_1=g_1$ (i Gram-Schmidts ON-förfarande)

$$u_2=g_2-\frac{(g_2|g_1)}{(g_1|g_1)}g_1=g_2-\frac{6}{4}g_1=g_2-\frac{3}{2}g_1=\frac{1}{2}(2g_2-3g_1)=$$
$$=\frac{1}{2}(-1,1,1,-1)=\frac{1}{2}v_2\ ;\quad v_2=(-1,1,1,-1);$$

$$u_3=g_3-\frac{(g_3|g_1)}{(g_1|g_1)}g_1-\frac{(g_3|g_2)}{(g_2|g_2)}g_2=g_3-\frac{8}{4}g_1-\frac{14}{10}g_2=$$
$$=g_3-2g_1-\frac{7}{5}g_2=\frac{1}{5}(-10g_1-7g_2+5g_3)=\frac{1}{5}(-12,-9,12,9)=$$
$$=\frac{3}{5}(-4,-3,4,3)=\frac{3}{5}v_3\ ;\quad v_3=(-4,-3,4,3);$$

$\mathcal{B}=((1,1,-1,-1),(-1,1,1,-1),(-4,-3,4,3),(1,1,1,1))$ är en bas av ortogonala vektorer; de tre första av dessa vektorer ligger i W.

(1) $[u]_e=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\dots+\lambda_n e_n$, λ_i entydiga.

$(u|e_i)=(\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\dots+\lambda_n e_n|e_i)=$
$=\lambda_1(e_1|e_i)+\lambda_2(e_2|e_i)+\dots+\lambda_n(e_n|e_i)=$
$=\lambda_i$, $i=1,2,\dots,n$.

$$\therefore\ u=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i=\sum_{i=1}^{n}(u|e_i)e_i$$

(2) $[u]_f=\mu_1 f_1+\mu_2 f_2+\dots+\mu_n f \Rightarrow \mu_i=(u|f_i) \Rightarrow$

$$\Rightarrow u=\sum_{i=1}^{n}\mu_i f_i=\sum_{i=1}^{n}(u|f_i)f_i.$$

Ur (1) och (2) fås $u=\sum_{i=1}^{n}(u|e_i)e_i=\sum_{i=1}^{n}(u|f_i)f_i$.

11. Minsta kvadratmetoden

Uppgift 11.1 (Sid. 11)

Lösning

$W=[(1,1,0,0),(2,0,-1,1)]$, $v=(1,1,2,0)$.

$u_1=(1,1,0,0)$, $u_2=(2,0,-1,1)$.

$$w_1=u_1 \Rightarrow \hat{e}_1=\frac{w_1}{|w_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0);$$

$$w_2=u_2-\frac{(u_2|u_1)}{(u_1|u_1)}u_1=u_2-u_1=(1,-1,-1,1)\Rightarrow \hat{e}_2=\frac{w_2}{|w_2|}=$$
$$=\frac{1}{2}w_2=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1);$$

v:s projektion på W är just $v_1=(v|\hat{e}_1)\hat{e}_1+$

den fås $e_3 = \frac{u_3}{|u_3|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1,0)$.

(3) Låt $u_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ vara den fjärde vektorn som kompletterar de andra tre till en ortogonalbas i E^4.

$$\begin{aligned}(u_1|u_4) = 0 &\Leftrightarrow 3x_1+2x_2+x_3=0\\ (u_2|u_4)=0 &\Leftrightarrow x_4=0\\ (u_3|u_4)=0 &\Leftrightarrow x_1+2x_2-x_3=0 \quad (-1)\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_3=0\\ x_1+2x_2-x_3=0\\ x_4=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-x_3\\ x_2=x_3\\ x_4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=t\\ x_2=-t\\ x_3=-t\\ x_4=0\end{cases} \Leftrightarrow u_4 = t(1,-1,-1,0),\ t\in\mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{e}_4 = \frac{u_4}{|u_4|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1,0).$$

Resultat: En ON-bas för W är $\mathcal{B}_1 = (\hat{e}_1, \hat{e}_2)$; $\mathcal{B}_2 = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ är en ON-bas för W+V och $\mathcal{B}_3 = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4)$ en ON-bas för E^4, där

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(3,2,1,0), \quad \hat{e}_2 = (0,0,0,1)$$
$$\hat{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1,0), \quad \hat{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1,0).$$

Uppgift 10.6 (Sid. 11)

$e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ ON-baser.

$u_1 = (1,0,-1,0)$, $u_2 = (0,1,0,2)$; $(u_1|u_2) = 0$.

$$w_W = \frac{(w|u_1)}{(u_1|u_1)}u_1 + \frac{(w|u_2)}{(u_2|u_2)}u_2 = \frac{3}{5}u_2 \Rightarrow w - \frac{3}{5}u_2 = $$
$$= \frac{1}{5}(5w - 3u_2) = \frac{1}{5}(5,2,5,-1).$$

Svar: $w = (1, \frac{2}{5}, 1, -\frac{1}{5}) + (0, \frac{3}{5}, 0, \frac{6}{5})$.

Uppgift 10.5 (Sid. 10)

Lösning

$W = \{x \in E^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0\}$.

$V = \{x \in E^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

(1) $$W: \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \quad (-1)\\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0\\ x_1 - 3x_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3\\ x_2 = 2x_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3s\\ x_2 = 2s\\ x_3 = s\\ x_4 = t\end{cases} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) =$$

$= s(3,2,1,0) + t(0,0,0,1) \Leftrightarrow W = [(3,2,1,0), (0,0,0,1)]$.

$u_1 = (3,2,1,0)$, $u_2 = (0,0,0,1)$, som uppspänner W, är ortogonala.

$$\hat{e}_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3,2,1,0); \quad \hat{e}_2 = \frac{u_2}{|u_2|} = (0,0,0,1).$$

(2) $u_3 = (1,2,-1,0)$ är parallell med V och vinkelrät mot såväl $\hat{e}_1$ och $\hat{e}_2$. Normeras även

Motsvarande ON-bas är $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, där

$$e_1 = \tfrac{1}{2}(1,1,-1,-1),\ e_2 = \tfrac{1}{2}(-1,1,-1,1),\ e_3 = \tfrac{1}{\sqrt{50}}(-4,3,-4,3),\ e_4 = \tfrac{1}{2}(1,1,1,1).$$

Komposanten längs e_4 är $(e_4|u)e_4 = e_4$, så komposanten "parallell" med W är $u_W = u - e_4 = \tfrac{1}{2}(-3,1,1,1)$ och vi är färdiga.

Anm. $W^{\perp} = \{t(1,1,1,1) : t \in \mathbb{R}\}$.

Uppgift 10.3 (Sid. 11)

Lösning

$$W: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = s+t \\ x_2 = s \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = s(1,1,0,0) + t(1,0,0,-1)\ ;\ s,t \in \mathbb{R}.$$

$$W = [(1,1,0,0), (1,0,0,-1)].$$

$\mathcal{B} = ((1,0,0,0), (0,0,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,-1))$ är en bas för $\mathbb{R}^4$ (efter komplettering).

$u_1 = (1,1,0,0)$, $u_2 = (1,0,0,-1)$, $u_3 = (1,0,0,0)$, $u_4 = (0,0,1,0)$

$v_1 = u_1$;

$$v_2 = u_2 - \frac{(u_2|u_1)}{(u_1|u_1)}u_1 = u_2 - \tfrac{1}{2}u_1 = \tfrac{1}{2}(1,-1,0,-2) = \tfrac{1}{2}v_2'\ ;$$

$$v_3 = u_3 - \frac{(u_3|v_1)}{(v_1|v_1)}v_1 - \frac{(u_3|v_2')}{(v_2'|v_2')}v_2' = u_3 - \tfrac{1}{2}u_1 - \tfrac{1}{6}v_2' = \tfrac{1}{6}(6u_3 - 3u_1 - v_2') = \tfrac{1}{6}(-3u_1 - v_2' + 6u_3) = \tfrac{1}{6}((-3,-3,0,0) - (1,-1,0,-2) + (6,0,0,0)) = \tfrac{1}{6}(2,-2,0,2) = \tfrac{1}{3}(1,-1,0,1) = \tfrac{1}{3}v_3'\ ;$$

$v_4 = u_4$ är ortogonal mot de övriga 3, så det återstår att normera dem.

$$e_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0),\quad e_2 = \frac{v_2'}{|v_2'|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,0,-2),$$

$$e_3 = \frac{v_3'}{|v_3'|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,0,1),\quad e_4 = (0,0,1,0).$$

Resultat: En sådan bas är till exempel $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, där e_i är som ovan ; $e_1, e_2 \in W$.

Uppgift 10.4 (Sid. 10)

Lösning

$$u = (1,2,1,-1),\ v = (1,0,1,0);\ w = (1,1,1,1)$$

Låt $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ vara en vektor i W.

$$\begin{cases} (u|x) = 0 \Rightarrow x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ (v|x) = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_3 = -s \\ 2x_2 = x_4 \\ x_4 = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = t \\ x_3 = -s \\ x_4 = 2t \end{cases},\ s,t \in \mathbb{R};$$

$$x = s(1,0,-1,0) + t(0,1,0,2) \Rightarrow W = [(1,0,-1,0), (0,1,0,2)].$$

$$+(v|\hat{e}_2)\hat{e}_2 = 1\cdot(1,1,0,0)+(-\tfrac{1}{2})(1,-1,-1,1) = \tfrac{1}{2}((2,2,0,0)-$$
$$-(1,-1,-1,1)) = \tfrac{1}{2}(1,3,1,-1) = (\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}) \Rightarrow v_2 = v-$$
$$-v_1 = (1,1,2,0)-(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}) \in W^{\perp}.$$

Resultat: $v = (\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2})$. Den vektor y som efterfrågas är v_1, förstås, s.a.
$|y-v| = |v_1-v| = |v-v_1| = |v_2| = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \underline{\sqrt{3}.}$

Uppgift 11.2 (Sid. 11)

Lösning

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{X} = \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{A}^t(\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}) = \mathbb{A}^t\cdot\mathbb{C} \Leftrightarrow (\mathbb{A}^t\mathbb{A})\mathbb{X} = \mathbb{A}^t\mathbb{C} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \cancel{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \cancel{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbb{X} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Resultat: $\mathbb{A}\mathbb{X} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbb{A}\mathbb{X}-\mathbb{C}| = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \sqrt{3}.$

Uppgift 11.3 (Sid. 11)

Lösning

$$kx_i+m = y_i \Rightarrow \begin{cases} 2k+m=-2 \\ 3k+m=0 \\ 4k+m=-1 \\ 5k+m=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 54 & 14 \\ 14 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 4 & -14 \\ -14 & 54 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 16 \\ -66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ -3{,}3 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{y = 0{,}8x-3{,}3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}8 \\ -3{,}3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}7 \\ -0{,}9 \\ -0{,}1 \\ 0{,}7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ -0{,}9 \\ 0{,}9 \\ -0{,}3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{2}^{5}(kx_i+m-y_i)^2 = 0{,}3^2+0{,}9^2+0{,}9^2+0{,}3^2 = \underline{1{,}8.}$$

Uppgift 11.4 (Sid. 11)

Lösning

$\underline{W = [(1,1,1,1),\ (2,3,4,5)];\quad u = (-2,0,-1,1).}$

$\underline{v_1 = (1,1,1,1),\ v_2 = (2,3,4,5).}$

forts

$w_1 = v_1 = (1,1,1,1) \Rightarrow \hat{e}_1 = \frac{w_1}{|w_1|} = \frac{1}{2}(1,1,1,1);$

$w_2 = v_2 - \frac{(v_2|v_1)}{(v_1|v_1)}v_1 = v_2 - \frac{7}{2}v_1 = \frac{1}{2}(-3,-1,1,3) \Longrightarrow$

$\Rightarrow \hat{e}_2 = \frac{w_2}{|w_2|} = \frac{1}{\sqrt{20}}(-3,-1,1,3);$

$W = [v_1, v_2] = [\hat{e}_1, \hat{e}_2]$, med $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ som ovan.

$u_1 = (u|\hat{e}_1)\hat{e}_1 + (u|\hat{e}_2)\hat{e}_2 = -\frac{1}{2}(1,1,1,1) + \frac{2}{5}(-3,-1,1,3) =$

$= \frac{1}{10}(-17,-9,-1,7);$

$u_2 = u - u_1 = \frac{1}{10}(-3,+9,-9,3) = \frac{3}{10}(-1,3,-3,1) \Rightarrow |u_2|^2 =$

$= \left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot (1^2+3^2+3^2+1^2) = \frac{9}{100} \cdot 20 = \frac{9}{5}.$

Svar: $u = (-1{,}7; -0{,}9; -0{,}1; 0{,}7) + (-0{,}3; 0{,}9; -0{,}9; 0{,}3);$

$|u_2|^2 = 1{,}8$. F.ö. se ovan.

Uppgift 11.5 (Sid. 11)

Lösning

$W = \{x \in E^4 : x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ x_2 - x_4 = 0\};\ a = (1,-1,-1,-1).$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \quad = 0 \\ \quad x_2 \quad - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 + x_4 \\ x_2 = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = s + t \\ x_2 = \quad t \\ x_3 = -s \\ x_4 = \quad t \end{cases} \Longrightarrow$$

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = s(1,0,-1,0) + t(1,1,0,1),\ s,t \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow W = [(1,0,-1,0), (1,1,0,1)].$

$u_1 = (1,0,-1,0),\ u_2 = (1,1,0,1);$

Jag behöver a:s ortogonala projektion u på W.

$v_1 = u_1 \Rightarrow \hat{e}_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0).$

$v_2 = u_2 - \frac{(u_2|u_1)}{(u_1|u_1)}u_1 = u_2 - \frac{1}{2}u_1 = \frac{1}{2}(2u_2 - u_1) = \frac{1}{2}(1,2,1,2)$

$\Rightarrow \hat{e}_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,1,2);$

$W = [u_1, u_2] = [\hat{e}_1, \hat{e}_2].$

$u = (a|\hat{e}_1)\hat{e}_1 + (a|\hat{e}_2)\hat{e}_2 = \sqrt{2}\,\hat{e}_1 + \frac{-4}{\sqrt{10}}\hat{e}_2 = (1,0,-1,0) -$

$-\frac{2}{5}(1,2,1,2) = \frac{1}{5}(3,-4,-7,-4) \Rightarrow a - u = (1,-1,-1,-1) -$

$-\frac{1}{5}(3,-4,-7,-4) = \frac{1}{5}(2,-1,2,-1) \Rightarrow |a-u| = \frac{1}{5}\sqrt{10} = \sqrt{0{,}4}.$

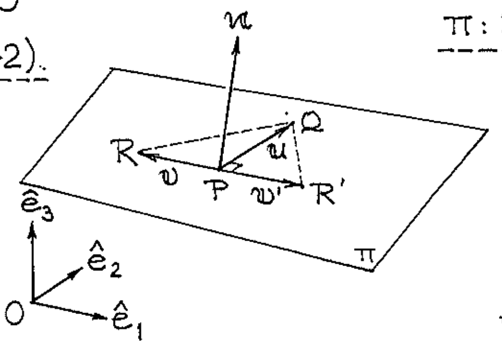
Svar: $u = (0{,}6; -0{,}8; -1{,}4; -0{,}8);\ |a-u| = \sqrt{0{,}4}.$

12. Blandat

Uppgift 12.1 (Sid. 12)

Lösning

$n = (2,-1,-2).$



$\pi: 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3.$

$$\begin{cases} P: (1,-1,0) \\ Q: (3,1,1) \end{cases}$$

$\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3).$

$u = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (3,1,1)_e - (1,-1,0)_e = (2,2,1)_e$;

$v = n \times u = (2,-1,-2)_e \times (2,2,1)_e = (3,-6,6)_e = \overrightarrow{PR}$;

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = (1,-1,0)_e + (3,-6,6)_e = (4,-7,6)_e$;

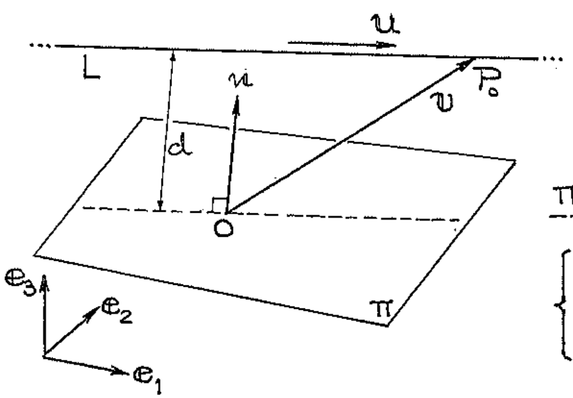
$\overrightarrow{OR'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR'} = (1,-1,0)_e - (3,-6,6)_e = (-2,5,-6)_e$;

Svar: $(4,-7,6)$ eller $(-2,5,-6)$.

Uppgift 12.2 (Sid. 12)

Lösning

Linjens riktningsvektor $u = [1,2,a]^t$ ska vara vinkelrät mot planets normalvektor $n = [1,-1,1]^t$, dvs. $(u|n) = 1-2+a = a-1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$.



$\pi: x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

$$\begin{cases} P_0: (1,0,0) \\ n = (1,-1,1) \end{cases}$$

$v_n = \frac{(v|n)}{(n|n)} n = \frac{1}{3}(1,-1,1) \Rightarrow d = |v_n| = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$v = \overrightarrow{OP_0}$ och $v_n = v$:s projektion på n (se figur).

Uppgift 12.3 (Sid. 12)

Lösning

$u_1 = (2,1,2,1)$, $u_2 = (0,1,2,1)$, $u_3 = (0,0,2,1)$.

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \lambda_1(2,1,2,1) + \lambda_2(0,1,2,1) + \lambda_3(0,0,2,1) =$

$= (2\lambda_1, \lambda_1, 2\lambda_1, \lambda_1) + (0, \lambda_2, 2\lambda_2, \lambda_2) + (0,0,2\lambda_3,\lambda_3) =$

$= (2\lambda_1, \lambda_1+\lambda_2, 2\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3, \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) = (x_1,x_2,x_3,x_4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 = x_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = x_2 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = x_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow x_3 = 2x_4;$$

$\mathcal{U} = [u_1, u_2, u_3] = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_3 - 2x_4 = 0\}$.

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V}: \begin{cases} x_3 = 2x_4 \\ x_2 = -2x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = -2t \\ x_3 = 2t \\ x_4 = t \end{cases} \Rightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4) =$$

$= s(1,0,0,0) + t(0,-2,2,1) \Rightarrow \mathcal{B} = ((1,0,0,0),(0,-2,2,1))$.

Uppgift 12.4 (Sid. 12)

Lösning

$\mathcal{U} = [(1,1,1,-1), (-1,1,3,-1), (1,0,-1,0)] \subseteq \mathbb{R}^4$; $u = (1,2,3,2)$.

Det gäller att finna den ortogonala projektionen av vektorn $u = (1,2,3,2)$ på $\mathcal{U}$, så jag

Jag börjar med att bestämma en ON-bas för $\mathcal{U}$; $\dim\mathcal{U}=2$ så jag väljer $u_1=(1,1,1,-1)$ och $u_2=(-1,1,3,-1)$. Gram-Schmidt ger:

$v_1=u_1$ och $v_2=u_2-\frac{(u_2|u_1)}{(u_1|u_1)}u_1=(-2,0,2,0)$ och

$\hat{e}_1=\frac{v_1}{|v_1|}=\frac{1}{2}(1,1,1,-1)$ och $\hat{e}_2=\frac{v_2}{|v_2|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0)$;

$u_{\mathcal{U}}=(u|\hat{e}_1)\hat{e}_1+(u|\hat{e}_2)\hat{e}_2=v_1+\frac{1}{2}v_2=(1,1,1,-1)+$

$+(-1,0,1,0)=(0,1,2,-1)=u$:s projektion i $\mathcal{U}$.

Svar: Vektorn $(0,1,2,-1)$.

Uppgift 12.5 (Sid. 12)

Lösning

$u=a+b+c$, $v=3c-a-b$ $\measuredangle(u,v)=\theta$

(1) Givet $|a|=|b|=|c|=1$; $\measuredangle(a,b)=\measuredangle(b,c)=\measuredangle(a,c)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow a\cdot b=a\cdot c=b\cdot c=\frac{1}{2}$ (ty $a\cdot b=1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{3}$ osv)

(2) $(u|v)=(a+b+c|-a-b+3c)=$

$=-(a|a)-(b|b)+3(c|c)-2(a|b)+2(a|c)+2(b|c)=$

$=-1-1+3-2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=2$

(3) $(u|u)=(a+b+c|a+b+c)=(a|a)+(b|b)+(c|c)+$

$+2(a|b)+2(a|c)+2(b|c)=6\Leftrightarrow|u|=\sqrt{6}$.

$(v|v)=(-a-b+3c|-a-b+3c)=(a|a)+(b|b)+9(c|c)+$

$+2(a|b)-6(a|c)-6(b|c)=1+1+9+1-3-3=6\Rightarrow|v|=\sqrt{6}$.

(4) $u\cdot v=|u|\cdot|v|\cos\theta\Leftrightarrow 2=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\cos\theta\Leftrightarrow\cos\theta=\frac{1}{3}\Rightarrow\theta=70{,}5°$.

Uppgift 12.6 (Sid. 12)

Lösning

π_1: $x_1+x_2+ax_3=1$; π_2: $x_1+x_3=0$; π_3: $ax_2+2x_3=2$.

a) $$\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=1\\ x_1\qquad+x_3=0 \quad (-1)\\ \quad ax_2+2x_3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2+(a-1)x_3=1 \quad (-a)\\ x_1\qquad+x_3=0\\ ax_2+2x_3=2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2+(a-1)x_3=1\\ x_1\qquad+x_3=0\\ (a(1-a)+2)x_3=2-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2+(a-1)x_3=1\\ x_1+x_3=0\\ (a+1)(a-2)x_3=a-2\end{cases};$$

Kritiska a-värden är $a=-1$ och $a=2$.

(1) $a=-1$: $\begin{cases}x_2-2x_3=1\\ x_1+x_3=0\\ 0=-3\end{cases}$; gemensamma pkr saknas.

(2) $a=2$: $\begin{cases}x_2+x_3=1\\ x_1+x_3=0\\ x_3=t\end{cases}$; skärningen är en "rät linje".

(3) $a\neq 2,-1$: $\begin{cases}x_2+(a-1)x_3=1\\ x_1+x_3=0\\ (a+1)x_3=1\end{cases}$; en unik lösning.

Några fler fall finns inte.

b) Det sökta planets normalvektor $n=(\alpha,\beta,\gamma)$ är parallell med planen π_1, π_2 och π_3 för $a=1$.

$\pi_1: x_1+x_2-x_3=1 \Rightarrow n_1=(1,1,-1) \Rightarrow (n|n_1)=\alpha+\beta-\gamma=0$;

$\pi_2: x_1+x_3=0 \Rightarrow n_2=(1,0,1) \Rightarrow (n|n_2)=\alpha+\gamma=0$;

$\pi_3: -x_2+2x_3=2 \Rightarrow n_3=(0,-1,2) \Rightarrow (n|n_3)=-\beta+2\gamma=0$.

$$\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma=0\\ \alpha\quad\;+\gamma=0\\ \quad\beta-2\gamma=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-\gamma\\ \beta=2\gamma\\ \gamma=-t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=t\\ \beta=-2t\\ \gamma=-t\end{cases} \Rightarrow \underbrace{n=(1,-2,-1)}_{\text{för } t=1}$$

Det sökta planets ekvation är $x_1-2x_2-x_3=0$.

Uppgift 12.7 (Sid. 12)

Lösning

$\underline{u=(x_1,x_2,0)}$, $\underline{v=(0,1,1)}$; $\underline{\theta=\measuredangle(u,v)=60^\circ}$.

$|u|=1 \Rightarrow (v|u)=x_2=1\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Svar: $u_1=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$, $u_2=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$.

Uppgift 12.8 (Sid. 12)

Lösning

$\underline{P_1:(7,-3,-3),\ Q_1:(5,-1,-3);\ P_2:(2,1,-2),\ Q_2:(2,0,-1)}$.

(1) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+s\overrightarrow{P_1Q_1} \Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3)=(7,-3,-3)+s(-2,2,0)$

$$\Leftrightarrow L_1: \begin{cases}x_1=7-2s\\ x_2=-3+2s\\ x_3=-3\end{cases},\ s\in\mathbb{R}.$$

(2) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_2}+t\overrightarrow{P_2Q_2} \Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3)=(2,1,-2)+t(0,-1,1)$

$$\Leftrightarrow L_2: \begin{cases}x_1=2\\ x_2=1-t\\ x_3=-2+t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

(3) $v_1=(-2,2,0)\nparallel(0,-1,1)=v_2$, så linjerna "korsar" varandra i punkten $P_0:(\xi,\eta,\zeta)$;

$$L_1\cap L_2: \begin{cases}7-2s=2\\ -3+2s=1-t\\ -3=-2+t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}s=\frac{5}{2}\\ t=-1\end{cases} \Rightarrow \underline{P_0:(2,2,-3)}.$$

Planets ekvation är $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_0}+\lambda v_1+\mu v_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3)=(2,2,-3)+\lambda(-2,2,0)+\mu(0,-1,1)=$

$=(2-2\lambda,2+2\lambda-\mu,-3+\mu) \Leftrightarrow$

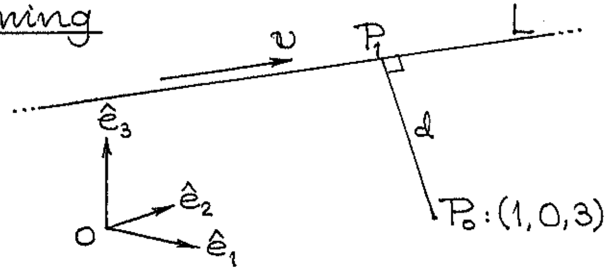
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_1=2-2\lambda\\ x_2=2+2\lambda-\mu\\ x_3=-3+\mu\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\lambda=2-x_1\\ 2\lambda-\mu=x_2-2\\ -\mu=-3-x_3\end{cases} \Leftrightarrow 2-x_1-3-$$

$-x_3=x_2-2 \Leftrightarrow \underline{x_1+x_2+x_3=1}$.

Skeva linjer är ej parallella och disjunkta.

Uppgift 12.9 (Sid. 12)

Lösning



$v=(1,1,1)$.

Låt P_1 vara P_0:s ortogonala projektion på L.

Om τ är motsvarande parametervärde så har vi

$$\overrightarrow{P_0P_1}=\overrightarrow{OP_1}-\overrightarrow{OP_0}=(\tau,1+\tau,\tau)-(1,0,3)=(\tau-1,\tau+1,\tau-3);$$

$$v\perp\overrightarrow{P_0P_1}\Rightarrow 1\cdot(\tau-1)+1\cdot(\tau+1)+1\cdot(\tau-3)=0\Leftrightarrow\tau=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{OP_1}=(0,1,0)+1\cdot(1,1,1)=(0+1,1+1,0+1)=(1,2,1).$$

Svar: Den sökta punkten är $(1,2,1)$.

Uppgift 12.10 (Sid. 13)

Lösning

$$\kappa(1-x)+\lambda(1-x)^2+\mu(1-x^2)+\nu(1-x)^3\equiv\kappa+\lambda+\mu+\nu+$$

$$+(-\kappa-2\mu-3\nu)x+(\lambda-\mu+3\nu)x^2-\nu x^3=a+bx+cx^2+dx^3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa+\lambda+\mu+\nu=a & 1\\-\kappa-2\mu-3\nu=b\\\lambda-\mu+3\nu=c\\-\nu=d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa+\lambda+\mu+\nu=a\\\lambda-\mu-2\nu=a+b & -1\\\lambda-\mu+3\nu=c\\\nu=-d\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa+\lambda+\mu+\nu=a\\\lambda-\mu-2\nu=a+b\\5\nu=-a-b+c\\d=-\nu\end{cases}\Rightarrow -a-b+c=-5d\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-b+c+5d\\b=-r\\c=s\\d=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=r+s+5t\\b=-r\\c=\quad s\\d=\qquad t\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\underline{(a,b,c,d)=r(1,-1,0,0)+s(1,0,1,0)+t(5,0,0,1);\ r,s,t\in\mathbb{R}}.$$

$$(r,s,t)=(1,0,0)\Rightarrow(a,b,c,d)=(1,-1,0,0)\Rightarrow\underline{\hat{e}_1=1-x}.$$

$$(r,s,t)=(0,1,0)\Rightarrow(a,b,c,d)=(1,0,1,0)\Rightarrow\underline{\hat{e}_2=1+x^2}.$$

$$(r,s,t)=(0,0,1)\Rightarrow(a,b,c,d)=(5,0,0,1)\Rightarrow\underline{\hat{e}_3=5+x^3}.$$

En bas för

$$U=[1-x,(1-x)^2,1-x^2,(1-x)^3]$$

är till exempel (det finns oändlig många)

$$\mathcal{B}=(1-x,1+x^2,5+x^3).$$

En bas för $\mathcal{P}_3$ är $\hat{\mathcal{B}}=(1,1-x,1+x^2,5+x^3)$.

Uppgift 12.11 (Sid. 13)

Lösning

$V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_1+x_2+x_3=0,\ x_1+2x_2=0\}$; $\dim V=2$.

$$W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):\ x_1+x_2+x_3=0\};\ \dim W\leq 3.$$

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2 \quad\ =0 \quad (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-2x_2 \\ x_3=x_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4)=(-2x_2,\ x_2,\ x_2,\ x_4) \Leftrightarrow \begin{cases} x_2= \\ x_4=t \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4)=s(2,-1,-1,0)+t(0,0,0,1),\ s,t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \underline{\mathcal{B}_V=((2,-1,-1,0),(0,0,0,1))\ \text{ON-bas}}.$

(2) $x_1+x_2+x_3=0 \Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1,x_2,-x_1-x_2,x_4)=$

$=x_1(1,0,-1,0)+x_2(0,1,-1,0)+x_4(0,0,0,1)\in W \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{W=[(1,0,-1,0),(0,1,-1,0),(0,0,0,1)]}.$

(3) $(2,-1,-1,0)=2(1,0,-1,0)-(0,1,-1,0)$, dvs $V\subseteq W$

(4) $(0,0,1,0)\notin W$, så en bas för $\mathbb{R}^4$ är till exempel

$\underline{\mathcal{B}=((1,0,-1,0),(0,1,-1,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))}.$

Övning 12.12 (Sid. 13)

Lösning

(1) $(1,2,1)\nparallel(-1,1,1)$; dvs $(1,2,1),(-1,1,1)$ l. oberoende

(2) $\lambda(1,2,1)+\mu(-1,1,1)+\nu(-3,-3,-1)=(0,0,0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\lambda-\mu-3\nu,\ 2\lambda+\mu-3\nu,\ \lambda+\mu-\nu)=(0,0,0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda-\mu-3\nu=0 \quad 1 \\ 2\lambda+\mu-3\nu=0 \\ \lambda+\mu-\nu=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda-\mu-3\nu=0 \\ 3\lambda \quad -6\nu=0 \\ 2\lambda \quad -4\nu=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=\lambda-3\nu \\ \lambda=2\nu \\ \nu=t \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=2t \\ \mu=-t \\ \nu=t \end{cases} \Rightarrow (t=1) \Rightarrow 2(1,2,1)-(-1,1,1)+(-3,-3,-1)=0$

$\Rightarrow (-3,-3,-1)$ är löjlig och utelämnas därför.

(3) $\alpha(1,2,1)+\beta(-1,1,1)+\gamma(2,1,0)=(\alpha-\beta+2\gamma,\ 2\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+\beta)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-2\beta+2\gamma=0 \\ 2\alpha+\beta+\gamma \ =0 \quad -2 \\ \alpha+\beta \quad\ =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha-4\beta=0 \\ 2\alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta \quad =0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1,2,1),(-1,1,1)$ och $(2,1,0)$ linjärt oberoende $\Rightarrow$

$\underline{[(1,2,1),(-1,1,1),(-3,-3,-1),(2,1,0)]}=\underbrace{\underline{[(1,2,1),(-1,1,1),(2,1,0)]}}_{=\mathbb{R}^3}.$

Övning 12.13 (Sid. 13)

Lösning

$y=kx+l \Rightarrow \begin{cases} -k+l=-3 \\ k+l=-2 \\ 3k+l=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}=\frac{1}{24}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 0 \end{bmatrix}=\frac{1}{24}\begin{bmatrix} 48 \\ -48 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{y=2x-2}.$

Uppgift 12.14 (Sid. 13)

Lösning

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-x_2 \\ x_3=-x_2+x_4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=s \\ x_2=-s \\ x_3=-s+t \\ x_4=\quad t \end{cases} \Rightarrow \underline{x=s(1,-1,-1,0)+t(0,0,1,1).}$$

(2) $\underline{u_1=(1,-1,-1,0),\ u_2=(0,0,1,1).}$

$v_1=u_1$;

$v_2=u_2-\frac{(u_2|u_1)}{(u_1|u_1)}u_1=u_2+\frac{1}{3}u_1=\frac{1}{3}(1,-1,2,3)$;

(2) $v=(1,1,3,-2)$ projiceras ortogonalt på $[u_1,u_2]$:

$v_{\parallel}=\frac{(v|v_1)}{(v_1|v_1)}v_1+\frac{(v|v_2)}{(v_2|v_2)}v_2=-v_1=-u_1=(-1,1,1,0) \Rightarrow$

$v_{\perp}=v-v_{\parallel}=(1,1,3,-2)+(1,-1,-1,0)=(2,0,2,-2).$

Resultat: $(1,1,3,-2)=(-1,1,1,0)+(2,0,2,-2).$

Uppgift 12.15 (Sid. 13)

Lösning

$\underline{\mathcal{M}=[u_1,u_2];\ u_1=(1,1,-1,1),\ u_2=(1,1,1,1).}$

$v=(a,b,c,d)\in\mathcal{M}^{\perp} \Rightarrow \begin{cases} (v|u_1)=a+b-c+d=0 \quad (-1) \\ (v|u_2)=a+b+c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-b-d \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=s+t \\ b=-s \\ c=0 \\ d=\ -t \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x=s(1,-1,0,0)+t(1,0,0,-1)}.$

$\Rightarrow \mathcal{M}^{\perp}=[(1,-1,0,0),(1,0,0,-1)]$

Med $v_1=(1,-1,0,0)$ och $v_2=(1,0,0,-1)$ fås:

$w_1=v_1 \Rightarrow w_2=v_2-\frac{(v_2|v_1)}{(v_1|v_1)}v_1=v_2-\frac{1}{2}v_1=\frac{1}{2}(1,1,0,-2)$;

$e_1=\frac{w_1}{|w_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0),\quad e_2=\frac{w_2}{|w_2|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,0,-2).$

Svar: $\mathcal{B}_{\mathcal{M}^{\perp}}=(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0),\frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,0,-1)).$

Uppgift 12.16 (Sid. 13)

Lösning

$\underline{\pi_1: x_1+ax_2+x_3=2,\ \pi_2: ax_1+x_2+x_3=1,\ \pi_3: x_1+x_2+2x_3=3.}$

$\begin{cases} x_1+ax_2+x_3=2 \quad (-1)(-2) \\ ax_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+2x_3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+ax_2+x_3=2 \\ (a-1)x_1-(a-1)x_2=-1 \quad (-1) \\ -x_1-(2a-1)x_2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+ax_2+x_3=2 \\ (a-1)(x_1-x_2)=-1 \\ -ax_1-ax_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+ax_2+x_3=2 & (1') \\ (a-1)(x_1-x_2)=-1\ ; & (2') \\ a(x_1+x_2)=0 & (3') \end{cases}$

(1) $\underline{a=1} \overset{(2')}{\Rightarrow}$ lösning(ar) saknas.

(2) $\underline{a=0} \Rightarrow ((1')-(3')) \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_3=2 \\ x_1-x_2=1 \\ x_1+x_2=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ x_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ x_3=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}t \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3)=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2})+s(1,1,-1) \overset{!}{=} \underline{(1,0,1)+r(1,1,-1)}.$

Anm. I $\overset{!}{\Leftrightarrow}$ underförstås en omparametrisering, eg. förskjutning av "fotpunkten".

Uppgift 12.17 (Sid. 13)

Lösning

$|u+v|=|u-v| \Leftrightarrow |u+v|^2=|u-v|^2 \Leftrightarrow (u+v|u+v) =$

$=(u-v|u-v) \Leftrightarrow (u|u)+2(u|v)+(v|v) = (u|u)-$

$-2(u|v)+(v|v) \Leftrightarrow 4(u|v)=0 \Leftrightarrow (u|v)=0 \Leftrightarrow \underline{u \perp v}.$

Uppgift 12.18 (Sid. 13)

Lösning

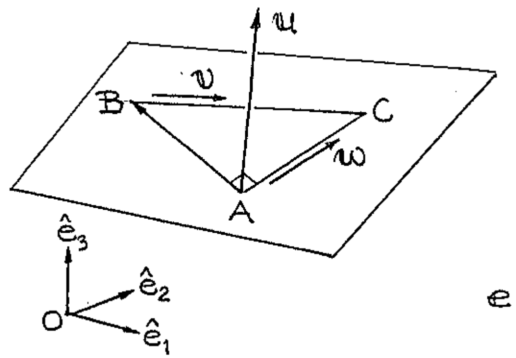
$\underline{A:(3,2,2),\ B:(1,-1,1);\ v=(1,2,-1)_e;\ e=(\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3).}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,-1,1)_e-(3,2,2)_e=(-2,-3,-1)_e;$

$v \times \overrightarrow{AB}=(1,2,-1)_e \times (-2,-3,-1)_e=(-5,3,1)_e=u$ är $\perp$ triangelplanet (se figur på nästa sida); $w=$

$=\overrightarrow{AB}\times u$ ligger i detta plan;

$w=(-2,-3,-1)\times(-5,3,1)=(0,7,-21)=7(0,1,-3).$



$e=(\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3).$

$w=(-2,-3,-1)_e\times(-5,3,1)_e=(0,7,-21)_e=7(0,1,-3)_e.$

Linjen genom B och C (hypotenusan) har ekvationen $(x_1,x_2,x_3)_e=(1,-1,1)_e+t(1,2,-1)_e=(1+t,-1+2t,1-t)_e$;

Linjen genom A och C har ekvationen $(x_1,x_2,x_3)=$
$=(3,2,2)_e+s\cdot(0,1,-3)_e=(3,2+s,2-3s)_e$; punkten C är skärningspunkten av dessa två linjer:

$\begin{cases} 1+t=3 \\ -1+2t=2+s \\ 1-t=2-3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ -1+2t=2+s \\ 1-t=2-3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=1 \\ \\ t=2 \end{cases} \Rightarrow \underline{C:(3,3,-1).}$

Svar: Det tredje hörnet ligger i punkten C med koordinaterna $(3,3,-1)$.

Uppgift 12.19 (Sid. 13)

Lösning: $A_1:(1,1,0),\ B_1:(0,1,1);\ A_2:(2,2,-1),\ B_2:(1,-1,2)$

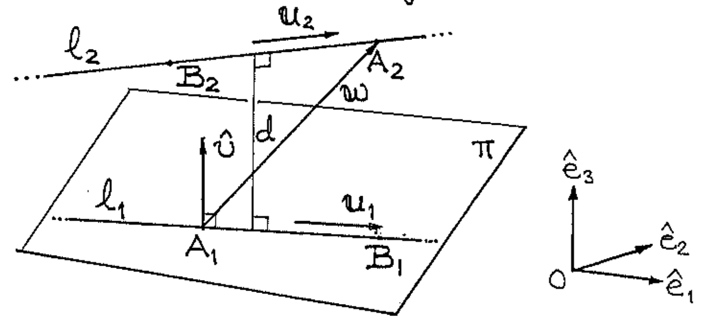
$l_1 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA_1} + s\overrightarrow{A_1B_1} \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3)_e = (1-s, 1, s)_e,\ s \in \mathbb{R}$;

$l_2 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB_2} + t\cdot\overrightarrow{A_2B_2} \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3)_e = (2-t, 2-3t, -1+3t)_e$;

$u_1 = (-1, 0, 1)_e$ är en riktningsvektor till linjen l_1 och

$u_2 = (-1, -3, 3)_e$ är en riktningsvektor till linjen l_2.

$v = u_1 \times u_2 = (-1, 0, 1)_e \times (-1, -3, 3)_e = (3, 2, 3)_e$ är en normalvektor till båda linjerna l_1 och l_2.



$d = |(w|\hat{v})\hat{v}| = |(w|\hat{v})|$; $w = \overrightarrow{A_1A_2} = (1, 1, -1)_e$ och

$\hat{v} = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{22}}(3, 2, 3)_e$, s.a. $d = \frac{2}{\sqrt{22}}$.

Ekvationen för π är $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$. Detta tecknas $(v|\overrightarrow{A_1P}) = 0$, där $v = (3, 2, 3)_e$ och $\overrightarrow{A_1P} = (x_1-1, x_2-1, x_3)_e$ med $P : (x_1, x_2, x_3)$ löpande punkt på planet π (som omfattar l_1).

Resultat: Planets ekvation är $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$; avståndet mellan linjerna är $2/\sqrt{22}$ le.

Uppgift 12.20 (Sid. 13)

Lösning

$A : (1, 1, -1),\ B : (1, -1, 1),\ C : (-1, 1, 1);\ L : x = t\cdot(1, 0, 0)_e,\ t \in \mathbb{R}$.

$$\pi : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \Rightarrow \begin{cases} A \in \pi \Rightarrow a + b - c = d & (1) \\ B \in \pi \Rightarrow a - b + c = d \\ C \in \pi \Rightarrow -a + b + c = d \end{cases} (1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow a + b + c = 3d \Rightarrow a = b = c = d \Rightarrow dx_1 + dx_2 + dx_3 = d$

$\Leftrightarrow \pi : x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow n = (1, 1, 1)_e$ (normalvektor till π); $e = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ är standardbasen i $\mathbb{R}^3$.

$(x_1, x_2, x_3)_e = (t, 0, 0)_e \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = t = 1 \Rightarrow P_0 : (1, 0, 0)$ är skärningspunkten mellan π och L.

En riktningsvektor till L är $\hat{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$; dess projektion i π är

$$v = \hat{e}_1 - \frac{(\hat{e}_1|n)}{(n|n)} n = \hat{e}_1 - \frac{1}{3} n = \frac{1}{3}(2, -1, -1)_e.$$

Linjens projektion i π blir alltså

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + tv = (1, 0, 0)_e + t(2, -1, -1)_e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 2t \\ x_2 = -t \\ x_3 = -t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Resultat: $(x_1, x_2, x_3)_e = (1 + 2t, -t, -t)_e,\ t \in \mathbb{R}$.

Uppgift 12.21 (Sid. 14)

Lösning

Standardbasen i $\mathcal{P}_2$ är $\mathcal{B}=(1,x,x^2)$.

(1) $\lambda(x-1)^2+\mu x^2+\nu(x+1)^2=\lambda+\nu+(-2\lambda+2\nu)x+(\lambda+\mu+\nu)x^2=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda \quad +\nu=0\\ \lambda \quad -\nu=0\\ \lambda+\mu+\nu=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ \mu=0\\ \nu=0\end{cases}\Rightarrow \underline{\text{lineärt oberoende.}}$$

(2) $$\begin{cases}\lambda \quad +\nu=2\\ \lambda \quad -\nu=0\\ \lambda+\mu+\nu=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\lambda=2\\ \lambda=\nu\\ \mu=-\lambda-\nu\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=1\\ \mu=-2\\ \nu=1\end{cases}$$

__Resultat__ $B=((x-1)^2,x^2,(x+1)^2)$ är en bas för $\mathcal{P}_2$;
$2=(x-1)^2-2x^2+(x+1)^2=(1,-2,1)_B$.

Uppgift 12.22 (Sid. 14)

Lösning

$\underline{u_1=(1,0,1),\ u_2=(1,-1,0),\ u_3=(0,1,a).}$

a) $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=(\lambda_1+\lambda_2,-\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1+a\lambda_3)=\mathbf{x}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2 \quad =x_1\\ \quad -\lambda_2+\lambda_3=x_2\\ \lambda_1 \quad +a\lambda_3=x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1 \quad +\lambda_3=x_1+x_2\\ \quad -\lambda_2+\lambda_3=x_2\\ \lambda_1 \quad +a\lambda_3=x_3\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow (1-a)\lambda_3=x_1+x_2-x_3$ (den första ekvationen).

För $a=1$ är antalet oberoende vektorer 2, dvs $[(1,0,1),(1,-1,0),(0,1,a)]\subset\mathbb{R}^3$ (för $a=1$).

b) För $a=1$ fås $x_1+x_2-x_3=0$ (ett plan).

Uppgift 12.23 (Sid. 14)

Lösning

$\underline{U=[(1,1,0),(1,0,-1)],\ V=[(1,1,1),(0,1,1),(1,2,2)]}$

(1) $(1,1,1)+(0,1,1)=(1,2,2)\Rightarrow V=[(1,1,1),(0,1,1)]$.

(2) $\dim U=\dim V=2\Rightarrow \underline{\dim(U\cap V)=1.}$

(3) $$\left.\begin{matrix}(1,1,0)\times(1,0,-1)=(-1,1,-1)\Rightarrow U:\ x_1-x_2+x_3=0\\ (1,1,1)\times(0,1,1)=(0,-1,1)\Rightarrow V:\quad x_2-x_3=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$\Rightarrow x_1=0\wedge x_2=x_3\Rightarrow \mathbf{x}=t(0,1,1)\Rightarrow \mathcal{B}=\{(0,1,1)\}$.

Uppgift 12.24 (Sid. 14)

Lösning

$\lambda_1(1+t)+\lambda_2(t+t^2)+\lambda_3(-1+t^2)+\lambda_4(t+t^3)+\lambda_5(1+t^2+t^3)=$

$=\lambda_1-\lambda_3+\lambda_5+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4)t+(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_5)t^2+(\lambda_4+\lambda_5)t^3=$

$$=a+bt+ct^2+dt^3\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1 \quad -\lambda_3 \quad +\lambda_5=a\\ \lambda_1+\lambda_2 \quad +\lambda_4 \quad =b\\ \quad \lambda_2+\lambda_3 \quad +\lambda_5=c\\ \quad \quad \lambda_4+\lambda_5=d\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4+\lambda_5=a-b \quad (-1) \\ \lambda_1+\lambda_2 \quad +\lambda_4 \quad =b \\ \lambda_2+\lambda_3-\lambda_4 \quad =c-d \\ \lambda_4+\lambda_5=d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4+\lambda_5=a-b \\ \lambda_1+\lambda_2 \quad +\lambda_4 \quad =b \\ -2\lambda_4+\lambda_5=a-b+c-d \\ \lambda_4+\lambda_5=d \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4+\lambda_5=a-b \\ \lambda_1+\lambda_2 \quad +\lambda_4 \quad =b \\ 3\lambda_5=a-b+c-d \\ \lambda_4+\lambda_5=a-b+c+d \quad (-1)\,(1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_2-\lambda_3 \quad +2\lambda_5=2a-2b+c+d \\ \lambda_1+\lambda_2 \quad -\lambda_5=-a-2b-c-d \\ \lambda_5=(a-b+c-d)/3 \quad (-1)\,(1)\,(-2) \\ \lambda_4+\lambda_5=a-b+c+d \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_2-\lambda_3 \quad =(4a-4b+c+5d)/3 \\ \lambda_1+\lambda_2 \quad =(-2a-7b-2c-4d)/3 \\ \lambda_5=(a-b+c-d)/3 \\ \lambda_4 \quad =(2a-2b+2c+4d)/3 \end{cases};$$

λ_2 kan väljas godtyckligt (fritt) varav följer att

$$\mathcal{B}=\{1+t,\,-1+t^2,\,t+t^3,\,1+t^2+t^3\}$$

är en bas för det linjära höljet.

$$\mu_1(1+t)+\mu_2(-1+t^2)+\mu_3(t+t^3)+\mu_4(1+t^2+t^3)=t^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\mu_1-\mu_2+\mu_4)+(\mu_1+\mu_3)t+(\mu_2+\mu_4)t^2+(\mu_3+\mu_4)=t^3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1-\mu_2 \quad +\mu_4=0 \quad (-1) \\ \mu_1 \quad +\mu_3 \quad =0 \\ \mu_2 \quad +\mu_4=0 \\ \mu_3+\mu_4=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1-\mu_2 \quad +\mu_4=0 \\ \mu_2+\mu_3-\mu_4=0 \\ \mu_2 \quad +\mu_4=0 \quad (-1) \\ \mu_3+\mu_4=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1-\mu_2 \quad +\mu_4=0 \\ \mu_3-2\mu_4=0 \\ \mu_2 \quad +\mu_4=0 \\ \mu_3+\mu_4=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1=-2/3 \\ \mu_2=-1/3 \\ \mu_3=2/3 \\ \mu_4=1/3 \end{cases};$$

Svar: $\mathcal{B}=(1+t,\,-1+t^2,\,t+t^3,\,1+t^2+t^3)$ är en bas.

$$t^3=-\frac{2}{3}(1+t)-\frac{1}{3}(-1+t^2)+\frac{2}{3}(t+t^3)+\frac{1}{3}(1+t^2+t^3)$$

Uppgift 12.25 (Sid. 14)

Lösning

(1) $W: \begin{cases} x_1+x_2+x_3 \quad =0 \quad (-1) \\ x_1 \quad +x_3+x_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3 \quad =0 \\ -x_2 \quad +x_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-x_2-x_3 \\ x_2=-s \\ x_3=-t \\ x_4=x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=s+t \\ x_2=-s \\ x_3=-t \\ x_4=-s \end{cases} \Leftrightarrow \mathbb{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)_e=$$

$$=s\cdot(1,-1,0,-1)_e+t\cdot(1,0,-1,0)_e\,,\ -\infty<s,t<\infty.$$

En bas för W är $\underline{\underline{\mathcal{B}_W=((1,-1,0,-1)_e,(1,0,-1,0)_e)}}$.

(2) $V: -x_1+x_2-x_3-2x_4=0 \Leftrightarrow x_1=x_2-x_3-2x_4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbb{x}=(x_2-x_3-2x_4,\,x_2,\,x_3,\,x_4)=x_2(1,1,0,0)-$

$+x_3(-1,0,1,0)_e+x_4(-2,0,0,1)_e=x_2\cdot u_1+x_3u_2+x_4u_3$;

$\underline{\underline{\mathcal{B}_V=((1,1,0,0)_e,(1,0,-1,0)_e,(2,0,0,-1)_e)\ \text{bas för } V.}}$

Basvektorerna $(1,-1,0,-1)_e$ och $(1,0,-1,0)_e$ ligger även i V; $\dim V = 3$, så $\mathcal{B}_W$ kompletteras till en bas i V genom tillägg av $(1,1,0,0)_e$, då denna inte ligger i W.

<u>Svar</u>: $\mathcal{B}_W$ se ovan; $\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_W \cup \{(1,1,0,0)\}$.

<u>Uppgift 12.26 (Sid. 14)</u>

<u>Lösning</u>

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{X} = \mathbb{B} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3a & -1 & -1 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2a & -1-a & -3 \end{array}\right] (-a) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & -3 \end{array}\right]; \quad \underline{\text{kritiskt värde på } a \text{ är } 1}.$$

a) Systemet saknar lösning för $a=1$. I detta fall blir ekvationssystemet överbestämt.

$$a=1 \Rightarrow \mathbb{A}\cdot\mathbb{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A}^t\cdot(\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}) =$$

$$= (\mathbb{A}^t\mathbb{A})\mathbb{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbb{A}^t\mathbb{B} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 14 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 3 \end{array}\right] (-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 6 & 3 \end{array}\right] (3)\,(2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 12 & 7 \\ 0 & 0 & 16 & 6 \\ 0 & -2 & 6 & 3 \end{array}\right] (1/2) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 7/2 \\ 0 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3/8 \end{array}\right] (-1/2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 7/2 \\ 0 & 1 & -3 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/8 \end{array}\right] (3)\,(-6) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/4 \\ 0 & 1 & 0 & -3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 3/8 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5/4 = 10/8 \\ x_2 = -3/8 \\ x_3 = 3/8 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{A}\cdot\mathbb{X} = \mathbb{A}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 10 \\ -12 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}25 \\ -1{,}5 \\ -0{,}25 \end{bmatrix};$$

b) $a=1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow k_3 = 2k_1 - k_2 \Rightarrow \underline{k_1, k_2 \text{ l. oberoende}}.$

$$\Rightarrow \mathbb{X} = s\cdot\mathbb{k}_1 + t\cdot\mathbb{k}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = s+t \;(-1) \\ x_2 = 2t \\ x_3 = s+3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = s+t \\ x_2 = 2t \\ x_3 - x_1 = 2t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x_3 - x_1 = x_2 \Leftrightarrow$ kolonnrummet är planet

$$\underline{\pi: x_1 + x_2 - x_3 = 0.}$$

$u_1 = (1,0,1)_e$, $u_2 = (1,2,3)_e$;

$$v_1 = u_1 \Rightarrow v_2 = u_2 - \frac{(u_2|u_1)}{(u_1|u_1)}u_1 = u_2 - \frac{4}{2}u_1 = u_2 - 2u_1 =$$

$$= (-1,2,1)_e \Rightarrow \mathcal{B}_\pi = (\hat{e}_1, \hat{e}_2) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)_e, \tfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)_e\right).$$

$$w = (2,0,-1)_e \Rightarrow w_\pi = (w|\hat{e}_1)\hat{e}_1 + (w|\hat{e}_2)\hat{e}_2 = \frac{(w|v_1)}{(v_1|v_1)}v_1 +$$

$+\frac{(w|v_2)}{(v_2|v_2)}v_2=\frac{1}{2}v_1+\frac{-3}{6}v_2=\frac{1}{2}(v_1-v_2)=\frac{1}{2}(-2,2,0)_e=(-1,1,0)_e$

Resultat: a) För $a=1$ är systemet inkonsistent (självmotsägande; i detta fall blir $AX=[1{,}25\ \ -1{,}5\ \ -0{,}25]^t$ i minsta kvadratmetoden. b) Kolonnerna spänner upp ett plan, $x_1+x_2-x_3=0$. Den sökta punkten är $(-1,1,0)$.

Uppgift 12.27 (Sid. 14)

Lösning

$$W:\begin{cases}x_1+2x_2 \quad -x_4=0\\ x_1 \quad -x_3+x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_2=-x_1+x_4\\ x_3=x_1+x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2s\\ x_2=-s+t\\ x_3=+2s+2t\\ x_4=2t\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \underline{x=s\cdot(2,-1,2,0)_e+t(0,1,2,2)_e,\ -\infty<s,t<\infty.}$

$u_1=(2,-1,2,0)_e,\ u_2=(0,1,2,2)_e.$

$v_1=u_1\Rightarrow v_2=u_2-\frac{(u_2|v_1)}{(v_1|v_1)}v_1=u_2-\frac{3}{9}v_1=\frac{1}{3}(3u_2-v_1)=$

$=\frac{1}{3}((0,3,6,6)_e-(2,-1,2,0)_e)=\frac{1}{3}(-2,4,4,6)_e;$

$y=\frac{(u|v_1)}{(v_1|v_1)}v_1+\frac{(u|v_2)}{(v_2|v_2)}v_2=\frac{0}{9}v_1+\frac{2}{8}\cdot v_2=\frac{1}{4}v_2=\frac{1}{12}(-2,4,4,6)_e=$

$=\frac{1}{6}(-1,2,2,3)_e.$

Svar: $y=(-\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{2})_e.$

Uppgift 12.28 (Sid. 14)

Lösning

$$y=kx+l\Rightarrow\begin{cases}-k+l=3\\ 0\cdot k+l=1\\ 1\cdot k+l=1\\ 2\cdot k+l=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-1\cdot k+1\cdot l\\ 0\cdot k+1\cdot l\\ 1\cdot k+1\cdot l\\ 2\cdot k+1\cdot l\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\0&1\\1&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\\1\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-1&0&1&2\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\0&1\\1&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&1&2\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\\1\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}6&2\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\5\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}k\\l\end{bmatrix}=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}4&-2\\-2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\5\end{bmatrix}=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}-18\\34\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0{,}9\\1{,}7\end{bmatrix}\Rightarrow\underline{y=1{,}7-0{,}9x.}$$

Uppgift 12.29 (Sid. 14)

Lösning

$\underline{u=(x_1,x_2,x_3)_e,\ v=(1,a,-1)_e,\ w=(1,2,3)_e;\ e=(e_1,e_2,e_3).}$

$$u\times v=w\Rightarrow\begin{vmatrix}e_1&e_2&e_3\\x_1&x_2&x_3\\1&a&-1\end{vmatrix}=(-x_2-ax_3,x_1+x_3,ax_1-x_2)_e=$$

$$=(1,2,3)_e\Leftrightarrow\begin{cases}-x_2-ax_3=1 \quad (-1)\\ x_1 \quad +x_3=2\\ ax_1-x_2 \quad =3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x_2-ax_3=1\\ x_1 \quad +x_3=2 \quad (-a)\\ ax_1 \quad ax_3=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x_2-ax_3=1\\ x_1 \quad +x_3=2\\ 0=2-2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x_2-ax_3=1\\ x_1 \quad +x_3=2\\ 0=a-1\end{cases}\text{(a kritiskt);}$$

$$a=1 \Rightarrow \begin{cases} -x_2-x_3=1 \\ x_1+x_3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2-x_3 \\ x_2=-1-x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2-t \\ x_2=-1-t \\ x_3=t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}.$$

Svar: För $a=1$ blir $u=(2-t,-1-t,t)_e$, $t\in\mathbb{R}$.

Uppgift 12.37 (Sid. 15)

Lösning

$V_a=\{x\in\mathbb{R}^4 : 2x_1-x_2+x_3=0,\ x_1-3x_2+x_4=0,\ x_1+ax_2+x_3-x_4=0\}$.

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3 \quad =0 \\ x_1-3x_2 \quad +x_4=0 \quad (-1)\ (-2) \\ x_1+ax_2+x_3-x_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_2+x_3-2x_4=0 \quad (-1) \\ x_1-3x_2 \quad +x_4=0 \\ (a+3)x_2+x_3-2x_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x_2+x_3-2x_4=0 \\ x_1-3x_2 \quad +x_4=0 \\ (a-2)x_2 \quad =0 \\ a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_2+x_3-2x_4=0 \\ x_1-3x_2+x_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_2=s \\ x_4=t \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3=-5x_2+2x_4 \\ x_1=3x_2-x_4 \\ x_2=s \\ x_4=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=3s-t \\ x_2=s \\ x_3=-5s+2t \\ x_4=\quad t \end{cases} \Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4)_e=$$

$$=s\cdot(3,1,-5,0)_e+t(-1,0,2,1)_e.$$

Svar: $a=2$; $\mathcal{B}=((3,1,-5,0)_e,(-1,0,2,1)_e)$.

13. Determinanter

Uppgift 13.1 (Sid. 15)

Lösning

a) En produkt ska omfatta ett element från varje rad och ett från varje kolonn; den givna produkten är tillåten här.

b) Tillåten produkt även i detta fall.

c) Ingen tillåten produkt, ty den omfattar två element ur rad 4.

Uppgift 13.2 (Sid. 15)

Lösning

a) $$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ 11 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 11 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 44-5=\underline{\underline{39}}.$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \ (1)\ (-4) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \end{vmatrix} \ (-2)\ (5) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{vmatrix} = 0$$

c) $$\begin{vmatrix} t & 1 & 2 & 3 \\ 2t & 2+t & 4-t & 7 \\ 0 & 0 & t & 2 \\ t & 1 & 2+t & 7 \end{vmatrix} \ (-1) = \begin{vmatrix} t & 1 & 2 & 3 \\ 2t & 2+t & 4-t & 7 \\ 0 & 0 & t & 2 \\ 0 & 0 & t & 4 \end{vmatrix} \ (-2)\ (-1) = \begin{vmatrix} t & 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & -t & 1 \\ 0 & 0 & t & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2t^3.$$

Anm. Determinanten av en triangulär matris är produkten av elementen i huvuddiagonalen.

Uppgift 13.3 (Sid. 15)

Lösning

a) $$\begin{vmatrix} x&2&1&2\\2&1&2&x\\1&2&x&2\\2&x&2&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x&2&1&2\\2&1&2&x\\1&2&x&2\\x+5&x+5&x+5&x+5\end{vmatrix} =$$

$$=(x+5)\begin{vmatrix} x&2&1&2\\2&1&2&x\\1&2&x&2\\1&1&1&1\end{vmatrix} = (x+5)\begin{vmatrix} x-2&0&-1&2\\2-x&1-x&2-x&x\\-1&0&x-2&2\\0&0&0&1\end{vmatrix} =$$

$$=(-1)^{4+4}\cdot 1\cdot(x+5)\begin{vmatrix} x-2&0&-1\\2-x&1-x&2-x\\-1&0&x-2\end{vmatrix} = (x+5)(1-x)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}x-2&-1\\-1&x-2\end{vmatrix}=$$

$$=(x+5)(1-x)((x-2)^2-1)=(x+5)(1-x)(x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+5)(x-1)^2(x-3)=0 \Leftrightarrow x+5=0 \vee (x-1)^2=0 \vee x-3=0$$

$\Leftrightarrow \underline{x=-5} \vee \underline{x=1} \vee \underline{x=3}$. ($x=1$ är en dubbelrot).

b) $$\begin{vmatrix} 2-t&-2&-1\\-2&2-t&1\\-1&1&5-t\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-t&-2&-1\\-t&-t&0\\-1&1&5-t\end{vmatrix} = -t\cdot\begin{vmatrix} 2-t&-2&-1\\1&1&0\\-1&1&5-t\end{vmatrix} =$$

$$=-t\begin{vmatrix} 2-t&t-4&-1\\1&0&0\\-1&2&5-t\end{vmatrix} = (-t)\cdot 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} t-4&-1\\2&5-t\end{vmatrix} =$$

$$=t\cdot(-(t-4)(t-5)+2)=-(t(t^2-9t+20)-2))=$$

$$=-t(t^2-9t+18)=0 \Leftrightarrow t=0 \vee t^2-9t+18=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=0 \vee t=\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}-18}=\frac{9}{2}\pm\frac{3}{2} \Leftrightarrow \underline{t=0} \vee \underline{t=3} \vee \underline{t=6}.$$

Resultat: a) $x_1=-5$, $x_2=x_3=1$, $x_4=3$.

b) $t_1=0$, $t_2=3$, $t_3=6$.

Uppgift 13.4 (Sid. 15)

Lösning

Systemet leder fram till ... egenvärden (s. 148):

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=\lambda x_1\\ 2x_1-2x_3=\lambda x_2\\ -2x_1+2x_2+x_3=\lambda x_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1-\lambda&1&-2\\2&-\lambda&-2\\-2&2&1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix};$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1&-2\\2&-\lambda&-2\\-2&2&1-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1-\lambda&1&-2\\1+\lambda&-1-\lambda&0\\-2&2&1-\lambda\end{vmatrix} = (1+\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&1&-2\\1&-1&0\\-2&2&1-\lambda\end{vmatrix} =$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}2-\lambda&1&-2\\0&-1&0\\0&2&1-\lambda\end{vmatrix} = (\lambda+1)(2-\lambda)\begin{vmatrix}-1&0\\2&1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-1)(2-\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda+1=0 \vee \lambda-1=0 \vee \lambda-2=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda=-1 \vee \lambda=0 \vee \lambda=2.$$

Uppgift 13.5 (Sid.15)

Lösning

$$\begin{vmatrix} 1 & s & s^2 \\ 1 & t & t^2 \\ 1 & u & u^2 \end{vmatrix} \overset{-1}{=} \begin{vmatrix} 1 & s & s^2 \\ 0 & t-s & t^2-s^2 \\ 0 & u-s & u^2-s^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-s & (t-s)(t+s) \\ u-s & (u-s)(u+s) \end{vmatrix} =$$

$$= (t-s)(u-s) \begin{vmatrix} 1 & t+s \\ 1 & u+s \end{vmatrix} = (t-s)(u-s)(u-t) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t-s \neq 0 \wedge u-s \neq 0 \wedge u-t \neq 0.$$

Svar: $t \neq s$, $u \neq s$, $u \neq t$. Detta är detsamma som att $s \neq t \neq u \neq s$, dvs s, t och u är olika.

14. Linjära avbildningar

Uppgift 14.1 (Sid.16)

Lösning

$$\mathcal{F}(\mathbf{e}X) = \mathbf{e}\begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - x_3 \end{bmatrix} = \mathcal{F}(\boldsymbol{x}) \quad , \quad \boldsymbol{x} = \mathbf{e}X = \mathbf{e}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{e}U = \mathbf{e}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{u}; \quad \mathbf{e}V = \mathbf{e}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{v};$$

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \mathbf{e}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \mathbf{e}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{e}\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}; \quad \lambda\boldsymbol{u} = \mathbf{e}\begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \mathbf{e}\begin{bmatrix} u_1 + v_1 - (u_2 + v_2) \\ 2(u_2 + v_2) + 3(u_3 + v_3) \\ 2(u_1 + v_1) - (u_3 + v_3) \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{e}\begin{bmatrix} u_1 - u_2 + (v_1 - v_2) \\ 2u_2 + 3u_3 + (2v_2 + 3v_3) \\ 2u_1 - u_3 + (2v_1 - v_3) \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{e}\begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ 2u_2 + 3u_3 \\ 2u_1 - u_3 \end{bmatrix} + \mathbf{e}\begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ 2v_2 + 3v_3 \\ 2v_1 - v_3 \end{bmatrix} = \mathcal{F}(\boldsymbol{u}) + \mathcal{F}(\boldsymbol{v}) \quad (*)$$

och på samma sätt

$$\mathcal{F}(\lambda\boldsymbol{u}) = \mathbf{e}\begin{bmatrix} \lambda u_1 - \lambda u_2 \\ 2(\lambda_1 u_2) + 3(\lambda u_3) \\ 2(\lambda_1 u_1) - \lambda u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{e}\begin{bmatrix} \lambda(u_1 - u_2) \\ \lambda(2u_2 + 3u_3) \\ \lambda(2u_1 - u_3) \end{bmatrix} = \mathbf{e}\lambda\begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ 2u_2 + 3u_3 \\ 2u_1 - u_3 \end{bmatrix} =$$

$= \lambda F(u)$, vilket kombinerat med (*) visar att F är linjär.

$$F(x) = y \Leftrightarrow e\begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - x_3 \end{bmatrix} = e\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot x_1 + (-1)x_2 + 0\cdot x_3 \\ 0\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 \\ 2\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + (-1)x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$u = e\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v = e\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad u + v = e\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$G(x) = e\begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow G(u) = e\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge G(v) = e\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (**);$$

$$G(u+v) = e\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \neq e\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + e\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = G(u) + G(v) \Rightarrow G$$ bevarar inte additionen $\Rightarrow G$ är inte linjär.

Uppgift 14.2 (Sid. 16)

Lösning

a) $F(u) = (u|a)a$

$$F(x+y) = (x+y|a)a = ((x|a)+(y|a))a = (x|a)a + (y|a)a =$$
$$= F(x) + F(y); \quad (1)$$

$$F(\lambda x) = (\lambda x|a)a = \lambda(x|a)a = \lambda F(x) \quad (2);$$

Därmed är visat att F är linjär.

b) $F(u) = u \times a$ (Se (4.3)-(4.4) i kursboken)

$$F(x+y) = (x+y)\times a = x \times a + y \times a = F(x) + F(y); \quad (3)$$

$$F(\lambda x) = (\lambda x)\times a = \lambda(x \times a) = \lambda \cdot x \times a = \lambda F(x); \quad (4)$$

Ur (3) och (4) följer att F är linjär.

c) $F(u) = (u|a)u$

$$F(x+y) = (x+y|a)(x+y) = ((x|a)+(y|a))(x+y) =$$
$$= (x|a)(x+y) + (y|a)(x+y) =$$
$$= (x|a)x + (x|a)y + (y|a)x + (y|a)y =$$
$$= F(x) + F(y) + (x|a)y + (y|a)x \neq F(x) + F(y);$$

F bevarar (i allmänhet) inte additionen, så den är inte linjär.

Uppgift 14.3 (Sid. 16)

Lösning

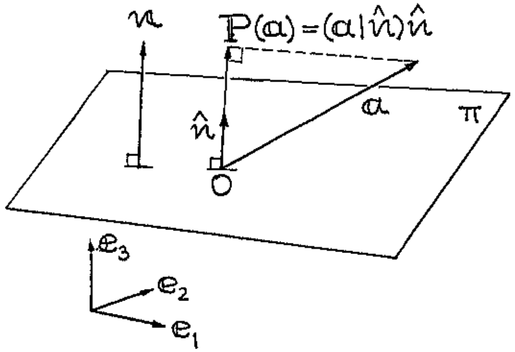
$n = (1,1,1)_e$ är en normalvektor till planet

$$\pi: \ x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Om $a = (a_1, a_2, a_3)_e$ så blir dess ortogonala projektion på n given av $a' = \frac{(a|n)}{(n|n)} n = \frac{a_1+a_2+a_3}{3} n$

$$\Leftrightarrow (a_1', a_2', a_3')_e = \left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}, \frac{a_1+a_2+a_3}{3}, \frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)_e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3 \\ a_1+a_2+a_3 \\ a_1+a_2+a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [G]_e = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$



$n = (1,1,1)_e$.

$\pi : x_1+x_2+x_3=0$.

Anm. Den ortogonala projektionen av en vektor a på en annan vektor n ges av

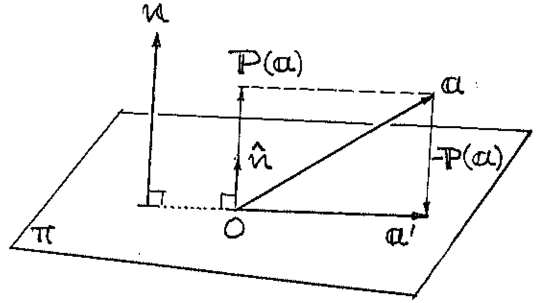
$$P(a) = a_n = (a|\hat{n})\hat{n},$$

där $\hat{n} = n/|n|$. (Figuren ovan är inte trogen).

Uppgift 14.4 (Sid. 16)

Lösning

Låt a vara som i föregående uppgift. a:s ortogonala projektion på π är $a' = a - (a|\hat{n})\hat{n}$



$\pi : x_1+x_2+x_3=0$

$$a' = a - \frac{(a|n)}{(n|n)} n \Leftrightarrow 3a' = 3a - (a_1+a_2+a_3)(1,1,1)_e =$$

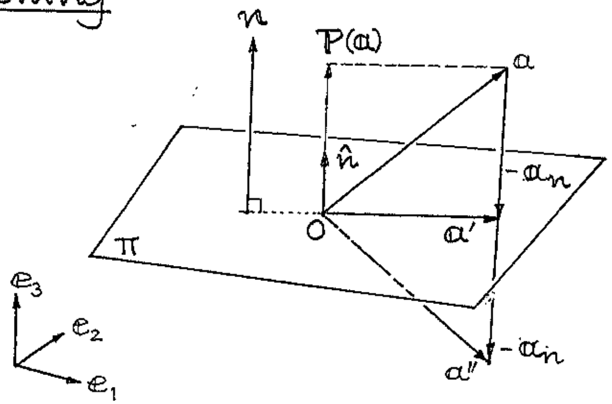
$$= (3a_1, 3a_2, 3a_3)_e - (a_1+a_2+a_3, a_1+a_2+a_3, a_1+a_2+a_3)_e =$$

$$= (2a_1-a_2-a_3, -a_1+2a_2-a_3, -a_1-a_2+2a_3)_e = 3(a_1', a_2', a_3')_e$$

$$\Leftrightarrow 3\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_1-a_2-a_3 \\ -a_1+2a_2-a_3 \\ -a_1-a_2+2a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow [F]_e = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Uppgift 14.5 (Sid. 16)

Lösning



$\pi : x_1+x_2+x_3=0$

$n=(1,1,1)$ är en normalvektor till planet π;

$$a'' = a' - a_n = a - 2a_n = a - 2\frac{(a|n)}{(n|n)}n = a - \frac{2}{3}(a|n)n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3a'' = 3a - 2(a|n)n = 3a - 2(a_1+a_2+a_3)\,n =$$

$$= (a_1-2a_2-2a_3,\ -2a_1+a_2-2a_3,\ -2a_1-2a_2+a_3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a_1'' = a_1-2a_2-2a_3 \\ 3a_2'' = -2a_1+a_2-2a_3 \\ 3a_3'' = -2a_1-2a_2+a_3 \end{cases} \Leftrightarrow 3\begin{bmatrix} a_1'' \\ a_2'' \\ a_3'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\mathcal{F}]_e = A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uppgift 14.6 (Sid. 16)

Lösning

(1) $e=(e_1,e_2,e_3)$ är standardbasen i $\mathbb{R}^3$.

$$[\mathcal{F}]_e = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [\mathcal{F}(e_1)\ \mathcal{F}(e_2)\ \mathcal{F}(e_3)] = eA =$$

$$= [e_1\ e_2\ e_3]\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{F}(e_1) = e_1+2e_2+e_3 \\ \mathcal{F}(e_2) = e_1-e_2+e_3 \\ \mathcal{F}(e_3) = -e_1-2e_2-e_3 \end{cases} \text{ och p.s.s.}$$

(2) $f=(f_1,f_2,f_3)$ är den nya basen.

$$[\mathcal{F}]_f = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [\mathcal{F}(f_1)\ \mathcal{F}(f_2)\ \mathcal{F}(f_3)] = f\cdot B =$$

$$= [f_1\ f_2\ f_3]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{F}(f_1) = 0 \\ \mathcal{F}(f_2) = f_1 \\ \mathcal{F}(f_3) = -f_3 \end{cases} \text{ (skall lösas i } e\text{).}$$

(3) $f_1 = \alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3 \Rightarrow \mathcal{F}(f_1) = \mathcal{F}(\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3) =$

$$= \alpha\mathcal{F}(e_1)+\beta\mathcal{F}(e_2)+\gamma\mathcal{F}(e_3) = (\text{ty } \mathcal{F} \text{ linjär}) =$$

$$= \alpha(e_1+2e_2+e_3)+\beta(e_1-e_2+e_3)+\gamma(-e_1-2e_2-e_3) =$$

$$= (\alpha+\beta-\gamma)e_1 + (2\alpha-\beta-2\gamma)e_2 + (+\alpha+\beta-\gamma)e_3 = \mathcal{F}(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta-\gamma = 0 \\ 2\alpha-\beta-2\gamma = 0 \\ +\alpha+\beta-\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} -2 & -1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow f_1 = e_1+e_3 = [e_1\ e_2\ e_3]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{F}(f_2) = f_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow f_2 = e\begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (Se a) ovan).}$$

$$\mathcal{F}(f_3) = -f_3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta-\gamma = -\alpha \\ 2\alpha-\beta-2\gamma = -\beta \\ \alpha+\beta-\gamma = -\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta-\gamma = 0 \\ 2\alpha\quad -2\gamma = 0 \\ \alpha+\beta\quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_3 = e\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow f = (f_1,f_2,f_3) \text{ är en sådan bas.}$$

__Anm.__ Ekvationssystemen ovan har oändligt många lösningar; det efterfrågas __en__ bas.

15 Lineära avbildningar

Uppgift 15.1 (Sid. 16)

Lösning

$$\begin{cases} F(e_1+2e_2)=2e_1+e_2 \\ F(2e_1+e_2)=e_1+2e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(e_1)+2F(e_2)=2e_1+e_2 \\ 2F(e_1)+F(e_2)=e_1+2e_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [F(e_1)\ F(e_2)]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = [e_1\ e_2]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [F(e_1)\ F(e_2)] =$$

$$= [e_1\ e_2]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = [e_1\ e_2]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot(-\tfrac{1}{3})\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [e_1\ e_2](-\tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = [e_1\ e_2]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [F]_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} F(f_1)=f_1 \\ F(f_2)=-f_2 \end{cases} \Rightarrow [F(f_1)\ F(f_2)] = [f_1\ f_2]\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [F]_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Jag sätter $f_1 = e\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ och $f_2 = e\begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$ och får

$$\begin{cases} F(f_1)=f_1 \Rightarrow \alpha=\beta \\ F(f_2)=-f_2 \Rightarrow \gamma=-\delta \end{cases} \Rightarrow f_1 = e\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ och } f_2 = e\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Svar: $[F]_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $f_1 = e\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $f_2 = e\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; $[F]_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Uppgift 15.2 (Sid. 17)

Lösning

(1) $[F(e_1)\ F(e_2)\ F(e_3)] = [e_1\ e_2\ e_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} F(e_1)=e_1 \\ F(e_2)=0 \\ F(e_3)=e_3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ F är en ortogonalprojektion på x_1x_3-planet.

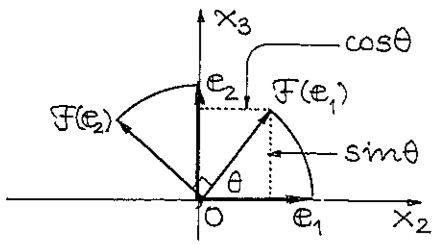
(2) $[F(e_1)\ F(e_2)\ F(e_3)] = [e_1\ e_2\ e_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} F(e_1)=e_1 \\ F(e_2)=3e_2 \\ F(e_3)=e_3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ F är en sträckning 3 ggr i x_2-led.

(3) $[F(e_1)\ F(e_2)\ F(e_3)] = [e_1\ e_2\ e_3]\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F(e_1)=e_1 \\ F(e_2)=\cos\theta\, e_2+\sin\theta\, e_3 \\ F(e_3)=-\sin\theta\, e_2+\cos\theta\, e_3 \end{cases};$$

F är en rotation vinkeln θ i positiv led m.a.p. x_1-axeln (se fig. nedan).



Anm. $F(e_3) = -\sin\theta\, e_2+\cos\theta\, e_3 = \cos(\theta+\frac{\pi}{2})e_2+\sin(\theta+\frac{\pi}{2})e_3$.

(4) $[\mathcal{F}(e_1)\,\mathcal{F}(e_2)\,\mathcal{F}(e_3)] = [e_1\, e_2\, e_3]\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{F}(e_1) = e_2 \\ \mathcal{F}(e_2) = -e_1 \\ \mathcal{F}(e_3) = e_3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{F}(e_1) = 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3 = \cos\frac{\pi}{2} e_1 + \sin\frac{\pi}{2} e_2 \\ \mathcal{F}(e_2) = (-1)e_1 + 0\cdot e_2 + 0\cdot e_3 = -\sin\frac{\pi}{2} e_1 + \cos\frac{\pi}{2} e_2 \\ \mathcal{F}(e_2) = 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 1\cdot e_3 = e_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ är en <u>rotation</u> vinkeln $\theta = \frac{\pi}{2}$ kring x_3--axeln i positivt led (moturs).

(5) $$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{3} & -\cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\frac{\pi}{3}) & -\sin(-\frac{\pi}{3}) \\ 0 & \sin(-\frac{\pi}{3}) & \cos(-\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix} = [\mathcal{F}_2]_e \cdot [\mathcal{F}_1]_e \quad ;$$

G är matrisen av en <u>vridning</u> vinkeln $\theta = \frac{\pi}{3}$ medurs kring x_1-axeln åtföljd av en <u>spegling</u> i ett plan (vilket)

$$G\cdot X = X \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_1 \\ x_2 + \sqrt{3}x_2 = 2x_2 \\ \sqrt{3}x_2 - x_3 = 2x_3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}x_2 - 3x_3 = 0 \Leftrightarrow \underline{x_2 - \sqrt{3}x_3 = 0}$.

Man vrider x_2x_3-planet vinkeln $\theta = \frac{\pi}{3}$ i den negativa riktningen (medurs), sen speglar man en vektor i detta plan. $\mathcal{F}$ är således en spegling i planet $x_2 - \sqrt{3}x_3 = 0$.

<u>Uppgift 15.3 (Sid. 17)</u>

<u>Lösning</u>

a) $\mathcal{F}(e_1) = e_1 \times a = e_1 \times (e_1 + 2e_2 + 2e_3) = e_1 \times e_1 + 2e_1 \times e_2 + 2e_1 \times e_3 = 2e_3 - 2e_2 = -2e_2 + 2e_3$;

$\mathcal{F}(e_2) = e_2 \times (e_1 + 2e_2 + 2e_3) = e_2 \times e_1 + 2e_2 \times e_2 + 2e_2 \times e_3 = -e_3 + 2e_1 = 2e_1 - e_3$;

$\mathcal{F}(e_3) = e_3 \times (e_1 + 2e_2 + 2e_3) = e_3 \times e_1 + 2e_3 \times e_2 + 2e_3 \times e_3 = e_2 - 2e_1 = -2e_1 + e_2$;

$[\mathcal{F}(e_1)\ \mathcal{F}(e_2)\ \mathcal{F}(e_3)] = [-2e_2 + 2e_3\quad 2e_1 - e_3\quad -2e_1 + e_2] =$

$$= [e_1\ e_2\ e_3]\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [\mathcal{F}]_e = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix};$$

b) $\underline{f_1 = \frac{1}{3}a,\ f_2 = \frac{1}{3}(2e_1 - 2e_2 + e_3),\ f_3 = \frac{1}{3}(2e_1 + e_2 - 2e_3).}$

$f = (f_1, f_2, f_3)$ är en ON-bas, så matrisen med dess vektorer till kolonner är en ON-matris.

$$T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = T^t = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = T \Rightarrow [\mathcal{F}]_f =$$

$$= \mathbb{T}^t [\mathcal{F}]_e \mathbb{T} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -6 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & -9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

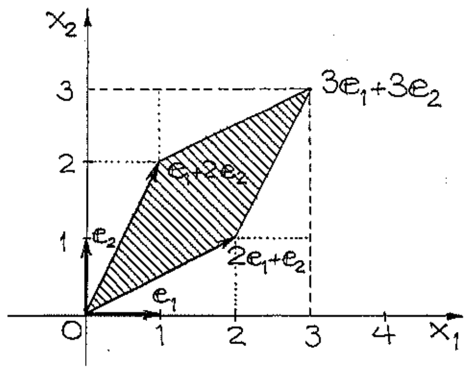
Teorin om basbyte finns i avsnitt 9.2 i boken.

Uppgift 15.4 (Sid. 17)

Lösning

$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Ae_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $Ae_2 = e\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ så.

$\mathcal{A} = |2 \cdot 2 - 1 \cdot 1| = 3$ ae.



Svar: Med $e = (e_1, e_2)$ standardbasen bestäms parallellogrammens sidor av $(2e_1+e_2, e_1+2e_2)$.

Anm $\mathcal{A}(Ae_1, Ae_2) = \det A \cdot \mathcal{A}(e_1, e_2) \Rightarrow |Ae_1 \times Ae_2| = |\det A| \cdot |e_1 \times e_2| \Rightarrow \det A = 3$. (Se figur!)

Uppgift 15.5 (Sid. 17)

Lösning

$$[\mathcal{F}(e_1)\ \mathcal{F}(e_2)] = [\tfrac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}e_2 \quad -\tfrac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}e_2] =$$

$$= [e_1\ e_2]\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\mathcal{F}]_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = ([\mathcal{F}]_e)^t$$

$$[\mathcal{F}^2]_e = [\mathcal{F} \circ \mathcal{F}]_e = [\mathcal{F}]_e \cdot [\mathcal{F}]_e = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[\mathcal{F}]_e = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \Leftrightarrow [\mathcal{F}^2]_e = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\mathcal{G}]_e = [\mathcal{F}^{-1}]_e = \begin{bmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = ([\mathcal{F}]_e)^t.$$

$\mathcal{F}$ vridning moturs $\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}$ vridning medurs.

Uppgift 15.6 (Sid. 17)

Lösning

(1) $f = eT \Leftrightarrow X_e = T X_f$, f och e baser ; $Y = X_f$.

(2)
$$q = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 =$$
$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_3^2 =$$
$$= (x_1+x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + x_3^2$$
$$= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = \quad\; x_2 - x_3 \\ y_3 = \qquad\quad x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 = \qquad y_2 + y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad y_3 \end{cases} \Leftrightarrow X_e = T\,Y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f = eT \Leftrightarrow [f_1\, f_2\, f_3] = [e_1\, e_2\, e_3]\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Svar: $f_1 = e\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $f_2 = e\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$, $f_3 = e\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$.

16. Nollrum och värderum

Uppgift 16.1 (Sid. 17)

Lösning

$$A\cdot X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] -2 \; -1 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] -2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] 1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = 2t \end{cases} \Rightarrow X = t\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{B} = e\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

är en bas för nollrummet; en bas för dess värderum (som uppspännes av kolonnerna) ska, enligt dimensionssatsen, ha 2 element; de två första kolonnerna är lineärt oberoende och kan således tas som en bas för $V(F)$. Värderummet är ett plan genom origo och nollrummet en linje (normal mot planet) gm origo; alltså är $N(F) \cap V(F) = \{0\}$. F är en ortogonalprojektion på planet $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, dvs $V(F)$.

Uppgift 16.2 (Sid. 18)

Lösning

$$\mathbb{B}\cdot \mathbb{X} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} 3 \quad 1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (1/4) \\ (1/2) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] -1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \mathbb{X} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \mathcal{N}(G) = \{ t[1\ 1\ 1]^t ;\ t \in \mathbb{R} \} \Rightarrow \dim \mathcal{N}(G) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dim V(G) = 3 - 1 = 2$ (dimensionssatsen).

Värderummet uppspännes av de två första kolonnerna i $\mathbb{B}$.

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = 0 \wedge \mu = 1 \Rightarrow \mathcal{N}(G) \subseteq V(G).$$

Svar: En bas för nollrummet är $\mathcal{B}_N = \{(1,1,1)\}$; en bas för värderummet är $\mathcal{B}_V = ((1,-3,-1),(1,1,1))$; Det är uppenbart att $\mathcal{N}(G) \subseteq V(G)$.

Uppgift 16.3 (Sid. 18)

Lösning

De polynom vars derivata är 0 är de konstanta; detta underrum till $\mathcal{P}_n$ alstras av 1, dvs dess dimension är 1.

Uppgift 16.4 (Sid. 18)

Lösning

(1) Låt $a = (a_1, a_2, a_3)_e$. Dess projektion på linjen $L: x = t\cdot(1,1,1),\ t \in \mathbb{R}$, är (med $n = (1,1,1)_e$)

$$a' = \frac{(a|n)}{(n|n)} n = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)\cdot(1,1,1)_e$$

$$\Leftrightarrow 3(a_1', a_2', a_3')_e = (a_1+a_2+a_3,\ a_1+a_2+a_3,\ a_1+a_2+a_3)_e$$

$$\Leftrightarrow 3 \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [G]_e;$$

$$\mathcal{N}(G) = \{x :\ x \perp (1,1,1)_e\} = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

(2) $$\mathcal{F}(x) = y \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] -1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] -1 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(\mathcal{F}) = \{y :\ -y_1 + y_2 + y_3 = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 - x_2 - x_3 = 0\}.$$

$$V(\mathcal{F}) \cap \mathcal{N}(G) : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x =$$

$= t\cdot(0,1,-1)_e \Leftrightarrow \underline{\mathcal{N}(G)\cap V(\mathcal{F}) = \{t\cdot(0,1,-1)_e : t\in\mathbb{R}\}}.$

Uppgift 16.5 (Sid. 18)

Lösning

$$A\cdot X = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] (-1)\ (2)\ (-1) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right] (1/3) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right] (3)\ (-1) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_4=0 \\ x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-x_2-x_4 \\ x_3=-x_2-x_4 \\ x_2=-s \\ x_4=-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=s+t \\ x_2=-s \\ x_3=s+t \\ x_4=-t \end{cases} \Leftrightarrow X = s\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$\Rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{F}) = [\,[1\ -1\ 1\ 0]^t, [1\ 0\ 1\ -1]^t\,] \Rightarrow \dim\mathcal{N}(\mathcal{F}) = 2.$

$\Rightarrow \dim V(\mathcal{F}) = 4-2 = 2$ (enl. dimensionssatsen;

Som bas för värderummet $V(\mathcal{F})$ tas de två första kolonnerna i A. Antag att $x\in V(\mathcal{F})\cap\mathcal{N}(\mathcal{F})$.

$x_1(1,-1,1,0)_e + x_2(1,0,1,-1)_e + x_3(1,1,-2,1)_e + x_4(2,2,-1,-1)_e =$

$$= (y_1,y_2,y_3,y_4)_e \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & y_1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & y_2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & y_3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & y_4 \end{array}\right] (1)\ (-1) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & y_1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & y_1+y_2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -y_1+y_3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & y_4 \end{array}\right] (1) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & y_1+y_4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & y_1+y_2+y_4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -y_1+y_3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & y_4 \end{array}\right] (1) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & y_1+y_4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & y_1+y_2+y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_2+y_3+y_4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & y_4 \end{array}\right] \Leftrightarrow y_2+y_3+y_4=0 \Leftrightarrow \underline{x_2+x_3+x_4=0.}$$

Uppgift 16.6 (Sid. 18)

Lösning

$$(1)\quad \mathcal{F}(x)=0 \Leftrightarrow A\cdot X = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] (-1)\ (-2) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] (1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow x_1=x_2=x_3=t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ -\infty<t<\infty; \quad \underline{\mathcal{N}(\mathcal{F}) = \{(1,1,1)_e\cdot t : t\in\mathbb{R}\}.}$$

(2) $V(\mathcal{F})$ uppspännes av de 2 första kolonnerna

$$x = s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s-t=x_1 \\ s-2t=x_2 \\ s-t=x_3 \end{cases} (-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2s-t=x_1 \\ -t=x_2-x_3 \\ s-t=x_3 \end{cases} (-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2s=x_1-x_2+x_3 \\ -t=x_2-x_3 \\ s-t=x_3 \end{cases} (-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2s=x_1-x_2+x_3 \\ t=-x_2+x_3 \\ s=-x_2+2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow 2(-x_2+2x_3)=$$

$= x_1 - x_2 + x_3 \Leftrightarrow -2x_2 + 4x_3 = x_1 - x_2 + x_3 \Leftrightarrow \underline{x_1 + x_2 - 3x_3 = 0}.$

(3) $\mathcal{N}(\mathcal{F}) \cap V(\mathcal{F}) = \{(0,0,0)\}.$

(4)
$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix};$$

$$A^2 \cdot X = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = t \Leftrightarrow X = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R},$$

$\Rightarrow \dim \mathcal{N}(\mathcal{F}^2) = 1 \Rightarrow \dim V(\mathcal{F}^2) = 2$ (dim-satsen).

(5) $V(\mathcal{F}^2) = V(\mathcal{F})$, ty $V(\mathcal{F}^2)$ uppspännes av de två första kolonnerna i $A^2 = [\mathcal{F}^2]_e$; (jfr med de två första kolonnerna i A).

Svar: En bas för $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ och $\mathcal{N}(\mathcal{F}^2)$ är $(1,1,1)_e$; en bas för $V(\mathcal{F})$ och $V(\mathcal{F}^2)$ är $((2,1,1)_e, (1,2,1)_e)$; en bas för $\mathcal{N}(\mathcal{F}) \cap V(\mathcal{F})$ är nollvektorn $\mathbb{0}$.

Anm. Avbildningen $\mathcal{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ med $[\mathcal{F}]_e = A$ (den givna matrisen) är en projektion på planet $x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$ parallellt med $v = (1,1,1)_e$.

Uppgift 16.7 (Sid. 18)

Lösning

(1) $\mathcal{N}(\mathcal{F}) = \{X \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{F}(X) = 0\}$, $[\mathcal{F}]_e = \mathbb{B}$, e standardbasen.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{F}) = [(1,1,1)].$$

(2) $\dim V(\mathcal{F}) = 3 - \dim \mathcal{N}(\mathcal{F}) = 3 - 1 = 2$; en bas för $V(\mathcal{F})$ är till exempel de två första kolonnerna i A.

(3) $\underline{\mathcal{N}(\mathcal{F}) \cap V(\mathcal{F}) = [(1,1,1)]}.$

(4)
$$[\mathcal{F}]_e = A \Rightarrow [\mathcal{F}^2]_e = A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 0 & 11 & -11 \\ 0 & -14 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathcal{N}(\mathcal{F}^2) = \{X \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{F}^2(X) = 0\} \cong \mathcal{N}(A^2)}.$$

$$A^2 X = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & 11 & -11 & 0 \\ 0 & -14 & 14 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow x_2 = x_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = s \\ x_3 = s \end{cases},\ r, s \in \mathbb{R},$$

$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = r(1,0,0) + s(0,1,1)$, ett plan $\Rightarrow \underline{\mathcal{N}(\mathcal{F}^2)} = \underline{[(1,0,0),(0,1,1)]} \Rightarrow \underline{V(\mathcal{F}^2) = [(6,11,-14)]}.$

17. Basbyten

Uppgift 17.1 (Sid. 19)

Lösning

$$(1)\quad \begin{cases} e_1+e_2+e_3=f_1 \\ \phantom{e_1+{}} e_2-e_3=f_2 \\ e_1+e_2 \phantom{{}-e_3} =f_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_3+e_3=f_1 \\ e_2=e_3+f_2 \\ e_1=-e_2+f_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_3=f_1-f_3 \\ e_2=f_1+f_2-f_3 \\ e_1=-f_1-f_2+2f_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_1=-f_1-f_2+2f_3 \\ e_2=f_1+f_2-f_3 \\ e_3=f_1-f_3 \end{cases}.$$

$$(2)\quad x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3=x_1(-f_1-f_2+2f_3)+x_2(f_1+f_2-f_3)+x_3(f_1-f_3)=$$

$$=(-x_1+x_2+x_3)f_1+(-x_1+x_2)f_2+(2x_1-x_2-x_3)f_3=x_1'f_1+x_2'f_2+x_3'f_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1'=-x_1+x_2+x_3 \\ x_2'=-x_1+x_2 \\ x_3'=2x_1-x_2-x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}.$$

Uppgift 17.2 (Sid. 19)

Lösning

$$\mathbb{X}_e=e\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=fA^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=f\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=f\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}=\mathbb{X}_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2x_1'+3x_2' \\ x_2=x_1'+2x_2' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1+7x_2=2x_1'+3x_2'+7(x_1'+2x_2')=\underline{9x_1'+17x_2'=0}.$$

Uppgift 17.3 (Sid. 19)

Lösning

$\underline{A:(1,-1,1)}$, $\underline{B:(1,0,1)}$, $\underline{C:(1,1,2)}$; $\underline{D:(\tfrac{3}{2},1,3)}$.

$$(1)\quad \left.\begin{aligned} \overrightarrow{OA}&=a=(1,-1,1)_e \\ \overrightarrow{OB}&=b=(1,0,1)_e \\ \overrightarrow{OC}&=c=(1,1,2)_e \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=(2,-1,2)_e=\overrightarrow{OR} \\ a+c=(2,0,3)_e=\overrightarrow{OS} \\ b+c=(2,1,3)_e=\overrightarrow{OT} \\ a+b+c=(3,0,4)_e=\overrightarrow{OV} \end{cases}$$

De övriga hörnen ligger i

$\underline{R:(2,-1,2)}$, $\underline{S:(2,0,3)}$, $\underline{T:(2,1,3)}$ resp. $\underline{V:(3,0,4)}$.

Den andra delen av uppgiften sparar vi...

Uppgift 17.4 (Sid. 19)

Lösning

$$[F]_e=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}=A.$$

$$F(u)=0 \Leftrightarrow AX=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] (1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] (-1/3) \sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \end{cases} \Leftrightarrow \mathbb{X} = t\,\mathbf{e}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{N}(\mathbb{F}) = [(1,1,1)] \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dim V(\mathbb{F}) = 3 - \dim \mathcal{N}(\mathbb{F}) = 3-1 = 2. \Rightarrow$ en bas för $V(\mathbb{F})$ är de två första kolonnerna, dvs. $\mathbf{e}[-2\ 1\ 1]^t$ och $\mathbf{e}[1\ -2\ 1]^t$. Den sökta basen är $\mathcal{B} = (\mathbf{e}[1\ 1\ 1]^t, \mathbf{e}[-2\ 1\ 1]^t, \mathbf{e}[1\ -2\ 1]^t)$;

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\mathbb{A}' = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{T}.}$$

$$[\mathbb{T}\,|\,\mathbb{E}_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] (-1)$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (-1/3) \\ (1/3) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right] (-1) \sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right] (2) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right] = [\mathbb{E}_3\,|\,\mathbb{T}^{-1}] \Rightarrow \mathbb{T}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbb{A}' = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{Y} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y_1 \\ 3y_2 \\ 3y_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 3y_1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3y_2 \quad (1) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3y_3 \quad (1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 3(y_1+y_2+y_3) = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3y_2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{y_1 + y_2 + y_3 = 0}$$

$$\mathbb{A}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi & -\sin\pi \\ 0 & \sin\pi & \cos\pi \end{bmatrix}}_{\mathbb{R}}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbb{P}}.$$

$\mathbb{P}$ är matrisen för en projektion i y_2y_3-planet och $\underline{\mathbb{R}\text{ är matrisen för en rotation i } y_1\text{-axeln}}$.

18. Linjära avbildningar och basbyte

Uppgift 18.1 (Sid. 19)

Lösning

En normalvektor till linjen $x_1+2x_2=0$ är $n=e_1+2e_2$. $\mathcal{F}$:s matris har basvektorernas bilder till kolonner.

$$\mathcal{F}(e_1)=e_1-\frac{(n|e_1)}{(n|n)}n=e_1-\frac{1}{5}(e_1+2e_2)=\frac{1}{5}(4e_1-2e_2);$$

$$\mathcal{F}(e_2)=e_2-\frac{(n|e_2)}{(n|n)}n=e_2-\frac{2}{5}(e_1+2e_2)=\frac{1}{5}(-2e_1+e_2);$$

$$\Rightarrow [\mathcal{F}]_e=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}.$$

$$f=[f_1\ f_2]=\left[\frac{1}{\sqrt5}e_1+\frac{2}{\sqrt5}e_2\ \ \frac{2}{\sqrt5}e_1-\frac{1}{\sqrt5}e_2\right]=[e_1\ e_2]\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}$$

$$=e\cdot\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}=e.\mathbb{T}\Leftrightarrow e=f.\mathbb{T}^{-1}=f.\mathbb{T}^t\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\mathcal{F}]_f=\mathbb{T}^t.[\mathcal{F}]_e\mathbb{T}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 10\\ 0 & -5\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Anm. $[\mathcal{F}]_e=\mathcal{F}$:s matris i basen e.

Uppgift 18.2 (Sid. 19)

Lösning

En normalvektor till linjen $x_1+2x_2=0$ är (jfr föreg. uppgift) $n=e_1+2e_2$.

$$\mathcal{F}(e_1)=e_1-2\frac{(e_1|n)}{(n|n)}n=e_1-\frac{2}{5}(e_1+2e_2)=\frac{1}{5}(3e_1-4e_2);$$

$$\mathcal{F}(e_2)=e_2-2\frac{(e_2|n)}{(n|n)}n=e_2-\frac{4}{5}(e_1+2e_2)=\frac{1}{5}(-4e_1-3e_2);$$

$$[\mathcal{F}]_e=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -4\\ -4 & -3\end{bmatrix}\Rightarrow[\mathcal{F}]_f=\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\cdot[\mathcal{F}]_e\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -4\\ -4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 10\\ -10 & -5\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Uppgift 18.3 (Sid. 20)

Lösning

$\pi:\ x_1+x_2+x_3=0\ \Rightarrow n=(1,1,1)_e=e[1\ 1\ 1]^t$ är en normalvektor till π; $u_1=e[1,-1,0]^t$ och $u_2=e[1\ 1\ -2]^t$ är vektorer parallella med π; Om $\mathcal{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ är en ortogonalprojektion på π

så är $\mathcal{F}(n)=0$, $\mathcal{F}(u_1)=u_1$ och $\mathcal{F}(u_2)=u_2$. I basen $\mathcal{B}=(n,u_1,u_2)$ har vi matrisen $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}$:

$$[\mathcal{F}(n)\ \mathcal{F}(u_1)\ \mathcal{F}(u_2)]=[n\ u_1\ u_2]\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}};$$

Med $e=(e_1,e_2,e_3)$ som standardbas fås

$$[n\ u_1\ u_2]=[e_1\ e_2\ e_3]\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&0&-2\end{bmatrix}=e\mathbb{T}\Rightarrow\mathbb{T}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&0&-2\end{bmatrix};$$

Vi har sambandet $\mathbb{T}^{-1}[\mathcal{F}]_e\mathbb{T}=[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}$, så vi behöver den inversa till $\mathbb{T}$.

$$[\mathbb{T}|\mathbb{E}_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&-1&1&0&1&0\\1&0&-2&0&0&1\end{array}\right]\begin{matrix}\\ \\ (-1)\end{matrix}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&1&3&1&0&-1\\0&-1&3&0&1&-1\\1&0&-2&0&0&1\end{array}\right]\begin{matrix}\\ (1)\\ \\ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&0&6&1&1&-2\\0&-1&3&0&1&-1\\1&0&-2&0&0&1\end{array}\right]\begin{matrix}\\ (-2)\\ (3)\end{matrix}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&0&6&1&1&-2\\0&2&-6&0&-2&2\\3&0&-6&0&0&3\end{array}\right]\begin{matrix}(1)\\ \\ \\ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&0&6&1&1&-2\\0&2&0&1&-1&0\\3&0&0&1&1&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&0&0&1&1&1\\0&2&0&1&-1&0\\0&0&6&1&1&-2\end{array}\right]\begin{matrix}(2)\\ (3)\\ \\ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}6&0&0&2&2&2\\0&6&0&3&-3&0\\0&0&6&1&1&-2\end{array}\right]\Rightarrow\mathbb{T}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&2&2\\3&-3&0\\1&1&-2\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{T}^{-1}[\mathcal{F}]_e\mathbb{T}=[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}\Leftrightarrow[\mathcal{F}]_e=\mathbb{T}\cdot[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}\cdot\mathbb{T}^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow[\mathcal{F}]_e=\frac{1}{6}\mathbb{T}\cdot\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&2\\3&-3&0\\1&1&-2\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\mathbb{T}\begin{bmatrix}0&0&0\\3&-3&0\\1&1&-2\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\3&-3&0\\1&1&-2\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}.$$

<u>Uppgift 18.4 (Sid. 20)</u>

<u>Lösning</u>

$\pi: x_1+x_2+x_3=0\Rightarrow n=e[1\ 1\ 1]^t$ normalvektor

$$[\mathcal{F}]_e=\mathbb{E}_3-2\hat{n}^t\hat{n}=\mathbb{E}_3-2\cdot\frac{1}{3}[1\ 1\ 1]^t\cdot[1\ 1\ 1]=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}[1\ 1\ 1]=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\frac{2}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=$$

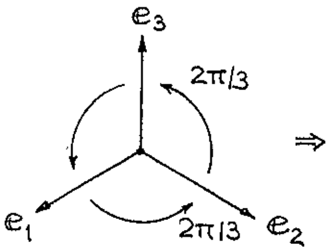
$$=\frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{bmatrix}$$

<u>Anm.</u> Om $a=e[a_1\ a_2\ a_3]^t$ och $a'=S(a)$ så är $a'=a-2\dfrac{(a|n)}{(n|n)}n$.

Uppgift 18.5 (Sid. 20)

Lösning

Den sökta matrisen har bilderna av enhetsvektorerna till kolonner.



$$\Rightarrow R:\begin{cases} e_1 \longrightarrow e_2 \\ e_2 \longrightarrow e_3 \\ e_3 \longrightarrow e_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R(e_1)=e_2 \\ R(e_2)=e_3 \\ R(e_3)=e_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [R(e_1)\ R(e_2)\ R(e_3)] = [e_2\ e_3\ e_1] = [e_1\ e_2\ e_3]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow [R]_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Anm. $R(e_1)+R(e_2)+R(e_3) = e_2+e_3+e_1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow R(e_1+e_2+e_3) = e_1+e_2+e_3.$$

Vektorn $e_1+e_2+e_3 = e[1\ 1\ 1]^t$ pekar rakt utåt

Uppgift 18.6 (Sid. 20)

Lösning

Tre tredimensionella vektorer tjänar som bas för $\mathbb{R}^3$ endast om de är lineärt oberoende.

(1) $f_1 = e_1 = e\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow f_3 =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = e\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow f_1\cdot f_2\times f_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

$f = (f_1, f_2, f_3)$ är alltså en bas för $\mathbb{R}^3$.

(2) $g_1 = e\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow g_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow g_3 =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = e\begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow g_1\cdot(g_2\times g_3) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

$g = (g_1, g_2, g_3)$ är <u>ingen bas</u> för $\mathbb{R}^3$.

(3) $F(f_1) = f_2,\ F(f_2) = f_3,\ F(f_3) = e\begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} = -4f_1+3f_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow [F(f_1)\ F(f_2)\ F(f_3)] = [f_2\ f_3\ -4f_1+3f_3] = f\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$

19. Egenvärden och egenvektorer

Uppgift 19.1 (Sid. 20)

Lösning

a) $\pi: x_1+x_2+x_3=0$; $n_1=(1,1,1)$ normalvektor.
Projektionen av n i π är nollvektorn 0,
dvs $F(n)=0=0\cdot n$; egenvärdet är $\lambda=0$.
Vektorer parallella med π avbildas på sig själva; $F(v)=v=1\cdot v$, dvs $\lambda=1$.
Resultat: Alla multipler av $n=(1,1,1)$ är egenvektorer med egenvärdet 0; alla vektorer parallella med π är egenvektorer med egenvärdet 1.

b) $\pi: x_1+x_2+x_3=0$; F spegling i π.
$n=(1,1,1)$; spegelbilden är $-n$, dvs $F(n)=(-1)n$;
egenvärdet är $\lambda=-1$. Vektorer parallella med π förblir oförändrade; $F(n)=n=1\cdot n \Rightarrow \lambda=1$.
Anm. I den analytiska geometrin är alla vektorer fria och kan parallellförflyttas runt i det åskådliga rummet.
Definition: En vektor i $\mathbb{R}^3$ är ekvivalensklassen av alla lika långa och lika riktade pilar i det som kallas det "åskådliga rummet".

c) $v=e_1+e_2+e_3$; R = rotation kring v 90°.
När v roteras kring sig själv förblir den invariant: $R(v)=v=1\cdot v$; egenvärde $\lambda=1$.

d) $v=e_1+e_2+e_3$; R = rotation 180° kring v.
v är en egenvektor med egenvärdet 1; alla vektorer u vinkelräta mot v avbildas på $-u$;
$R(u)=-u=(-1)u$; $\lambda=-1$ är motsvarande egenvärde.

Uppgift 19.2 (Sid. 20)

Lösning: e är standardbasen

Vektorerna ges som rader, vilket är vanligt i koordinatgeometrin (analytiska geometrin).

$$A\mathbb{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+2x_2 \\ 5x_1+4x_2 \end{bmatrix}; \quad A = [\mathcal{F}]_e.$$

$\mathcal{F}(\mathbb{x}) = (x_1+2x_2,\ 5x_1+4x_2)$, $\mathbb{x} = (x_1, x_2)$.

(1) $\mathcal{F}(1,-1) = (1-2,\ 5-4) = (-1,1) = (-1)(1,-1) \Rightarrow \lambda = -1$;

(2) $\mathcal{F}(-2,2) = (-2+4,\ -10+8) = (2,-2) = (-1)\cdot(-2,2) \Rightarrow \lambda = -1$;

(3) $\mathcal{F}(0,0) = (0,0)$; nollvektorn kan inte vara en egenvektor; i denna kurs är spektrat diskret; alltså inte kontinuerlig.

(4) $\mathcal{F}(1,2) = (1+4,\ 5+8) = (5,13) \neq \lambda(1,2)$; ej egenvektor.

(5) $\mathcal{F}(2,5) = (2+10,\ 10+20) = (12,30) = 6\cdot(2,5) \Rightarrow \lambda = 6$.

Svar: $(-1,1)$ och $(2,-2)$ är egenvektorer hörande till egenvärdet -1; $t\cdot(1,-1)$, $t \in \mathbb{R}$, är samtliga egenvektorer; $t \neq 0$, förstås.
$(2,5)$ är också egenvektor till $\mathcal{F}$ med egenvärdet 6; $t(2,5)$ är samtliga egenvektorer.

Uppgift 19.3 (Sid. 20)

Lösning Se nästa sida.

$$[\mathcal{F}]_e = A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (*)$$

En avbildning bestäms av bilderna till enhetsvektorerna e_1, e_2, e_3.

$$\mathcal{F}: \begin{cases} e_1 \mapsto -e_1 \\ e_2 \mapsto 2e_1 + e_2 \\ e_3 \mapsto 2e_1 + 2e_2 - e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{F}(e_1) = -e_1 + 0e_2 + 0e_3 \\ \mathcal{F}(e_2) = 2e_1 + e_2 + 0\cdot e_3 \\ \mathcal{F}(e_3) = 2e_1 + 2e_2 - 1e_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\mathcal{F}(e_1)\ \mathcal{F}(e_2)\ \mathcal{F}(e_3)] = [e_1\ e_2\ e_3]\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = eA.$$

A:s kolonner är enhetsvektorernas bilder i e.

(1) $$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda = -1, -1, 1.}$$

(2) $\underline{\lambda = 1}$: $$(A-E)\mathbb{X} = \mathbb{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = -t \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{X}^{(1)} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

(3) $\underline{\lambda = -1}$: $$(A+E)\mathbb{X} = \mathbb{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \wedge x_3$ godtyckligt $\Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = -s \\ x_3 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ -\infty < s,t < +\infty.$$

Resultat: En bas för $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till $\mathcal{F}$ är

$$\beta = ((1,1,0),(1,0,0),(0,1,-1)).$$

Uppgift 19.4 (Sid. 21)

Lösning

$$[\mathcal{F}]_e = A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) $$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)+1 = \lambda^2-2\lambda+1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda=1}.$$

$$\lambda=1 \Rightarrow (A-E)\mathbb{X} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathbb{X}^{(1)} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$; det finns ingen bas för $\mathbb{R}^2$ bestående av egenvektorer till $\mathcal{F}$.

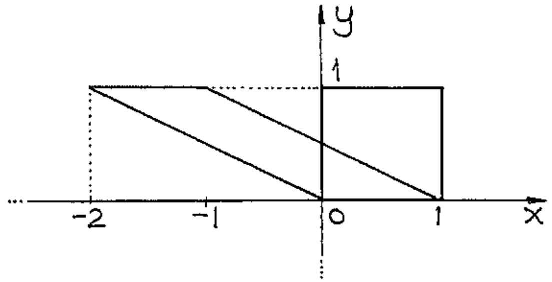
En ortonormerad bas med de önskade egenskaperna är

$$\beta = \left(\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

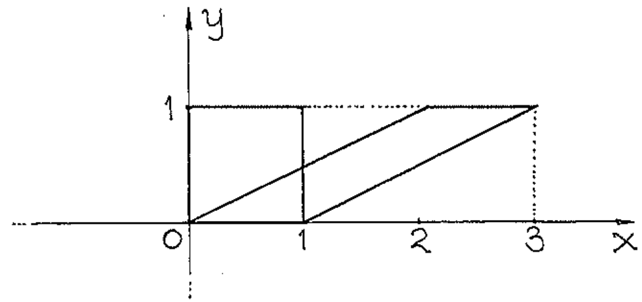
$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathcal{F}]_\beta = T^t \cdot [\mathcal{F}]_e T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A'.$$

Anm. Min bas har positiv orientering, författarnas bas är negativt orienterad; därför fick jag minustecken framför 2.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Avbildningen är en skjuvning en faktor 2 parallellt med x-axeln i negativ riktning. Författarnas skjuvning är den motsatta.



Övning 19.5 (Sid. 21)

Lösning

$$[\mathcal{F}]_e = \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{F}$:s matris i basen $\mathbb{e}$ är en diagonal blockmatris, dvs $\mathbb{A} = \operatorname{diag}(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2) = \mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_2$, där

$$\mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(1) $|\mathbb{A}_1 - \lambda \mathbb{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$

$\underline{\lambda_1 = 1} \Rightarrow (\mathbb{A}_1 - \mathbb{E})\mathbb{X} = \mathbb{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = -s \end{cases} \Rightarrow \mathbb{X}^{(1)} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{X}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ normerad

Den andra egenvektorn till $\mathbb{A}_1$ är $\mathbb{X}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ty $\mathbb{A}_1$ är symmetrisk.

Motsvarande egenvektorer till $\mathcal{F}$ är

$$\hat{e}_1 = \mathbb{e} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{e}_2 = \mathbb{e} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(2) $\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbb{A}_2 - \lambda \mathbb{E}| = (\lambda-3)^2 - 2^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 1 \\ \lambda_4 = 5 \end{cases};$

$\lambda_3 = 1 \Rightarrow (\mathbb{A} - \mathbb{E})\mathbb{X} = \mathbb{0} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 = s$

$$\Leftrightarrow \mathbb{X}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbb{A}_2$ är symmetrisk varför $\mathbb{X}^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Motsvarande egenvektorer till $\mathcal{F}$ är

$$\hat{e}_3 = \mathbb{e} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \hat{e}_4 = \mathbb{e} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Svar: En sådan bas är $\hat{\mathbb{e}} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4)$ med $\hat{e}_i$ som ovan. (Andra alternativ finns).

Övning 19.6 (Sid. 21)

Lösning

$$[\mathcal{F}]_e = \mathbb{A} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\mathbb{B}.$$

A:s egenvärden är lika med $\frac{1}{3}\lambda$, där λ är B:s egenvärden; det visas på följande sätt:

$\det(\frac{1}{3}\mathbb{B}-\frac{1}{3}\lambda\mathbb{E})=\det(\frac{1}{3}(\mathbb{B}-\lambda\mathbb{E}))=(\frac{1}{3})^2\det(\mathbb{B}-\lambda\mathbb{E})$;

$$|\mathbb{B}-\lambda\mathbb{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2-1=(\lambda-1)(\lambda-3)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=3\end{cases}.$$

A:s egenvärden är alltså $\frac{1}{3}$ resp. 1; egenvektorerna är däremot desamma.

$$\underline{\lambda=1}\Rightarrow(\mathbb{B}-\mathbb{E})\mathbb{X}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{array}\right]\Leftrightarrow x_1=x_2\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=s\\ x_2=s\end{cases}$$

$$\Rightarrow\mathbb{X}^{(1)}=s\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix};\ |\mathbb{X}^{(1)}|=1\Rightarrow s=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow f_1=\mathbb{e}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

$A=A^t$, dvs A är symmetrisk, så enligt spektralsatsen är den andra egenvektorn vinkelrät mot f_1; $f_2=\mathbb{e}[\frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{\sqrt{2}}]^t$;

$$\mathbb{T}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\Rightarrow[\mathcal{F}]=\mathbb{T}^t\cdot[\mathcal{F}]_e\cdot\mathbb{T}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\1&-3\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&0\\0&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3&0\\0&1\end{bmatrix}=\mathrm{diag}(\tfrac{1}{3},1).$$

I fortsättningen kommer jag att använda $[\mathcal{F}]_e$ och $[\mathcal{F}]_f$ i stället för A_e och A_f.

$$([\mathcal{F}]_e)^5=(\mathbb{T}\cdot[\mathcal{F}]_f\cdot\mathbb{T}^t)^5=\mathbb{T}([\mathcal{F}]_f)^5\cdot\mathbb{T}^t=$$

$$=\mathbb{T}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&1\end{bmatrix}^5\cdot\mathbb{T}^t=\mathbb{T}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{3^5}&0\\0&1\end{bmatrix}\mathbb{T}^t=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3^5}&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^{-5}&3^{-5}\\1&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+3^{-5}&-1+3^{-5}\\-1+3^{-5}&1+3^{-5}\end{bmatrix}.$$

$$([\mathcal{F}]_e)^{-1}=(\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix})^{-1}=3\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}=[\mathcal{F}^{-1}]_e.$$

$\underline{\text{Anm.}}$ $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$; $ad-bc\neq0$.

$$([\mathcal{F}]_e)^n=(\mathbb{T}\cdot[\mathcal{F}]_f\cdot\mathbb{T}^t)^n=\mathbb{T}\cdot[\mathcal{F}]_f^n\cdot\mathbb{T}^t=(n=1,2,3,\ldots)=$$

$$=\mathbb{T}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\mathbb{T}^t=\mathbb{T}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{3^n}&0\\0&1\end{bmatrix}\mathbb{T}^t=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+3^{-n}&-1+3^{-n}\\-1+3^{-n}&1+3^{-n}\end{bmatrix};$$

$$\lim_{n\to\infty}[\mathcal{F}^n]_e=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix}1+3^{-n}&-1+3^{-n}\\-1+3^{-n}&1+3^{-n}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}.$$

Gränsvärdet kan bestämmas tidigare

$$\lim_{n\to\infty}([\mathcal{F}]_e)^n=\mathbb{T}\cdot\lim_{n\to\infty}([\mathcal{F}]_f)^n\cdot\mathbb{T}^t.$$

20. Egenvektorer och kvadratiska former

Uppgift 20.1 (Sid. 21)

Lösning

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad [F]_e = A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad e = [e_1, e_2, e_3]$$

(1) $$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 6-\lambda & 6-\lambda & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (6-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (6-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(6-\lambda)(-2-\lambda) = \lambda(6-\lambda)(2+\lambda) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda = 0, -2, 6.}}$$

(2) $$(A - 0E)X = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = t \end{cases} \Leftrightarrow X^{(1)} = e \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t \Rightarrow \hat{e}_1 = e \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

(3) $$(A + 2E)X = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -t \end{cases} \Rightarrow X^{(2)} = e \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} t \Rightarrow \hat{e}_2 = e \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

(4) Matrisen A är symmetrisk så den tredje egenvektorn som hör till egenvärdet $\lambda = 6$ är kryssprodukten av $\hat{e}_1$ och $\hat{e}_2$.

Basen ifråga är $\hat{e} = [\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3]$, där

$$\hat{e}_1 = e \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad \hat{e}_2 = e \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \hat{e}_3 = e \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Uppgift 20.2 (Sid. 21)

Lösning

a) $$Q(u) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 2x_1^2 -$$

$$- x_1x_2 - x_1x_3 + (-x_2x_1 + 2x_2^2 - x_2x_3) + (-x_3x_1 - x_3x_2 + 2x_3^2) =$$

$$= x_1(2x_1 - x_2 - x_3) + x_2(-x_1 + 2x_2 - x_3) + x_3(-x_1 - x_2 + 2x_3) =$$

$$= [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbb{X}^t A \mathbb{X} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = A^t \wedge \mathbb{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};$$

b) $$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -\lambda & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\lambda = 0 \vee \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 3.}$$

(1) $\underline{\lambda=0}$: $$(A-0E)\mathbb{X} = \mathbb{O} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = t \end{cases} \Rightarrow \mathbb{X}^{(1)} = \mathbb{e}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t, \; t \in \mathbb{R}.$$

$$|\mathbb{X}^{(1)}| = 1 \Rightarrow \sqrt{3}\,t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \hat{e}_1 = \mathbb{e}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

(2) $\underline{\lambda=3}$: $$(A-3E)\mathbb{X} = \mathbb{O} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{X} = \mathbb{e}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \mathbb{e}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot t \Rightarrow \hat{e}_2 = \mathbb{e}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \hat{e}_3 = \mathbb{e}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

En kanonisk bas är t.ex. $\mathcal{B} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, där $\hat{e}_i$ är som ovan.

b) $$\mathbb{T} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{T}^t A \mathbb{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \underline{diag(0,3,3)}.$$

$$\underline{f = e\mathbb{T} \Leftrightarrow e = f\mathbb{T}^t} \Leftrightarrow \underline{(\mathbb{X} = \mathbb{T}\mathbb{Y} \Leftrightarrow \mathbb{Y} = \mathbb{T}^t\mathbb{X})} \quad (*)$$

$$Q(u) = \mathbb{X}^t A \mathbb{X} = \mathbb{Y}^t(\mathbb{T}^t A \mathbb{T})\mathbb{Y} = \mathbb{Y}^t diag(0,3,3) \cdot \mathbb{Y} =$$

$$= 3y_2^2 + 3y_3^2. \quad (*)$$

$$Q(u) = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} 3y_1^2 + 3y_2^2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = t \wedge y_2 = y_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = t f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3) \cdot t, \; t \in \mathbb{R}.$$

c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y_2^2 + y_3^2 = 1 \Rightarrow$ ytan är en rak cirkulär kon med rotationsaxeln $f_1 \cdot t$, $t \in \mathbb{R}$; ett plan vinkelrätt mot denna axel är $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ $(y_1 = 0)$. $x_1 + x_2 + x_3 = C$, $C \in \mathbb{R}$, har samma egenskap.

Övning 20.3 (Sid. 22)

Lösning

$$Q(u) = Q(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1^2 + \sqrt{3}x_1x_2 + 2x_2^2 \Rightarrow 2Q(u) = 2x_1^2 +$$

$$+2\sqrt{3}x_1x_2+4x_2^2 = 2x_1^2+\sqrt{3}x_1x_2+(\sqrt{3}x_2x_1+4x_2^2) =$$

$$= x_1(2x_1+\sqrt{3}x_2)+x_2(\sqrt{3}x_1+4x_2) = [x_1\ x_2]\begin{bmatrix}2x_1+\sqrt{3}x_2\\ \sqrt{3}x_1+4x_2\end{bmatrix} =$$

$$= [x_1\ x_2]\begin{bmatrix}2 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = X^tAX \Rightarrow A = \begin{bmatrix}2 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 4\end{bmatrix} = A^t.$$

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}2-\lambda & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 4-\lambda\end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-4)-3 = \lambda^2-6\lambda+5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-5) = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda=1} \vee \underline{\lambda=5}.$$

$\underline{\lambda=1}$: $(A-E)X = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c}1 & \sqrt{3} & 0\\ \sqrt{3} & 3 & 0\end{array}\right] \overset{(-\sqrt{3})}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_1+\sqrt{3}x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}x_1 = \sqrt{3}s\\ x_2 = -s\end{cases} \Leftrightarrow X^{(1)} = s\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ -1\end{bmatrix},\ s\neq 0.$$

$|X^{(1)}| = 1 \Rightarrow s = 2^{-1}$ (normeringsfaktor).

$A = A^t \Rightarrow$ den andra egenvektor hörande till $\lambda = 5$, är vinkelrät mot $X^{(1)}$. En högerorienterad ON-bas bestående av egenvektorer till A är följande:

$$f_1 = e\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2\\ -1/2\end{bmatrix},\ f_2 = e\begin{bmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{bmatrix}.$$

Jag bildar härnäst diagonaliseringsmatrisen

$$T = \begin{bmatrix}\sqrt{3}/2 & 1/2\\ -1/2 & \sqrt{3}/2\end{bmatrix}.$$

$$X = TY \Leftrightarrow X^t = Y^tT^t \Rightarrow 2Q(u) = X^tAX =$$

$$= Y^tT^tATY = Y^t(T^tAT)Y =$$

$$= Y^t\cdot \mathrm{diag}(1,5)\cdot Y = y_1^2+5y_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q(u) = \frac{1}{2}y_1^2+\frac{5}{2}y_2^2\ ;$$

<u>Anm.</u> T ON-matris $\Rightarrow$ avståndet <u>bevaras</u>, dvs $x^2+y^2 = 1 \Leftrightarrow y_1^2+y_2^2 = 1$.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2) \le \frac{1}{2}y_1^2+\frac{5}{2}y_2^2 = Q(u) \le \frac{5}{2}(y_1^2+y_2^2) = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\frac{1}{2} \le Q(u) \le \frac{5}{2}}.\quad (*)$$

I riktningen $f_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}e_1-e_2)$ är $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}x_1$ s.a.

$$x_1^2+\sqrt{3}x_1x_2+2x_2^2 = \frac{2}{3}x_1^2 = \frac{1}{2} = \min_{|u|=1} Q(u) \Leftrightarrow x_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow x_2 = \mp\frac{1}{2} \Leftrightarrow P_1: (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ och $P_2: (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

I riktningen $f_2 = \frac{1}{2}(e_1+\sqrt{3}e_2)$ har vi $x_2 = \sqrt{3}x_1$

$$\Rightarrow x_1^2+\sqrt{3}x_1x_2+2x_2^2 = 10x_1^2 = \frac{5}{2} = \max_{|u|=1} Q(u) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x_1 = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; $P_3: (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ och $P_4: (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Svar: Största värdet $\frac{5}{2}$ antas i punkterna $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ och $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$; minsta värdet $\frac{1}{2}$ antas i punkterna $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ och $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

Anm. Liknande problem tas upp i ickelinjär analys (flervariabelanalys) samt i optimeringsläran.

Övning 20.4 (Sid. 22)

Lösning

$$Q(\mathbf{u}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 =$$

$$= x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + (x_2x_1 + x_2^2 - x_2x_3) + (x_3x_1 - x_3x_2 + x_3^2)$$

$$= x_1(x_1+x_2+x_3) + x_2(x_1+x_2-x_3) + x_3(x_1-x_2+x_3) =$$

$$= [x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_2-x_3 \\ x_1-x_2+x_3 \end{bmatrix} = \mathbb{X}^t \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbb{X};$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{A}^t \Rightarrow |\mathbb{A} - \lambda \mathbb{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda(\lambda-1)-2) = (2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2) =$$

$$= (\lambda-2)^2(-\lambda-1); \quad |\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E}| = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda = -1, 2, 2.}$$

$\underline{\lambda = -1}$: $(\mathbb{A}+\mathbb{E})\mathbb{X} = \mathbb{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = -t \end{cases} \Rightarrow \mathbb{X}^{(1)} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{e}_1 = e\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$\underline{\lambda = 2}$: $(\mathbb{A} - 2\mathbb{E})\mathbb{X} = \mathbb{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 + x_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = s + t \\ x_2 = s \\ x_3 = \quad +t \end{cases} \Leftrightarrow \mathbb{X} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\hat{e}_2 = e\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = e\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ (förkastas).}$$

Anm. Egenvärdet $\lambda = 2$ har multipliciteten 2, dvs degeneration förekommer; alla vektorer vinkelräta mot $\hat{e}_1$ är egenvektorer.

forts

$$T=\begin{bmatrix}1/\sqrt3 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt6\\ -1/\sqrt3 & 1/\sqrt2 & -1/\sqrt6\\ -1/\sqrt3 & 0 & 2/\sqrt6\end{bmatrix}\Rightarrow T^tAT=D=\underline{diag(-1,2,2)};$$

$$X=T\cdot Y\Rightarrow \underline{Q(u)}=X^tAX=Y^t(T^tAT)Y=Y^tDY=$$

$$=\underline{-y_1^2+2y_2^2+2y_3^2}.$$

T ON-matris $\Rightarrow |X|=|Y|$ så att $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$;

$$-1=-1(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\leq -y_1^2+2y_2^2+2y_3^2\leq 2(y_1^2+y_2^2+y_3^2)=2$$

$$\Leftrightarrow -1\leq -y_1^2+2y_2^2+2y_3^2\leq 2\Leftrightarrow -1\leq Q(u)\leq 2.$$

$Q_{min}=-1$ antas i riktningen $\hat e_1$.

$$Q(te_1-te_2-te_3)=t^2+t^2+t^2-2t^2-2t^2-2t^2=-3t^2=-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=\pm 1/\sqrt3\Rightarrow P_1:(\tfrac{1}{\sqrt3},-\tfrac{1}{\sqrt3},-\tfrac{1}{\sqrt3}),\ P_2:(-\tfrac{1}{\sqrt3},\tfrac{1}{\sqrt3},\tfrac{1}{\sqrt3}).$$

$Q_{max}=2$ antas för alla punkter på enhetssfärens storcirkel som utgör skärningen med planet $x_1-x_2-x_3=0$

Uppgift 20.5 (Sid. 22)

Lösning

$$\underline{u=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3}.$$

$$Q(u)=17x_1^2-12x_1x_2+8x_2^2=X^tAX\Rightarrow A=\begin{bmatrix}17&-6\\-6&8\end{bmatrix}.$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}17-\lambda & -6\\ -6 & 8-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-8)(\lambda-17)-36=\lambda^2-25\lambda+$$

$$+100=(\lambda-5)(\lambda-20)=0\Leftrightarrow \underline{\lambda=5}\vee\underline{\lambda=20}.$$

$$\underline{\lambda=5}:\ (A-5E)X=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{cc|c}12&-6&0\\-6&3&0\end{array}\right]\overset{(1/2)}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c}12&-6&0\\0&0&0\end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow 2x_1=x_2\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=t\\x_2=2t\end{cases}\Rightarrow X^{(1)}=t\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\Rightarrow X^{(2)}=u\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}.$$

En ON-bas bestående av egenvektorer till A är $\hat e=(\hat e_1,\hat e)$, där

$$\hat e_1=e\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\quad \hat e_1=e\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}.$$

Anm. $A=A^t$, så man behöver inte upprepa räkningarna med $\lambda=20$ (spektralsatsen).

$$T=\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}1&-2\\2&1\end{bmatrix};\ X=TY\Rightarrow X^tAX=Y^tT^tAT\cdot Y=$$

$$=Y^tDY=Y^t\,diag(5,20)Y=5y_1^2+20y_2^2\overset{!}{=}20\Leftrightarrow$$

$\frac{y_1^2}{4}+y_2^2=1$, en ellips med $a=2$ och $b=1$; dess area är som bekant $\pi ab=2\pi$ areaenheter.

Huvudaxelriktningarna är parallella med $\hat{e}_1$ resp. $\hat{e}_2$.

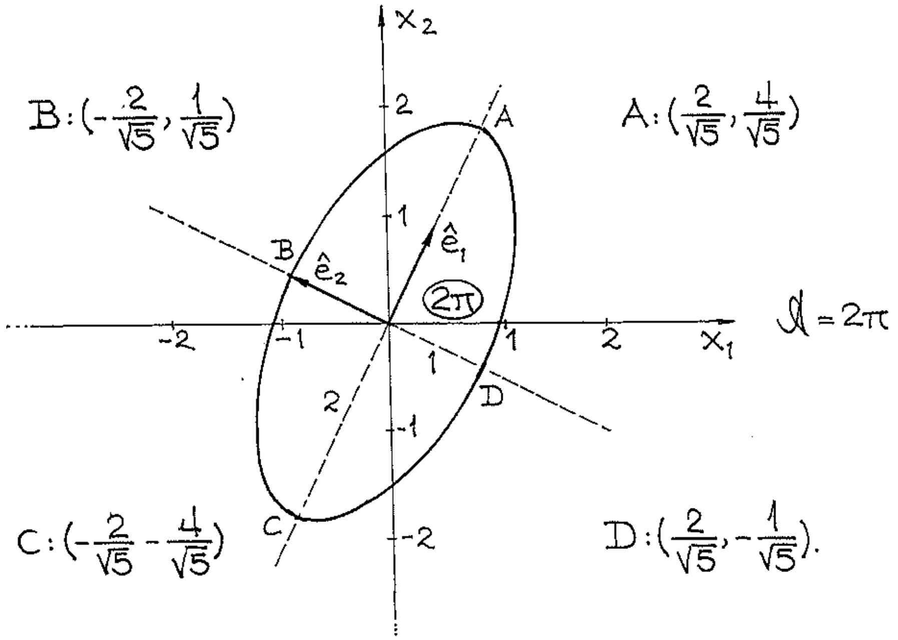
(1) $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t \end{cases} \Rightarrow 17x_1^2-12x_1x_2+8x_2^2 = 17t^2-12\cdot t\cdot 2t+8\cdot 4t^2 =$

$= 25t^2 = 20 \Leftrightarrow t^2 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow t = \frac{\pm 2}{\sqrt{5}} \Rightarrow P_\pm : \frac{\pm 2}{\sqrt{5}}(1, 2).$

(2) $\begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = t \end{cases} \Rightarrow 17x_1^2-12x_1x_2+8x_2^2 = 68t^2+24t^2+8t^2 =$

$= 100t^2 = 20 \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow P_\pm : \pm\frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1).$

<u>Svar</u>: Kurvan är en ellips som i figuren!



Uppgift 20.6 (Sid. 22)

<u>Lösning</u>

$$3x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\sqrt{3}x_1x_3 = 1.$$

$$3x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\sqrt{3}x_1x_3 = 3x_1^2+0x_1x_2+\sqrt{3}x_1x_3 +$$

$$+(0x_2x_1+x_2^2+0x_2x_3)+(\sqrt{3}x_3x_1+0x_3x_2+x_3^2) =$$

$$= x_1(3x_1+0x_2+\sqrt{3}x_3)+x_2(0x_1+x_2+0x_3)+x_3(\sqrt{3}x_1+0x_2+x_3) =$$

$$= [x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix} 3x_1+0x_2+\sqrt{3}x_3 \\ 0x_1+x_2+0x_3 \\ \sqrt{3}x_1+0x_2+x_3 \end{bmatrix} = [x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix} 3 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{A}^t.$$

$$|\mathbb{A}-\lambda\mathbb{E}| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)((\lambda-1)(\lambda-3)-3) = (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda) =$$

$$= \lambda(1-\lambda)(\lambda-4) = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda=0} \vee \underline{\lambda=1} \vee \underline{\lambda=4}.$$

(1) $\underline{\lambda = 0}$: $(\mathbb{A}-0\mathbb{E})\mathbb{X} = \mathbb{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} -1/\sqrt{3} \end{matrix} \sim$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1+\sqrt{3}x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -\sqrt{3}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -\sqrt{3}t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{X}^{(1)} = t\begin{bmatrix}1\\0\\-\sqrt{3}\end{bmatrix} \Rightarrow \hat{e}_1 = e\,\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\-\sqrt{3}\end{bmatrix} \text{ (normerad).}$$

(2) $\underline{\lambda=1}$: $(A-1\cdot E)\mathbb{X}=\mathbb{O} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}2&0&\sqrt{3}&0\\0&0&0&0\\\sqrt{3}&0&0&0\end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases}2x_1+\sqrt{3}x_2=0\\x_2=t\\\sqrt{3}x_1=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_1=0\\x_2=t\\x_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \mathbb{X}^{(2)}=t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \hat{e}_2 = e_2 = e\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

(3) Den tredje egenvektor är $\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = e\,\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\0\\1\end{bmatrix}$; detta enligt spektralsatsen.

$$\mathbb{T} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&\sqrt{3}\\0&2&0\\-\sqrt{3}&0&1\end{bmatrix}.$$

(4) $\mathbb{X}=\mathbb{T}\mathbb{Y} \Rightarrow \mathbb{X}^t A\mathbb{X} = \mathbb{Y}^t\mathbb{T}^t A\mathbb{T}\cdot\mathbb{Y} = \mathbb{Y}^t\cdot\mathbb{D}\cdot\mathbb{Y} =$

$$= \mathbb{Y}^t \operatorname{diag}(0,1,4)\cdot\mathbb{Y} = y_2^2+4y_3^2$$

$$\mathbb{X}^t A\mathbb{X} = 1 \Leftrightarrow y_2^2+4y_3^2=1.$$

Ytan är tydligen en elliptisk cylinder med symmetriaxeln parallell med $\hat{e}_1$, dvs linjen $(x_1,x_2,x_3)=t(1,0,-\sqrt{3})$, $t\in\mathbb{R}$.

(5) $(x_1,x_2,x_3)=te_2 \Rightarrow 3x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\sqrt{3}x_1x_3 = t^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\pm 1 \Rightarrow P_\pm: (0,\pm 1,0).$

$(x_1,x_2,x_3)=t(\sqrt{3},0,1) \Rightarrow 3x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\sqrt{3}x_1x_3 =$

$= 9t^2+t^2+6t^2 = 16t^2 = 1 \Leftrightarrow t=\pm\frac{1}{4} \Rightarrow Q: (\pm\frac{\sqrt{3}}{4}, 0, \pm\frac{1}{4}).$

<u>Svar:</u> Ytan är en elliptisk cylinder med symmetriaxeln $(x_1,x_2,x_3)=t(1,0,-\sqrt{3})$, $t\in\mathbb{R}$; ytans minsta avstånd till origo $d_{min}=\frac{1}{2}$ antas i punkterna $(0,1,0)$ och $(0,-1,0)$; dess största avstånd till origo, $d_{max}=1$, antas i punkterna $(\frac{\sqrt{3}}{4},0,\frac{1}{4})$ och $(-\frac{\sqrt{3}}{4},0,-\frac{1}{4})$.

<u>Anm.</u> Liknande problem kan lösas med differentialkalkyl (flervariabelanalys) men även i optimeringsläran.

21. Kvadratiska former

Uppgift 21.1 (Sid. 22)

Lösning

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

a) $Q_1(u) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$

$Q_1(u) \geq 0$, ty summa av kvadrater; $Q_1(0) = 0$.

Q_1 är positiv definit.

b) $Q_2(u) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2$

$Q_2(e_1) \cdot Q_2(e_3) < 0$; Q_2 är indefinit.

c) $Q_3(u) = x_1^2 + 2x_2^2$.

$Q_3(u) \geq 0$, ty summa av kvadrater; $Q_3(e_3) = 0$;

Q_3 är positiv semidefinit.

d) $Q_4(u) = x_1^2 - 2x_2^2$.

$Q_4(e_1) \cdot Q_4(e_2) < 0$, dvs Q_4 är indefinit.

e) $Q_5(u) = -2x_2^2$.

$Q_5(e_2) < 0$ och $Q_5(e_1) = 0$, så Q_5 är negativ semidefinit.

Uppgift 21.2 (Sid. 22)

Lösning

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

$$Q(u) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 =$$

$$= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + (x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2) =$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2 \geq 0.$$

$$Q(u) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 \Rightarrow Q \text{ är positiv semidefinit.}$$

Uppgift 21.3 (Sid. 22)

Lösning

a) $$Q(u) = -(x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_1 + 2x_3)^2 - x_3^2.$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ y_2 = \quad x_2 - x_3 = 0 \\ y_3 = \qquad\; x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \quad x_2 - x_3 \\ y_3 = \qquad\; x_3 \end{cases}$$

är ett basbyte, så jag studerar i stället

$$q(v) = -y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

$q(\hat{e}_1) \cdot q(\hat{e}_2) < 0$, dvs Q är indefinit.

b) $\underline{Q(u) = -(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-x_3)^2-(x_1-x_2+x_3)^2}$

$$\begin{cases} y_1 = x_1+x_2-x_3 = 0 \\ y_2 = \quad x_2-x_3 = 0 \\ y_3 = x_1-x_2+x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = t \end{cases} \Rightarrow Q(u) \text{ är in en}$$

korrekt kompletterad form.

Anm $(a+b+c)^2 = \underline{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$.

$$Q(u) = -(x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3) +$$
$$+x^2+x_3^2-2x_2x_3-$$
$$-(x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3) =$$
$$=-2x_1^2-x_2^2-x_3^2+2x_2x_3 =$$
$$=-2x_1^2-(x_2^2+x_3^2-2x_2x_3)=$$
$$=-2x_1^2-(x_2-x_3)^2 \leq 0\ ;$$

$Q(e_2+e_3) = 0 \Rightarrow Q$ är <u>negativ semidefinit.</u>

c) $\underline{Q(u) = x_1x_2}$

$Q(e_1)\cdot Q(-e_2) < 0 \Rightarrow$ <u>Q indefinit.</u>

<u>Uppgift 21.4</u> (Sid. 22)

<u>Lösning</u>

Se nästföljande sida.

$$Q(u) = x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3 = X^t\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right] (-2)(-1) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right] (2)(-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+5x_3 = 0 \\ x_2-2x_3 = 0 \\ x_3 = t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -5t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = t \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \Rightarrow \underline{u = t(-5e_1+2e_2+e_3),\ t\in\mathbb{R}}.$$

<u>Övning 21.5</u> (Sid. 22)

<u>Lösning</u>

$$Q(u) = 2x_1x_2-x_3^2 = X^t\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}X \Rightarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+1)(\lambda^2-1) = -(\lambda+1)^2(\lambda-1);\ |A-\lambda E| = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda = -1, -1, 1}.$$

Underrummet till E^3 som ger $Q(u)<0$ hör till egenvärdet $\lambda=-1$.

$\underline{\lambda=-1}$: $(A+E)X = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underline{x_1+x_2=0.}$$

Svar: $W=\{(x_1,x_2,x_3)\in E^3 : x_1+x_2=0\}$.

Uppgift 21.6 (Sid. 23)

Lösning

$\underline{x_1^2+5x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-6x_2x_3=1}$; $\underline{x_1^2+x_2^2+x_3^2=1.}$

$$VL=\mathbb{X}^t A\mathbb{X} \Leftrightarrow A=\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&5&-3\\2&-3&-5\end{bmatrix}=A^t \Rightarrow \det(A-\lambda E)=$$

$$=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&2\\-2&5-\lambda&-3\\2&-3&5-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&2\\0&2-\lambda&2-\lambda\\2&-3&5-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&2\\0&1&1\\2&-3&5-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&-4&2\\0&0&1\\2&\lambda-8&5-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1-\lambda&-4\\2&\lambda-8\end{vmatrix}=(\lambda-2)((\lambda-8)(1-\lambda)+8)=$$

$$=-(\lambda-2)(\lambda^2-9\lambda)=$$

$$=-\lambda(\lambda-2)(\lambda-9)=0 \Leftrightarrow \underline{\lambda=0,2,9};$$

I en ON-bas av egenvektorer blir $VL=2y_2^2+9y_3^2$

$$0|\mathbb{Y}|^2\le 2y_2^2+9y_3^2\le 9\cdot|\mathbb{Y}|^2;\quad |\mathbb{X}|^2=|\mathbb{Y}|^2=\tfrac{1}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\le 2y_2^2+9y_3^2\le 1 \Leftrightarrow 0\le Q(u)\le 1,\ \text{för } |\mathbb{X}|^2=\tfrac{1}{9}.$$

$\underline{\lambda=9}$: $(A-9E)\mathbb{X}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}-8&-2&2&0\\-2&-4&-3&0\\2&-3&-4&0\end{array}\right]\sim$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}0&-14&-14&0\\0&-7&-7&0\\2&-3&-4&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\0&1&1&0\\2&-3&-4&0\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\0&1&1&0\\2&0&-1&0\end{array}\right]\Leftrightarrow\begin{cases}x_2+x_3=0\\2x_1-x_3=0\\x_3=2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=t\\x_2=-2t\\x_3=2t\end{cases},\ -\infty<t<\infty.$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=9t^2=\tfrac{1}{9}\Leftrightarrow t^2=\tfrac{1}{81}\Leftrightarrow t=\pm\tfrac{1}{9}.$$

$t=\frac{1}{9}\Rightarrow \underline{P:(\tfrac{1}{9},-\tfrac{2}{9},\tfrac{2}{9})}$; $t=-\frac{1}{9}\Rightarrow \underline{Q:(-\tfrac{1}{9},\tfrac{2}{9},-\tfrac{2}{9})}$.

Övning 21.7 (Sid. 23)

Lösning

$$(u|v)=1\cdot 1\cdot\cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta=x_1x_3+x_1x_2+x_2x_3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\theta=Q(\mathbb{X})=2x_1x_3+2x_1x_2+2x_2x_3=$$

$$=[x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\mathbb{X}^tA\mathbb{X}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\Rightarrow \det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= (1+\lambda)^2(2-\lambda)$; $|\mathbb{A}-\lambda\mathbb{E}| = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda = 2, -1, -1.}$

I en ortogonal egenvektorbas har vi

$-1 \leq Q(\mathbb{x}) \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq 2\cos\theta \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \cos\theta \leq 1 \Rightarrow \theta_{min} =$

$\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3} = \underline{120^\circ.}$

22. System av differentialekvationer

Uppgift 22.1 (Sid. 23)

Lösning

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - x_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbb{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4;$$

$\det(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{E}) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \underline{\lambda = \pm 2.}$

Jag behöver en egenvektorbas.

$\underline{\lambda = 2}$: $(\mathbb{A}-2\mathbb{E})\mathbb{X} = \mathbb{O} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$

$x_1 = x_2 \Rightarrow \mathbb{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

$\underline{\lambda = -2}$: $(\mathbb{A}+2\mathbb{E})\mathbb{X} = \mathbb{O} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathbb{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$;

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbb{T}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbb{X} = \mathbb{T}\mathbb{Y} \Rightarrow \mathbb{T}\frac{d}{dt}\mathbb{Y} = \mathbb{A}\mathbb{T}\mathbb{Y} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\mathbb{Y} = \mathbb{T}^t\mathbb{A}\mathbb{T}\cdot\mathbb{Y} = \mathbb{D}\mathbb{Y} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}y_1 \\ \frac{d}{dt}y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = -2y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = C_1 e^{2t} \\ y_2 = C_2 e^{-2t} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 e^{2t} \\ C_2 e^{-2t} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} \\ x_2 = C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{-2t} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1(0) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1 \\ x_2(0) = 0 \Rightarrow C_1 - 3C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{3}{4} \\ C_2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(3e^{2t} + e^{-2t}) \\ x_2 = \frac{3}{4}(e^{2t} - e^{-2t}) \end{cases}.$$

Anm. På egenvektorform skrivs detta:

$$\mathbb{X} = \frac{3}{4}\mathbb{X}^{(1)}e^{2t} + \frac{1}{4}\mathbb{X}^{(2)}e^{-2t}.$$

Diff- står för differential- eller differens-.

Uppgift 22.2 (Sid. 23)

Lösning

(1) $\mathbb{A}=\begin{bmatrix}2 & 12\\ 1 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{E})=\begin{vmatrix}2-\lambda & 12\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)-$
$-12=\lambda^2-5\lambda-6=(\lambda+1)(\lambda-6)\,;\ |\mathbb{A}-\lambda\mathbb{E}|=0 \Leftrightarrow \lambda=-1,6.$

(2) $\underline{\lambda=-1}:\ (\mathbb{A}+\mathbb{E})\mathbb{X}=\mathbb{O} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c}3 & 12 & 0\\ 1 & 4 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 0\end{array}\right] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_1+4x_2=0 \Leftrightarrow \mathbb{X}^{(1)}=s\begin{bmatrix}4\\ -1\end{bmatrix},\ 0<|s|<\infty.$$

(3) $\underline{\lambda=6}:\ (\mathbb{A}-6\mathbb{E})\mathbb{X}=\mathbb{O} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c}-4 & 12 & 0\\ 1 & -3 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 0\end{array}\right] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_1-3x_2=0 \Leftrightarrow \mathbb{X}^{(2)}=s\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix},\ 0<|s|<\infty.$$

(4) $\mathbb{X}_0=\begin{bmatrix}a_0\\ b_0\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{X}_n=\mathbb{A}^n\mathbb{X}_0$; <u>jag behöver alltså $\mathbb{A}^n$.</u>

$\mathbb{T}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{T}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{T}=\mathbb{D} \overset{!}{\Leftrightarrow} \mathbb{T}^{-1}\mathbb{A}^n\mathbb{T}=\mathbb{D}^n \Leftrightarrow \mathbb{A}^n=$

$=\mathbb{T}\cdot\mathbb{D}^n\mathbb{T}^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}4 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 6^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & 4\end{bmatrix}=$

$=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}4(-1)^n+3\cdot6^n & -12(-1)^n+12\cdot6^n\\ -(-1)^n+6^n & 3(-1)^n+4\cdot6^n\end{bmatrix} \Rightarrow$

$\mathbb{X}_n=\mathbb{A}^n\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}4(-1)^n+3\cdot6^n & 12(-1)^{n+1}+12\cdot6^n\\ (-1)^{n+1}+6^n & 3\cdot(-1)^n+4\cdot6^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}=$

$=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}8(-1)^n+6\cdot6^n-36(-1)^n+36\cdot6^n\\ -2\cdot(-1)^n+2\cdot6^n+9(-1)^n+12\cdot6^n\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}42\cdot6^n-28(-1)^n\\ 14\cdot6^n+7(-1)^n\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{6^n}\mathbb{X}_n=\frac{1}{7}\lim\limits_{n\to\infty}\begin{bmatrix}42-28(-\frac{1}{6})^n\\ 14+7(-\frac{1}{n})^n\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}42\\ 14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 2\end{bmatrix}.$

Övning 22.3 (Sid. 23)

Lösning

(1) $\mathbb{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbb{A}-\lambda\mathbb{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)-8=$

$=\underline{\lambda^2-4\lambda-5}=(\lambda+1)(\lambda-5)\,;\ |\mathbb{A}-\lambda\mathbb{E}|=0 \Leftrightarrow \lambda=-1,5.$

(2) $\underline{\lambda=-1}:\ (\mathbb{A}+\mathbb{E})\mathbb{X}=\mathbb{O} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c}2 & 2 & 0\\ 4 & 4 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x_1+2x_2=0 \Leftrightarrow x_2=-x_1 \Rightarrow \mathbb{X}=s\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix},\ 0<|s|<\infty.$

$\underline{\lambda=\_\_}:\ (\mathbb{A}-\ \ \mathbb{E})\mathbb{X}=\mathbb{O} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c}-4 & 2 & 0\\ 4 & -2 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ 4 & -2 & 0\end{array}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x_1=x_2 \Rightarrow \mathbb{X}^{(2)}=u\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix},\ 0<|u|<\infty$;

forts

(3) $$\mathbb{P}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\end{bmatrix}\quad (s,u=1)$$

$$\mathbb{X}=\mathbb{P}\mathbb{Y}\Rightarrow\frac{d}{dt}\mathbb{X}=\mathbb{P}\frac{d}{dt}\mathbb{X}=\mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{Y}+\mathbb{B}\Leftrightarrow\frac{d}{dt}\mathbb{Y}=$$

$$=\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{Y}+\mathbb{P}^{-1}\mathbb{B}=\mathbb{D}\cdot\mathbb{Y}+\mathbb{P}^{-1}\mathbb{B}=\mathrm{diag}(-1,5)\mathbb{Y}+\mathbb{P}^{-1}\mathbb{B}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\frac{dy_1}{dt}\\\frac{dy_2}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\4e^t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y_1-\frac{4}{3}e^t\\5y_2+\frac{4}{3}e^t\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{dy_1}{dt}=-y_1-\frac{4}{3}e^t\\\frac{dy_2}{dt}=5y_2+\frac{4}{3}e^t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{dy_1}{dt}+y_1=-\frac{4}{3}e^t\\\frac{dy_2}{dt}-5y_2=\frac{4}{3}e^t\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{d}{dt}(y_1e^t)=-\frac{4}{3}e^{2t}\\\frac{d}{dt}(y_2e^{-5t})=\frac{4}{3}e^{-4t}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_1e^t=-\frac{2}{3}e^{2t}+C_1\\y_2e^{-5t}=-\frac{1}{3}e^{-4t}+C_2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y_1=C_1e^{-t}-\frac{2}{3}e^t\\y_2=C_2e^{5t}-\frac{1}{3}e^t\end{cases}\Leftrightarrow\mathbb{X}=\mathbb{P}\mathbb{Y}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1e^{-t}-\frac{2}{3}e^t\\C_2e^{5t}-\frac{1}{3}e^t\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=C_1e^{-t}+C_2e^{5t}-e^t\\x_2=-C_1e^{-t}+2C_2e^{5t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1(0)=C_1+C_2-1=2\\x_2(0)=-C_1+2C_2=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C_1=2,\ C_2=1.$$

Resultat: $x_1=2e^{-t}+e^{-5t}-e^t,\ x_2=-2e^{-t}+2e^{5t}$

Det finns enklare metoder att finna lösningen.

Uppgift 22.4 (Sid. 23)

Lösning

$$\frac{d}{dt}\mathbb{X}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\mathbb{X},\quad\mathbb{X}(0)=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}.$$

En del arbete har utförts i uppgift 21.7!

Egenvärdena till systemmatrisen är 2, −1, −1.

(1) $\lambda=2$: $(\mathbb{A}-2\mathbb{E})\mathbb{X}=\mathbb{O}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&0\\1&-2&1&0\\1&1&-2&0\end{array}\right]\sim$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&0\\1&-2&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&0\\3&-3&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}-1&0&1&0\\3&-3&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\\x_3=s\end{cases}\Rightarrow\mathbb{X}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Alla egenvektorer vinkelräta mot $\mathbb{X}^{(1)}$ är egenvektorer med egenvärde −1; jag väljer två stycken sinsemellan ortogonala, t.ex.

$$\mathbb{X}^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\quad\mathbb{X}^{(3)}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$$

$\mathbb{T}=[\mathbb{X}^{(1)}\ \mathbb{X}^{(2)}\ \mathbb{X}^{(3)}]$ diagonaliserar $\mathbb{A}$ som följer:

$$T^{-1}AT = D = \mathrm{diag}(2,-1,-1).$$

$$X = TY \Rightarrow \frac{d}{dt}X = T\frac{d}{dt}Y = ATY \Leftrightarrow \frac{d}{dt}Y = T^{-1}ATY \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 \\ \frac{dy_i}{dt} = -y_i,\ i=2,3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = C_1e^{2t} \\ y_2 = C_2e^{-t} \\ y_3 = C_3e^{-t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1e^{2t} \\ C_2e^{-t} \\ C_3e^{-t} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = e^{2t} + e^{-t} \\ x_2 = e^{2t} \\ x_3 = e^{2t} - e^{-t} \end{cases}.$$

Anm. $[T|E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] (-1) \sim$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] (-1/2)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] (1)(-1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right] (-1/3) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{array}\right] \cdot (\overset{!}{=})$$

$$\underbrace{}_{E}\quad \underbrace{}_{T^{-1}}$$

Uppgift 22.5 (Sid. 23)

Lösning

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda E| = \lambda(\lambda-2)+1 = (\lambda-1)^2;\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow (A-E)X = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow X^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A är tydligen inte diagonaliserbar; Som $X^{(2)}$ tar jag en annan vektor ortogonal mot $X^{(1)}$:

$$X^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^tAT = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= E + B \Rightarrow (T^tAT)^n = \underline{T^tA^nT} = (E+B)^n = \underline{E + nB}.$$

$$\Leftrightarrow A^n = T(E+nB)T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+n & -n \\ n & 1-n \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{A^{1000} = \begin{bmatrix} 1001 & -1000 \\ 1000 & -999 \end{bmatrix}}.$$

Anm. $AB = BA \Rightarrow (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k$.

(Jfr binomialsatsen).

Övning 22.6 (Sid. 23)

Lösning

(1) $a_{k+2}=\frac{1}{2}(a_{k+1}+a_k) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{k+1}=b_k \\ a_{k+2}=b_{k+1}=\frac{1}{2}(a_k+b_k) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = b_{n-1} \\ b_n = \frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-1} \end{cases},$$

med begynnelsevärdena $a_0=0$, $b_0=1$.

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbb{A}\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbb{A}^2\begin{bmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{bmatrix} = \mathbb{A}^3\begin{bmatrix} a_{n-3} \\ b_{n-3} \end{bmatrix}$$

$$= \dots \mathbb{A}^n\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{jag behöver } \mathbb{A}^n,\ n=1,2,3,\dots$$

(2) $\mathbb{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}$;

$|\mathbb{A}-\lambda\mathbb{E}|=0 \Leftrightarrow \lambda^2-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \underline{\lambda=1} \vee \underline{\lambda=-1/2}$.

(3) $\underline{\lambda=1}$: $(\mathbb{A}-\mathbb{E})\mathbb{X}=\mathbb{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow x_1=x_2 \Rightarrow \mathbb{X}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

$\underline{\lambda=-\frac{1}{2}}$: $(\mathbb{A}+\frac{1}{2}\mathbb{E})\mathbb{X}=\mathbb{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow x_1+2x_2=0 \Rightarrow \mathbb{X}^{(2)}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$;

(4) $\underline{\mathbb{T}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}} \Rightarrow \mathbb{T}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{T}=\mathbb{D}=\mathrm{diag}(1,\frac{1}{2}) \Leftrightarrow (\mathbb{T}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{T})^n=$

$=\mathbb{T}^{-1}\mathbb{A}^n\mathbb{T}=\mathbb{D}^n=\mathrm{diag}(1,\frac{1}{2^n}) \Leftrightarrow \mathbb{A}^n=\mathbb{T}\cdot\mathbb{D}^n\mathbb{T}^{-1}=$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{-n} \end{bmatrix}\cdot(-\tfrac{1}{3})\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2^{n-1}} & 2-\frac{1}{2^{n-1}} \\ 1-\frac{1}{2^{n-1}} & 2+\frac{1}{2^{n-1}} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2^{n-1}} & 2-\frac{1}{2^{n-1}} \\ 1-\frac{1}{2^{n-1}} & 2+\frac{1}{2^{n-1}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Svar: $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$.

23. Blandad om egenvärden & egenvektorer

Uppgift 23.1 (Sid. 24)

Lösning

$VL=3x_1^2+4x_1x_2=[x_1\ x_2]\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{A}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$;

$|\mathbb{A}-\lambda\mathbb{E}|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)-4=\lambda^2-3\lambda-4=(\lambda+1)(\lambda-4)$;

$|\mathbb{A}-\lambda\mathbb{E}|=0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-4)=0 \Leftrightarrow \underline{\lambda=-1} \vee \underline{\lambda=4}$;

$\underline{\lambda=-1}$: $(\mathbb{A}+\mathbb{E})\mathbb{X}=\mathbb{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] (-2) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$

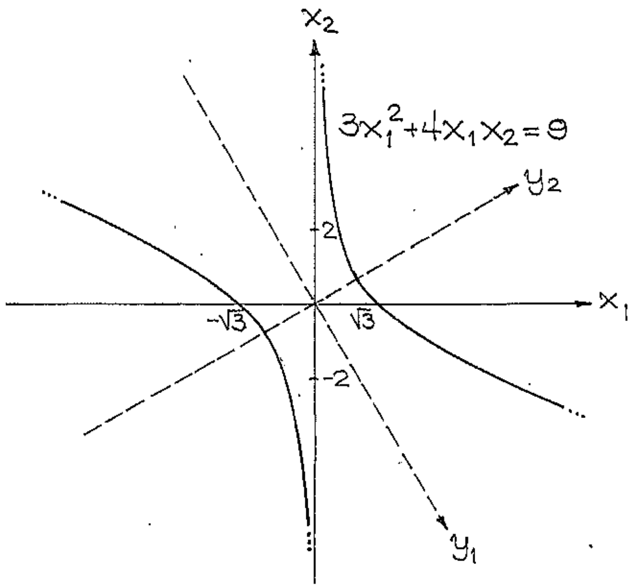
$$\Leftrightarrow 2x_1+x_2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = s \\ x_2=-2s\end{cases} \Rightarrow X^{(1)} = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} \quad (s=1).$$

$A=A^t$ så enligt spektralsatsen är $X^{(2)} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \perp X^{(1)}$.

$$T = \frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}1&2\\-2&1\end{bmatrix}; \quad X=TY \Rightarrow X^tAX = Y^t(T^tAT)Y =$$

$$= T^tDT = Y^t\,\mathrm{diag}(-1,4)\,Y = -y_1^2+4y_2^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{-\frac{y_1^2}{3^2}+\frac{y_2^2}{1,5^2}=1.} \quad (*)$$



$$(x_1,x_2)=t(2,1) \Rightarrow 3x_1^2+4x_1x_2 = 12t^2+8t^2=20t^2=9$$

$$\Rightarrow t^2=\frac{9}{20} \Rightarrow t=\pm\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt5}{5}=\frac{3\sqrt5}{10} \Rightarrow d=\sqrt{x_1^2+x_2^2}=\frac{3}{2}.$$

Detta kan avläsas direkt i (*) härovan.

Uppgift 23.2 (Sid. 24)

Lösning

$$\begin{cases} x_k = 0{,}8x_{k-1}+0{,}3y_{k-1} \\ y_k = 0{,}2x_{k-1}+0{,}7y_{k-1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x_k\\y_k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}8 & 0{,}3\\0{,}2 & 0{,}7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{k-1}\\y_{k-1}\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X_k = AX_{k-1} = A^2X_{k-2} = A^3X_{k-3} = \cdots = A^kX_0;$$

Jag behöver alltså A^k.

$$\det(A-\lambda E) = (\lambda-0{,}8)(\lambda-0{,}7)-0{,}06 = \lambda^2-1{,}5\lambda+0{,}5=0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\lambda=1} \vee \underline{\lambda=0{,}5.}$$

(1) $\underline{\lambda=1}$: $(A-E)X=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}-0{,}2 & 0{,}3 & 0\\0{,}2 & -0{,}3 & 0\end{array}\right] \Leftrightarrow 2x=3y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=3s\\y=2s\end{cases} \Rightarrow X^{(1)} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix};$$

(2) $\underline{\lambda=\frac12}$: $(A-\frac12E)X=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}0{,}3 & 0{,}3 & 0\\0{,}2 & 0{,}2 & 0\end{array}\right] \Leftrightarrow x+y=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=s\\y=-s\end{cases} \Rightarrow X^{(2)} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix};$$

$$T = \begin{bmatrix}3 & 1\\2 & -1\end{bmatrix};$$

forts

$$T^{-1}AT = D = \mathrm{diag}(1;0{,}5) \Rightarrow (T^{-1}AT)^k = T^{-1}A^kT = D^k$$

$$\Leftrightarrow A^k = TD^kT^{-1} = T\cdot \mathrm{diag}\left(1,\frac{1}{2^k}\right)T^{-1} =$$

$$= T\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2^k}\end{bmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -\frac{1}{2^{k-1}} & \frac{3}{2^k}\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3+\frac{1}{2^{k-1}} & 3-\frac{3}{2^k}\\ 2-\frac{1}{2^{k-1}} & 2+\frac{3}{2^k}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} A^k X_0 = \frac{1}{5}\lim_{k\to\infty}\begin{bmatrix}3+\frac{1}{2^{k-1}} & 3-\frac{3}{2^k}\\ 2-\frac{1}{2^{k-1}} & 2+\frac{3}{2^k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3x_0+3y_0\\ 2x_0+2y_0\end{bmatrix}}.$$

Uppgift 23.3 (Sid. 24)

Lösning

Värderummet är ett plan genom origo, nämligen $x_1 - x_3 = 0$; en normalvektor är $(1,0,-1)_e$.

$\underline{u_1 = (1,0,-1)_e}$, $\underline{u_2 = (1,0,1)_e}$, $\underline{u_3 = (0,1,0)_e}$.

F är är antingen en (ortogonal) projektion eller en spegling; en spegling kan inte vara ty dess värderum har dimension 2.

$[F]_e = A$ är F:s matris i standardbasen.

$$F(u_1) = 0,\quad F(u_2) = u,\quad F(u_3) = u_3;$$

$$A\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix} = \left[A\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\ A\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\ A\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow A =$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Uppgift 23.4 (Sid. 24)

Lösning

$$\underline{S:\ x_3^2 - 2x_1x_2 = 4}$$

$$-x_1x_2 - x_2x_1 + x_3^2 = [x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = X^tAX$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 0\\ -1 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = -(1-\lambda)^2(1+\lambda);$$

$$|A-\lambda E| = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2(1+\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -1;$$

dubbla egenvärden skvallrar om symmetrier.

$\underline{\lambda=1}$: $(A-E)X=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2=-s \\ x_3=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=s \\ x_2=-s \\ x_3=t \end{cases} \Leftrightarrow X=s\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};\ s,t\in\mathbb{R}.$

$$X^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad X^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}.$$

$\underline{\lambda=-1}$: $(A+E)X=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2 \\ x_2=s \\ x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=s \\ x_2=s \\ x_3=0 \end{cases} \Rightarrow X^{(3)}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=X^{(1)}\times X^{(2)}$

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ \sqrt{2} & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

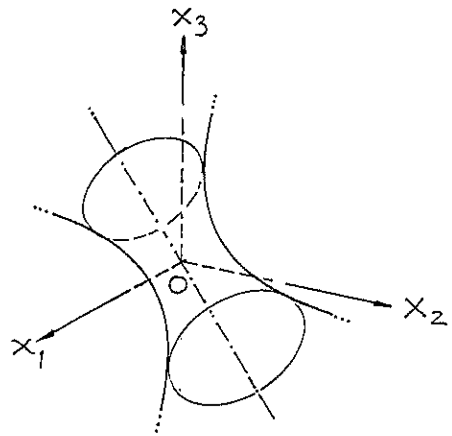
$X=TY \Rightarrow X^tAX=Y^tT^tATY=Y^t\cdot diag(-1,1,1)Y=$
$=-y_1^2+y_2^2+y_3^2 \Leftrightarrow x_3^2-2x_1x_2=\underline{4=-y_1^2+y_2^2+y_3^2}$;
$\Leftrightarrow -\frac{y_1^2}{2^2}+\frac{y_2^2}{2^2}+\frac{y_3^2}{2^2}=1 \Rightarrow$ S är en enmantlad rotationshyperboloid med symmetriaxeln

$$u=(1,1,0)_e\cdot t$$

Avståndet i fråga är $d=\sqrt{y_1^2+y_2^2}\geq 2=d_{min}$.

Låt oss bestämma en punkt på S som ligger närmast origo är $(0,2,0)$ i de nya koordinaterna och $(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$ i de gamla.

$\underline{Anm.}$ $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ \sqrt{2} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}2\\-2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$



Med ett dataprogram får man bättre figur.

Uppgift 23.5 (Sid. 24)

Lösning

$$Q(u)=4x_1^2+x_2^2+2x_3^2-x_4^2+4x_1x_2+4x_3x_4=$$

$=X^t\begin{bmatrix}4 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2 & -1\end{bmatrix}X \Rightarrow A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= ((\lambda-1)(\lambda-4)-4)\cdot((\lambda+1)(\lambda-2)-4) = (\lambda^2-5\lambda)(\lambda^2-\lambda-6);$$

$$|A-\lambda E| = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-5)(\lambda+2)(\lambda-3) = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda = 0, 5, -2, 3.}$$

I en ortonormerad egenvektorbas har vi

$-2|Y|^2 \leq Q(u) \leq 5|Y|^2$, där $X = TY \Rightarrow |X| = |Y|$

$$|X| = 1 \Rightarrow -2 \leq Q(u) \leq 5. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq -2y_1^2 + 3y_3^2 + 5y_4^2 \leq 5.$$

$$\underline{\lambda=5}: \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2s \\ x_2 = s \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases};$$

$$|X| = 1 \Rightarrow \sqrt{5}|s| = 1 \Leftrightarrow s = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow P_\pm = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0,0).$$

$$\lambda=-2: \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -3 \\ \\ -2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = s \\ x_4 = -2s \end{cases}$$

$$|X| = 1 \Rightarrow s = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow Q_\pm = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}(0,0,1,-2)$$

Resultat: $\max\limits_{|X|=1} Q(X) = 5$ antas i $P_\pm$ enl. ovan.

$\min\limits_{|X|=1} Q(X) = -2$ antas i $Q_\pm$ enl. ovan.

Blockmatriser behandlas i högre kurser.

Uppgift 23.6 (Sid. 25)

Lösning

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-5)^2 - 4^2 =$$

$$= (\lambda-5+4)(\lambda-5-4) = (\lambda-1)(\lambda-9); \quad \underline{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9.}$$

$$\underline{\lambda=1}: (A-E)X = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow x_1 = -x_2$$

$$\Rightarrow X^{(1)} = s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \ |X^{(1)}| = 1 \Rightarrow s = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow X^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$A = A^t \Rightarrow X^{(2)} \perp X^{(1)} \Rightarrow X^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (spektralsatsen).}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^t A T = \mathrm{diag}(1, 9) = T^t B^2 T =$$

$$= (T^t B T)^2 \Rightarrow T^t B T = \mathrm{diag}(1, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B = T\,\mathrm{diag}(1,3)T^t = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Anm. $A = A^t \Leftrightarrow B = B^t \Rightarrow B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 =$

$$=\begin{bmatrix} a & b\\ b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b\\ b & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+b^2 & 2ab\\ 2ab & a^2+b^2\end{bmatrix}\overset{!}{=}\mathbb{A}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=5\\ 2ab=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)^2=9\\ (a-b)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\pm 3\\ ab=2\\ a-b=\pm 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}\vee\begin{cases}a=-2\\ b=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{B}=\pm\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

24. Blandat

Uppgift 24.1 (Sid. 24)

Lösning

$$u=e\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=f\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3=y_1(e_1+e_3)+y_2(e_1+e_2)+y_3(e_2+e_3)$$

$$=(y_1+y_2)e_1+(y_2+y_3)e_2+(y_1+y_3)e_3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y_1+y_2 \qquad = x_1\\ \qquad y_2+y_3=x_2\\ y_1 \qquad +y_3=x_3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&0&1\end{array}\right]\begin{matrix}-1\\ \\ \\ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&1&0\\ 0&-1&1&-1&0&1\end{array}\right]\begin{matrix}\\ 1\\ \\ \end{matrix}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&1&0\\ 0&0&2&-1&1&1\end{array}\right]\begin{matrix}\\ \\ 1/2\end{matrix}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&1&0\\ 0&0&1&-1/2&1/2&1/2\end{array}\right]\begin{matrix}\\ \\ -1\end{matrix}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\ 0&1&0&1/2&1/2&-1/2\\ 0&0&1&-1/2&1/2&1/2\end{array}\right]\begin{matrix}\\ -1\\ \\ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/2&-1/2&1/2\\ 0&1&0&1/2&1/2&-1/2\\ 0&0&1&-1/2&1/2&1/2\end{array}\right]\Leftrightarrow\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&1\\ 1&1&-1\\ -1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix};$$

$$y_1+y_2+2y_3=1\Leftrightarrow[1\ \ 1\ \ 2]\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=[1\ \ 1\ \ 2]\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&1\\ 1&1&-1\\ -1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}[0\ \ 2\ \ 2]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=[0\ \ 1\ \ 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=1\Leftrightarrow \underline{x_2+x_3=1.}$$

Uppgift 24.2 (Sid. 25)

Lösning

(1) $u_1=e\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}\Rightarrow \mathbb{A}X_1=\begin{bmatrix}1&1&-1\\ 1&1&-1\\ -1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{F})=[u_1].$

(2) Värderummet genereras av kolonnerna, så de två första duger som bas för $V(\mathcal{F})$

(3) $f=(u_1,u_2,u_3)$ med $u_2=e[1\ 1\ -1]$ & $u_3=e[1\ 1\ 0]^t$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$ (som vektorrum).

$\mathcal{F}$:s matris i denna bas: $A_f=[\mathcal{F}]_f=\mathbb{T}^{-1}\mathbb{A}_e\mathbb{T}$;

$$T=\begin{bmatrix}2&1&1\\-1&1&1\\1&-1&0\end{bmatrix}\Rightarrow[T\,|\,E]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\1&-1&0&0&0&1\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&0&1\\-1&1&1&0&1&0\\2&1&1&1&0&0\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&0&1\\0&0&1&0&1&1\\0&3&1&1&0&-2\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&0&1\\0&0&1&0&1&1\\0&3&0&1&-1&-3\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/3&-1/3&0\\0&0&1&0&1&1\\0&1&0&1/3&-1/3&-1\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/3&-1/3&0\\0&1&0&1/3&-1/3&-1\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right]=[E\,|\,T^{-1}]$$

$$\Rightarrow T^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&-1&-3\\0&3&3\end{bmatrix}\Rightarrow[F]_f=T^{-1}\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&1\\-1&1&1\\1&-1&0\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&-1&-3\\0&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&3&2\\0&3&2\\0&-3&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&9&3\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&3&1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

<u>I en tentamen skall allt redovisas.</u>

<u>Uppgift 24.3</u> (Sid. 25)

<u>Lösning</u>

$$3x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\sqrt{3}\,x_1x_3=1\Leftrightarrow \mathbb{X}^t\begin{bmatrix}3&0&\sqrt{3}\\0&1&0\\\sqrt{3}&0&1\end{bmatrix}\mathbb{X}=1\Rightarrow$$

$$A=\begin{bmatrix}3&0&\sqrt{3}\\0&1&0\\\sqrt{3}&0&3\end{bmatrix}\Rightarrow|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&0&\sqrt{3}\\0&1-\lambda&0\\\sqrt{3}&0&3-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)(3-\lambda)^2-3(1-\lambda)=(1-\lambda)((\lambda-3)^2-3)=(1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda)=$$

$$=\underline{\lambda(1-\lambda)(\lambda-4)};\quad |A-\lambda E|=0\Leftrightarrow \underline{\lambda=0,1,4.}$$

I en ON-bas av egenvektorer antar ekvationen den reducerade formen

$$0\cdot y_1^2+1\cdot y_2^2+4y_3^2=1\Leftrightarrow\frac{y_2^2}{1^2}+\frac{y_3^2}{(1/2)^2}=1.$$

Ytan är en elliptisk cylinder med centralaxeln $(x_1,x_2,x_3)=s(1,0,-\sqrt{3})$, $s\in\mathbb{R}$; vektorn $v=(1,0,-\sqrt{3})_e$ är egenvektorn till A hörande till egenvärdet 0. Avståndet till origo är $d\geq\frac{1}{2}$.

I denna uppgift behöver man inte bestämma den diagonaliserande egenvektorbasen, det efterfrågas inte heller.

Uppgift 24.4 (Sid. 25)

Lösning

$$\begin{cases} x_1' = -x_1+3x_2-5x_3 \\ x_2' = -4x_1+7x_2-10x_3 \\ x_3' = -2x_1+3x_2-4x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -5 \\ -4 & 7 & -10 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\mathbb{X}}{dt} = A\mathbb{X} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -5 \\ -4 & 7 & -10 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -5 \\ -4 & 7-\lambda & -10 \\ -2 & 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda+1)\begin{vmatrix} 7-\lambda & -10 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7-\lambda & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda+1)((\lambda+4)(\lambda-7)+30)+4(-3(\lambda+4)+15)-2(-30+$$

$$+7(7-\lambda)) = -(\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2)+4(-3\lambda+3)-2(-7\lambda+19) =$$

$$= -\lambda^3+2\lambda^2-\lambda = -\lambda(\lambda^2-2\lambda+1) = -\lambda(\lambda-1)^2 ; |A-\lambda E| = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\lambda = 0, 1, 1.}$$

$\underline{\lambda = 0}$: $(A-0\cdot E)\mathbb{X} = \mathbb{O} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -5 & 0 \\ -4 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right]$ (-4) (-2) $\sim$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-1) \\ (-1/5) \\ (-1/3) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] (-1)\ (3) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_3 = s \end{cases} \Rightarrow \mathbb{X}^{(1)} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ 0<|s|<\infty.$$

$\underline{\lambda = 1}$: $(A-E)\mathbb{X} = \mathbb{O} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -5 & 0 \\ -4 & 6 & -10 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right]$ (-2) (-1) $\sim$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow 2x_1-3x_2+5x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 3x_2-5x_3 \\ x_2 = 2s \\ x_3 = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3s-5t \\ x_2 = 2s \\ x_3 = \quad 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbb{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbb{X}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbb{X}_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$ och $\mathbb{X}_3$ utgör systemets moder.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbb{X} = T\mathbb{Y} \Rightarrow \frac{d}{dt}\mathbb{X} = T\frac{d}{dt}\mathbb{Y} = AT\mathbb{Y} \Leftrightarrow \underline{\frac{d\mathbb{Y}}{dt} = T^{-1}AT\mathbb{Y}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = C_1 \\ y_2 = C_2e^t \\ y_3 = C_3e^t \end{cases} \Rightarrow$$

(Anm. $\frac{dy}{dx} = ky \Leftrightarrow y = Ce^{kx}$; se analyskursen)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 e^t \\ c_3 e^t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \begin{matrix} -2 & -1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & -4 & 10 & -4 \\ 0 & -3 & 7 & -3 \end{array}\right] -1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & -4 & 10 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] 4 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ e^t \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3e^t - 2 \\ x_2 = 2e^t - 4 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Uppgift 24.5 (Sid. 25)

Lösning

$$[\mathcal{F}]_e = A_e = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad e = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3) \text{ ON.}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\lambda = 1, 1, 1}.$$

Det finns högst två l. oberoende egenvektorer.

$$\underline{\lambda=1}: \ (A - E)X = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow x_1 + x_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ X^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X^{(3)} =$$

$$= X^{(1)} \times X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \beta = \left\{ e \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, e \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_\beta = T^t A_e T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p = 4 \\ q = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Uppgift 24.6 (Sid. 25)

Lösning

$\underline{v_1 = (1,-1,1,-1)}, \ \underline{v_2 = (3,-1,1,3)}; \ \underline{u = (3,0,2,-1)}.$

Jag bestämmer en ON-bas för W medelst Gram-Schmidts (ortogonaliserings)förfarande.

$$w_1 = v_1 \Rightarrow w_2 = v_2 - \frac{(v_2|w_1)}{(w_1|w_1)} w = v_2 - 2v_1 = (1,1,-1,-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = [u_1, u_2] = [w_1, w_2].$$

$$\hat{e}_1 = \frac{w_1}{|w_1|} = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1), \quad \hat{e}_2 = \frac{w_2}{|w_2|} = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1); \quad e = (\hat{e}_1, \hat{e}_2).$$

$$u_W^{\parallel} = (u|\hat{e}_1)\hat{e}_1 + (u|\hat{e}_2)\hat{e}_2 = \frac{3}{2} w_1 + \frac{1}{2} w_2 = (2,-1,1,-2) \Rightarrow$$

$$u_W^{\perp} = u - u_W^{\parallel} = (1,1,1,1) \doteq y. \qquad (u = u_W^{\parallel} + u_W^{\perp}).$$

<u>Resultat:</u> $y = (2,-1,1,-2); \ |u - y| = 2.$

Uppgift 24.7 (Sid. (Sid. 25)

Lösning

$$AX = B \Rightarrow A^t AX = AB \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\,\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow AX - B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Svar: $AX = e[2\ -1\ 1\ -2]$; $|AX - B| = 2$.

Övning 24.8 (Sid. 25)

Lösning

(1) $\mathcal{N}(F)$: $F(u) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \quad (-1) \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{N}(F) = [(1,1,0)_e]$$

(2) $\dim V(F) = 3 - \dim \mathcal{N}(F) = 2$ (dimensionssatsen)

$V(F)$ uppspännes av kolonnvektorerna så två av dessa kan tjäna som bas för $V(F)$; den första och den tredje är linjärt oberoende.
En sådan bas kunde alltså bli

$$u_1 = e\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ u_2 = e\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ u_3 = e\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Men $u_1 = \frac{2}{3}u_2 - \frac{1}{3}u_3 \Rightarrow \mathcal{N}(F) \subseteq V(F)$.

Svar: Någon bas med de begärda egenskaperna finns inte.

Uppgift 24.9 (Sid. 26)

Lösning

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix};$$

(1) $AX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = y_1 \\ -x_1 + x_3 = y_2 \quad (1) \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = y_1 + y_2 \\ -x_1 + x_3 = y_2 \\ 3x_2 + 3x_3 = y_2 + y_3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{2\cancel{(x_2+x_3)}}{3\cancel{(x_2+x_3)}} = \frac{y_1+y_2}{y_2+y_3} \Leftrightarrow 2(y_2+y_3) = 3(y_1+y_2) \Leftrightarrow$$

$$\underline{V(F): 3y_1 + y_2 - 2y_3 = 0.}$$

(2) På samma sätt visas att $V(G)$ är $2y_2 - y_3 = 0$.

(3) $V(\mathcal{F})\cap V(\mathcal{G}): \begin{cases}3y_1+y_2-2y_3=0\\ 2y_2-y_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3y_1=-y_2+2y_3\\ y_3=2y_2\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3y_1=3y_2\\ y_3=2y_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_1=t\\ y_2=t\\ y_3=2t\end{cases}\Rightarrow u = e\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$, till exempel.

Uppgift 24.10 (Sid. 26)

Lösning

$$7x_1^2+5x_2^2+2\sqrt{3}x_1x_2 = [x_1\ x_2]\begin{bmatrix}7&\sqrt{3}\\ \sqrt{3}&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = X^tAX=8.$$

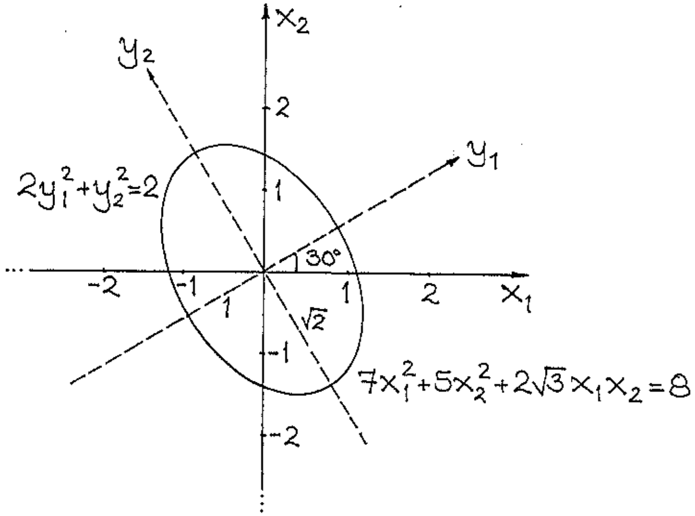
$$X = e\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = f\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} = Y;$$

$$f=eT \Leftrightarrow X=TY \Leftrightarrow X^t=Y^tT^t \Leftrightarrow VL = X^tAX=$$

$$=Y^tT^tATY = Y^t\mathrm{diag}(8,4)Y = 8y_1^2+4y_1^2 = 8 = HL$$

$\Leftrightarrow y_1^2+\frac{y_2^2}{2}=1 \Leftrightarrow \frac{y_1^2}{1^2}-\frac{y_2^2}{(\sqrt{2})^2}=1$, en ellips med halvaxlarna 1 resp. $\sqrt{2}$.

Anm. Basbytesmatrisen (den jag kallar T) är ON-matris, dvs $T^{-1}=T^t$; det är matrisen för en rotation vinkeln $\frac{\pi}{6}$ moturs. På nästa sida syns motsvarande kurva.

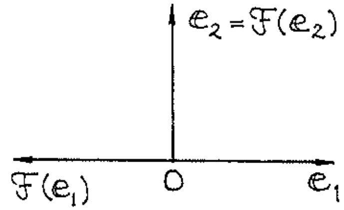


Uppgift 24.11 (Sid. 26)

Lösning

a) $\left.\begin{array}{l}\mathcal{F}(e_1)=-e_1\\ \mathcal{F}(e_2)=e_2\end{array}\right\} \Rightarrow [\mathcal{F}(e_1)\ \mathcal{F}(e_2)] = [-e_1\ e_2] = e\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$

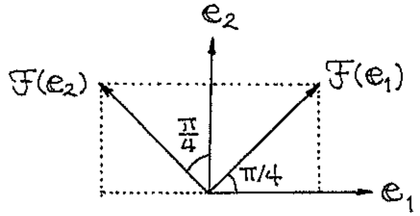
$$\Leftrightarrow [\mathcal{F}]_e = \begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix} = A_e.$$



$\mathcal{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ är en spegling i x_2-axeln, dvs $(x_1,x_2)\longmapsto(-x_1,x_2)$; matriskolonnerna är så-

<u>ledes bilderna av enhetsvektorerna e_1 och e_2.</u>

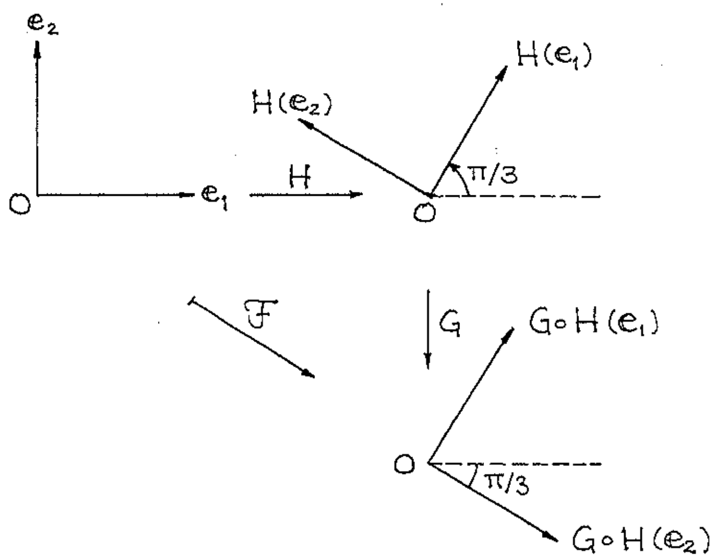
b) $$\left.\begin{aligned}\mathcal{F}(e_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 \\ \mathcal{F}(e_2) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow [\mathcal{F}]_e = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix};$$



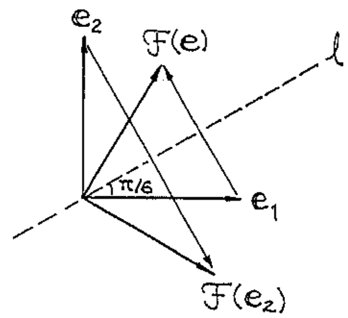
$\mathcal{F}$ är en rotation vinkeln $\frac{\pi}{4}$ moturs kring origo i systemet Oe_1e_2.

c) $$[\mathcal{F}]_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = [G]_e \cdot [H]_e = $$
$$= [G \circ H]_e .$$

$\mathcal{F}$ är en sammansättning av en rotation vinkeln $\frac{\pi}{3}$ moturs kring origo åtföljd av en spegling i x_1-axeln. Denna avbildning är en spegling i en linje genom origo; studera först mina figurer på nästföljande sida; symbolen $\circ$ uttallas "boll" eller "ring":



Det hela kan sammanfattas i följande diagram:



Det är frågan om en spegling i linjen
$$\ell:\ x_2 = \tan\frac{\pi}{6}\, x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} x_1$$

<u>Anm.</u> En spegling i en linje med normalvektorn $\hat{n}$ ges av $\mathcal{F} = I - 2\hat{n}\hat{n}^t$, där I är

identitetsavbildningen. Om $\hat{v} = e\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{bmatrix}$ är en riktningsvektor till en linje l så är $\hat{n} = e\begin{bmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{bmatrix}$ och vi får matrisen för spegling som följer:

$$-2\begin{bmatrix}\sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha\\ -\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-2\sin^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha\\ 2\sin\alpha\cos\alpha & 1-2\cos^2\alpha\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{bmatrix}.$$

För $\alpha = \frac{\pi}{6}$ fås den ursprungliga matrisen.

Uppgift 24.1 (Sid. 26)

Lösning

$$\begin{cases} u_1 = e_3 \\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 \end{cases} \Rightarrow n = u_2 - u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 - e_3 \text{ är}$$

en normalvektor till vårt plan, som antas gå genom origo; $\hat{n} = \frac{n}{|n|} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - \sqrt{2}e_3)$ s.a.

$$A = E_3 - 2\hat{n}\hat{n}^t = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-\sqrt{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & -\sqrt{2}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&-\sqrt{2}\\1&1&-\sqrt{2}\\-\sqrt{2}&-\sqrt{2}&2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&\sqrt{2}\\-1&1&\sqrt{2}\\\sqrt{2}&\sqrt{2}&0\end{bmatrix} = [F]_e.$$

Uppgift 24.13 (Sid. 26)

Lösning

$$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad [F]_e = A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}-4&1&8\\7&-4&4\\-4&-8&-1\end{bmatrix} \quad \text{(isometri?)}$$

F är isometri (isometrisk avbildning) $\Leftrightarrow A^tA = E_3$:

$$A^tA = \frac{1}{81}\begin{bmatrix}-4&7&-4\\1&-4&-8\\8&4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&1&8\\7&-4&4\\-4&-8&-1\end{bmatrix} = \frac{1}{81}\begin{bmatrix}81&0&0\\0&81&0\\0&0&81\end{bmatrix} = E_3 \Rightarrow$$

F är en isometri; den är ingen rotation och ingen projektion, ty dessas matris är symmetriska.

$$\det A = \frac{1}{9^3}\begin{vmatrix}-4&1&8\\7&-4&4\\-4&-8&-1\end{vmatrix} = \frac{1}{9^3}(-16-448-16-128-128+7) = -1$$

$\Rightarrow F$ är en sammansättning av en spegling och en rotation. Antag att speglingen sker i planet $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$; en normalvektor är $n = e[A,B,C]$; sambandet $F(n) = -n$ ger

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-4 & 1 & 8\\ 7 & -4 & 4\\ -4 & -8 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-4A+B+8C\\ 7A-4B+4C\\ -4A-8B-C\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-9A\\-9B\\-9C\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-4A+B+8C=-9A\\ 7A-4B+4C=-9B\\ -4A-8B-C=-9C\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5A+B+8C=0\\ 7A+5B+4C=0\\ 4A+8B-8C=0 \quad (1/4)\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5A+B+8C=0\\ 7A+5B+4C=0\\ A+2B-2C=0 \quad (-4) \quad (4)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-3A-3B=0\\ 3A-3B=0\\ A+2B-2C=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}A=-B\\ B=-2s\\ 2C=A+2B\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=2s\\ B=-2s\\ C=-s\end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\pi: 2x_1-2x_2-x_3=0$ är speglingsplanet.

En vektor parallell med π är t.ex. $Y=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \Rightarrow$

$$AY=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-4 & 1 & 8\\ 7 & -4 & 4\\ -4 & -8 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-3\\3\\-12\end{bmatrix} \Rightarrow (AY|Y)=0 \Rightarrow AY \perp Y$$

$\Rightarrow$ vridningsvinkeln är $90°$. Sker vridningen medurs eller moturs? Med determinanter $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix}2\\-2\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1\\1\\-4\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -4\end{vmatrix}=-18<0 \Rightarrow$$

vridningen sker medurs från spetsen till $n = e[2\ -2\ -1]^t$

Uppgift 24.14 (Sid. 26)

Lösning

$$x_1-x_2-x_3=0 \Leftrightarrow x_1=x_2+x_3 \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=s+t\\ x_2=s\\ x_3=t\end{cases}, \ s,t\in\mathbb{R};$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \ s,t\in\mathbb{R}.$$

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}^{-1}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & -2\\ 2 & -2 & 4\end{bmatrix}=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}.$$

Uppgift 24.15 (Sid. 25)

Lösning

$$W=[v_1, v_2, v_3].$$

$$v_1=(0,1,-1,0)_e,\ v_2=(1,1,1,1)_e,\ v_3=(1,3,1,3)_e.$$

Är v_1, v_2 och v_3 linjärt oberoende? Bas?

$$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3 = (\lambda_2+\lambda_3,\ \lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3,\ -\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\ \lambda_2+2\lambda_3)_e$$

$$=(0,0,0,0)_e=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2+3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0 \Rightarrow$$

$\mathcal{B}=(v_1, v_2, v_3)$ bas för W.

En projektion har egenvärdena 0 och 1; vektorerna $\lambda v_1+\mu v_2+\nu v_3$ är samtliga egenvektorer hörande egenvärdet 1; det gäller nu att finna en bas för $W^\perp$ i $\mathbb{R}^4$; $\dim W^\perp =1$, enligt dimensionssatsen. För $u \in W^\perp$, med $u=(a,b,c,d)$, fås:

$$\begin{cases} (u|v_1)=0 \Rightarrow b-c=0 \\ (u|v_2)=0 \Rightarrow a+b+c+d=0 \\ (u|v_3)=0 \Rightarrow a+3b+c+3d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ c=b \\ d=-b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ c=b \\ d=-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-c \\ b=c \\ c=-t \\ d=-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=t \\ b=-t \\ c=-t \\ d=t \end{cases} \Rightarrow \underline{u=(1,-1,-1,1)_e}$$

$$F(u)=0\cdot u \Rightarrow \underline{W^\perp=[u]}.$$

Jag använder Gram-Schmidts ortogonaliseringsförfarande på vektorerna u_1, u_2, u_3.

$$w_1=v_1=(0,1,-1,0)_e;$$

$$w_2=v_2=(1,1,1,1)_e;$$

$$w_3=v_3-\frac{(v_3|v_1)}{(v_1|v_1)}v_1-\frac{(v_3|v_2)}{(v_2|v_2)}v_2=v_3-v_1-2v_2=$$

$$=v_3-2v_2-v_1=(1,3,1,3)_e-(2,2,2,2)_e-(0,1,-1,0)_e=(-1,0,0,1)_e.$$

$$\hat{e}: \begin{cases} \hat{e}_1=\dfrac{w_1}{|w_1|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)_e; \\ \hat{e}_2=\dfrac{w_2}{|w_2|}=\dfrac{1}{2}(1,1,1,1)_e; \\ \hat{e}_3=\dfrac{w_3}{|w_3|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,0,1)_e; \\ \hat{e}_4=\dfrac{u}{|u|}=\dfrac{1}{2}(1,-1,-1,1)_e; \end{cases}$$

$\hat{e}=(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4)$ är en sådan bas.

Uppgift 24.16 (Sid. 26)

Lösning

$$Q(u)=6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3=X^t\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}X$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$= (5-\lambda)(6-\lambda)(7-\lambda) - 4(5-\lambda) - 4(7-\lambda) = (5-\lambda)(6-\lambda)(7-\lambda) -$$

$$- 48 + 8\lambda = (6-\lambda)\big((\lambda-5)(\lambda-7) - 8\big) = (6-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 27) =$$

$$= (\lambda-3)(6-\lambda)(\lambda-9)\,; \quad |A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda = 3, 6, 9.}$$

$\underline{\lambda=3}$: $$(A-3E)X = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 2 \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2s \\ x_2 = 2s \\ x_3 = -s \end{cases}, \quad 0 < |s| < \infty.$$

$\underline{\lambda=6}$: $$(A-6E)X = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1/2 \\ 1 \\ \end{array} \sim$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1 \\ \\ \end{array} \sim$$

(denna egenriktning behövs egentligen inte)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = -x_2 \\ x_3 = x_2 \\ x_2 = -2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = -2t \end{cases}, \; t \neq 0.$$

$\underline{\lambda=9}$: $$(A-9E)X = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ 2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -1 \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 = -x_1 \\ x_3 = x_1 \\ x_1 = 2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2u \\ x_2 = -u \\ x_3 = 2u \end{cases}, \; u \neq 0.$$

$$\underline{T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.}$$

$$X = TY \Rightarrow X^t A X = Y^t \cdot T^t A T \cdot Y = Y^t \operatorname{diag}(3,6,9) \cdot Y =$$

$$= 3y_1^2+6y_2^2+9y_3^2 ;$$

$$T^{-1}=T^t \Rightarrow \mathbb{X}^t\mathbb{X} = \mathbb{Y}^tT^tT\mathbb{Y} = \mathbb{Y}^t\mathbb{Y} \Leftrightarrow |\mathbb{X}|^2=1=|\mathbb{Y}|^2;$$

$$3(y_1^2+y_2^2+y_3^2) \leq 3y_1^2+6y_2^2+9y_3^2 \leq 9(y_1^2+y_2^2+y_3^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{3 \leq Q(u) \leq 9.}}$$

$\min\limits_{|u|=1} Q(u) = 3$ antas i riktningen $\frac{1}{3}(2,2,-1)_e$;

$$Q(2se_1+2se_2-se_3)=3 \Rightarrow 24s^2+20s^2+7s^2-16s^2-8s^2=$$
$$=27s^2=3 \Leftrightarrow s^2=\frac{1}{9} \Leftrightarrow s=\pm\frac{1}{3} \Rightarrow P_\pm = \pm\frac{1}{3}(2,2,-1)_e;$$

$\max\limits_{|u|=1} Q(u)=9$ antas i riktningen $\frac{1}{3}(2,-1,2)$

$$Q(2ue_1-ue_2+2ue_3)=24u^2+5u^2+28u^2+8u^2+16u^2=$$
$$=81u^2=9 \Leftrightarrow u^2=\frac{1}{9} \Leftrightarrow u=\pm\frac{1}{3} \Rightarrow R_\pm=\pm\frac{1}{3}(2,-1,2).$$

<u>Svar</u>: Det största värdet 9 antas i punkterna $(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ och $(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$; det minsta värdet 3 antas i punkterna $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$ och $(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$.

<u>Uppgift 24.17</u> (Sid. 26)

<u>Lösning</u>

$$\underline{Q(u)=x_1^2-6x_1x_2+x_2^2.}$$

$$x_1^2-6x_1x_2+x_2^2=[x_1,x_2]\begin{bmatrix}1 & -3\\ -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\mathbb{X}^t A\mathbb{X} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -3 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -3\\ -3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-3^2=$$
$$=(\lambda-1+3)(\lambda-1-3)=(\lambda+2)(\lambda-4);\ |A-\lambda E|=0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda=4,-2.}}$$

$\underline{\underline{\lambda=-2}}$: $(A+2E)\mathbb{X}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c}3 & -3 & 0\\ -3 & 3 & 0\end{array}\right] \Leftrightarrow x_1=x_2 \Rightarrow \begin{cases}x_1=s\\ x_2=s\end{cases};$

$$x_1^2+x_2^2=2s^2=1 \Leftrightarrow s^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow s=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \hat{e}_1=\frac{e}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix};$$

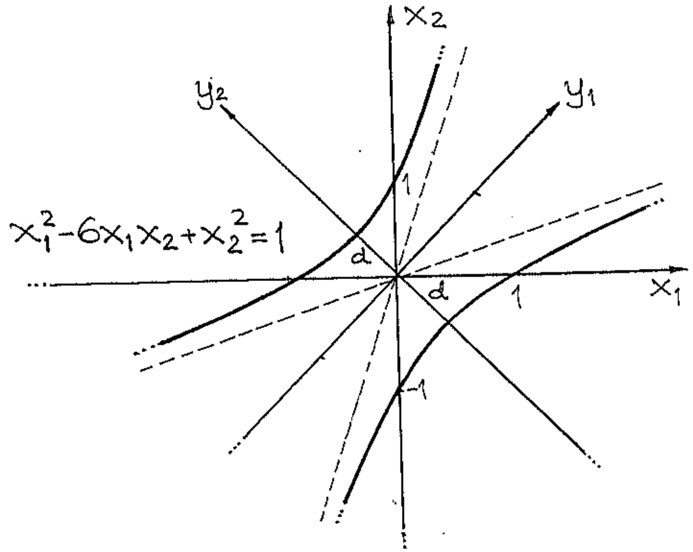
Den andra egenvektorn, hörande till $\lambda=4$ är ortogonal mot den första: $\hat{e}_2=\frac{e}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$.

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

$$\mathbb{X}=T\mathbb{Y} \Rightarrow \mathbb{X}^tA\mathbb{X}=\mathbb{Y}^tT^tAT\mathbb{Y}=\mathbb{Y}^t\operatorname{diag}(-2,4)\mathbb{Y}=1$$

$\Leftrightarrow -2y_1^2+4y_2^2=1$, <u>en hyperbel</u> med centrum i origo. Avståndet från kurvan till origo fås för $y_1=0$; $4y_2^2=1 \Leftrightarrow d=|y_2|=\frac{1}{2}$.

Situationen åskådliggörs på nästa sida.



Uppgift 24.18 (Sid. 27)

Lösning

$$Q(u) = 5x_1^2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3 =$$

$$= [x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = X^t A X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 8-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)^2(8-\lambda) - 16 - 16 - 16(8-\lambda) - 8(5-\lambda) = -\lambda(\lambda-9)^2;$$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-9)^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda = 0, 9, 9.}$$

Dubbla egenvärden $\Rightarrow$ degeneration.

$\underline{\lambda = 0}$: $(A - 0\cdot E)X = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (-1/2) \\ \\ \end{array} \sim$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ (2)\ (1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 0 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 9 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} (1/9) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-4) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2s \\ x_2 = s \\ x_3 = -2s \end{cases}$$

$\underline{\lambda = 2}$: Motsvarande egenrum är planet

$$\underline{\pi:\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0}$$

En ON-bas bestående av egenvektorer till A är t.ex.

$$\mathcal{B}: \quad u_1 = e\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},\ u_2 = e\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ u_3 = e\frac{1}{\sqrt{18}}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

I denna bas antar Q formen

$$Q = 0\cdot y_1^2 + 9y_1^2 + 9y_3^2.$$

$$\mathbb{X} = \mathbb{T}\mathbb{Y} \Rightarrow \mathbb{X}^t \mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{Y}^t \mathrm{diag}(0,9,9)\mathbb{Y} = 9y_2^2 + 9y_3^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \underline{y_2^2 + y_3^2 = 1.}$$

Ytan är en rak cirkulär cylinder (m.a.p $\mathbb{B}$). Symmetriaxeln är linjen $u_1 \cdot t$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \\ 1/3 & 0 & -4/\sqrt{18} \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \end{bmatrix}$$

T är en ON-matris s.a. $\mathbb{X} = \mathbb{T}\mathbb{Y} \Rightarrow |\mathbb{X}|^2 = |\mathbb{Y}|^2 = 1$

$\Rightarrow$ Sfären tangerar cylindern längs en storcirkel liggande på planet π.

Det efterfrågas en gemensam punkt till de båda ytorna; $P = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ är en sådan. (Spetsen på u_2 ligger på cylinderytan).

<u>Uppgift 24.19</u> (Sid. 27)

<u>Lösning</u>: $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 3x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 -$$

$$-3^2 = (\lambda+1+3)(\lambda+1-3) = (\lambda+4)(\lambda-2)\,; \quad \underline{\lambda = -4, 2.}$$

<u>$\lambda = -4$:</u> $(\mathbb{A} + 4\mathbb{E})\mathbb{X} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \mathbb{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

<u>$\lambda = 2$:</u> $\mathbb{A} = \mathbb{A}^t \Rightarrow \mathbb{X}^{(2)} \perp \mathbb{X}^{(1)}$, <u>enligt spektralsatsen</u>

$$\Rightarrow \mathbb{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Den allmänna lösningen till systemet är

$$\mathbb{X} = C_1\mathbb{X}^{(1)}e^{-4t} + C_2\mathbb{X}^{(2)}e^{2t}$$

där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter. Den lösning som blir 0 i $t = +\infty$ fås för $C_2 = 0$.

<u>Svar:</u> $x_1 = Ce^{-4t}$, $x_2 = -Ce^{-4t}$, $C \neq 0$.

<u>Uppgift 24.20</u> (Sid. 27)

<u>Lösning</u>

Se nästföljande sida.

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbb{X}_{k+1} = \mathbb{A}\mathbb{X}_k \Leftrightarrow \mathbb{X}_k = \mathbb{A}\mathbb{X}_{k-1} =$$

$$= \mathbb{A}^2\mathbb{X}_{k-2} = \mathbb{A}^3\mathbb{X}_{k-3} = \dots = \mathbb{A}^k\mathbb{X}_0 ;\ \underline{\text{jag behöver } \mathbb{A}^k}.$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}9 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E}) = \begin{vmatrix} 0{,}6-\lambda & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}9-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 0{,}6)(\lambda - 0{,}9) - 0{,}04 = \lambda^2 - 1{,}5\lambda + 0{,}50 = (\lambda - 1)(\lambda - 0{,}5);$$

$$|\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E}| = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda = 0{,}5,\ 1.}$$

$$\underline{\lambda = 1}: \quad (\mathbb{A} - \mathbb{E})\mathbb{X} = \mathbb{O} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -0{,}4 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}4 & -0{,}1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow 4x \quad y = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix};$$

$$\underline{\lambda = \tfrac{1}{2}} \Rightarrow (\mathbb{A} - \tfrac{1}{2}\mathbb{E})\cdot\mathbb{X} = \mathbb{O} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow x + y = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{T}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{T} = \text{diag}(1, \tfrac{1}{2}) \Leftrightarrow (\mathbb{T}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{T})^k =$$

$$= (\text{diag}(1, \tfrac{1}{2}))^k \Leftrightarrow \mathbb{T}^{-1}\mathbb{A}^k\mathbb{T} = \text{diag}(1^k, (\tfrac{1}{2})^k) \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{A}^k = \mathbb{T}\cdot\text{diag}(1, \tfrac{1}{2^k})\mathbb{T}^{-1} \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\mathbb{A}^k = \mathbb{T}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbb{T}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\mathbb{X}_k = \lim_{k\to\infty}\mathbb{A}^k\mathbb{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} x_0 - y_0 \\ -4x_0 + 4y_0 \end{bmatrix} = (x_0 + y_0)\begin{bmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}8 \end{bmatrix}.$$

Uppgift 24.21 (Sid. 27)

Lösning

$$\underline{\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3,\ \mathbf{u}' = x_1'\mathbf{e}_1 + x_2'\mathbf{e}_2 + x_3'\mathbf{e}_3;\ \mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3}$$

$$\mathbf{u}' = \frac{(\mathbf{u}|\mathbf{v})}{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}\mathbf{v} = \frac{x_1 + 2x_2 - 2x_3}{9}\mathbf{v} \Leftrightarrow 9\mathbf{u}' = (x_1 + 2x_2 - 2x_3)\cdot\mathbf{v}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x_1' = x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ 9x_2' = 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 \\ 9x_3' = -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 \end{cases} \Leftrightarrow 9\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\mathcal{F}]_e = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Uppgift 24.22 (Sid. 27)

Lösning

$$\underline{\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1,\ \mathbf{u}_2 = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2}$$

Jag sätter $\hat{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1$ och $\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_2|} = \frac{3}{5}\mathbf{e}_1 + \frac{4}{5}\mathbf{e}_2$ och får

$$u = \hat{e}_1 - \hat{e}_2 = \frac{2}{5}(e_1 - 2e_2) \Rightarrow w = e_1 - 2e_2$$

w är normalvektor till den speglande linjen.

F bestäms av enhetsvektorernas bilder.

$$\left.\begin{aligned} e_1 &\mapsto e_1 - 2\frac{(e_1|w)}{(w|w)}w = e_1 - \frac{2}{5}(e_1 - 2e_2) = \frac{1}{5}(3e_1 + 4e_2) \\ e_2 &\mapsto e_2 - 2\frac{(e_2|w)}{(w|w)}w = e_2 + \frac{4}{5}(e_1 - 2e_2) = \frac{1}{5}(4e_1 - 3e_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$[F]_e = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow [F^2]_e = [F]_e [F]_e = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}^2 =$$

$$= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} = E_2.$$

<u>Svar</u>: $[F]_e = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, $[F^2]_e = E_2 = \text{diag}(1,1)$.

<u>Uppgift 24.23</u> (Sid. 27)

<u>Lösning</u>

$\dim V(F) = 2 = \text{rang}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} =$ <u>antalet oberoende rader i den radreducerade trappformen.</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4-a \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & 3-2a \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{a = \frac{3}{2}}.$$

<u>Uppgift 24.24</u> (Sid. 27)

<u>Lösning</u> <u>Å.R. = det åskådliga rummet.</u>

$$F(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1F(e_1) + x_2F(e_2) + x_3F(e_3) =$$

$$= x_1(-e_2) + x_2(e_2) + x_3(e_1 + e_2 + e_3) =$$

$$= x_3e_1 + (-x_1 + x_2 + x_3)e_2 + x_3e_3;$$

a) $F(u) = u \Rightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = x_2 \\ x_3 = x \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_3 = 0$

$F(u) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Leftrightarrow u = t(e_1 + e_2).$

b) F är en projektion i planet $x_1 - x_3 = 0$ längs vektorn $e_1 + e_2$.

<u>Uppgift 24.25</u> (Sid. 27)

<u>Lösning</u> <u>$e = (e_1, e_2, e_3)$</u>

a) $[F(e_1)\ F(e_2)\ F(e_3)] = [e_1\ e_2\ e_3]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [e_2\ e_3\ e_1] \Rightarrow$

$\underline{F(e_1) = e_2} \wedge \underline{F(e_2) = e_3} \wedge \underline{F(e_3) = e_1} \Rightarrow F$ är en rotation kring en axel gm origo. Om axeln bestäms av riktningen $u = ae_1+be_2+ce_3$ så är

$F(u) \overset{!}{=} u \Leftrightarrow F(ae_1+be_2+ce_3) = aF(e_1)+bF(e_2)+cF(e_3) =$

$= ae_2+be_3+ce_1 \overset{!}{=} ae_1+be_2+ce_3 \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)_e.$$

Vektorn $v=(e_1-e_2)/\sqrt{2}$ är ortogonal mot u.

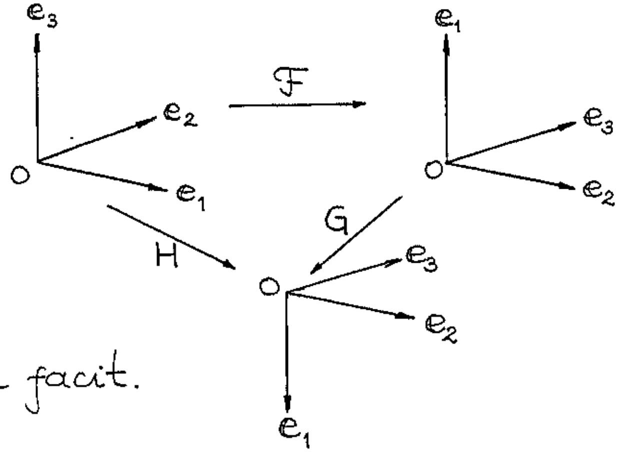
$F(v) = F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}F(e_1) - \frac{1}{\sqrt{2}}F(e_2) = \frac{e_2-e_3}{\sqrt{3}} = w$;

Rotationsvinkeln är vinkeln mellan v och w.

$(v|w) = 1\cdot 1\cos\theta \Leftrightarrow \frac{1}{2}(e_1-e_2|e_2-e_3) = -\frac{1}{2} = \cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$.

b) $[H]_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [G]_e [F]_e$

F är avbildningen i a) ovan; G är en spegling i e_2e_3-planet i det nya systemet.



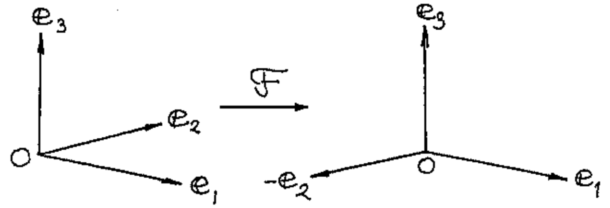
Läs även facit.

Övning 24.26 (Sid. 27)

Lösning

a) $[F(e_1)\ F(e_2)\ F(e_3)] = [e_1\ e_2\ e_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [e_1\ -e_2\ e_3]$

$\Leftrightarrow F(e_1) = e_1 \wedge F(e_2) = -e_2 \wedge F(e_3) = e_3.$



F är en spegling i x_1x_3-planet.

b) En vridning vinkeln θ moturs kring x_3-axeln, från spetsen till e_3 sett ges av

$$R_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R(\pi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{!}{=} R(-\pi).$$

Avbildningen är en rotation vinkeln π kring x_3-axeln. Detsamma kan konstateras av bilderna till enhetsvektorerna. Gör det!

c) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&\sqrt{3}&-1\\0&1&\sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\sqrt{3}/2&-1/2\\0&1/2&\sqrt{3}/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\frac{\pi}{6}&-\sin\frac{\pi}{6}\\0&\sin\frac{\pi}{6}&\cos\frac{\pi}{6}\end{bmatrix}=R_1(\frac{\pi}{6}),$

en rotation vinkeln $\frac{\pi}{6}$ medurs kring e_1.

d) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&\sqrt{3}&-1\\0&1&\sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&\sqrt{3}/2&-1/2\\0&1/2&\sqrt{3}/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\sqrt{3}/2&-1/2\\0&1/2&\sqrt{3}/2\end{bmatrix}$

En <u>vridning</u> $\frac{\pi}{6}$ rad. kring e_1 åtföljd av en <u>spegling</u> i e_2e_3-planet i det nya systemet.

e) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&\sqrt{3}&1\\0&1&-\sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&\sqrt{3}/2&1/2\\0&1/2&-\sqrt{3}/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\sqrt{3}/2&-1/2\\0&1/2&\sqrt{3}/2\end{bmatrix};$

En vridning vinkeln $\frac{\pi}{6}$ kring e_1 åtföljd av en vridning vinkeln π kring e_2 i det nya systemet.

<u>Anm</u>. Andra alternativ finns för att beskriva operationerna geometriskt.

<u>Uppgift 24.27</u> (Sid. 28)

<u>Lösning</u> $\underline{u_1=e_1+e_2}$, $\underline{u_2=e_1+e_2+e_3}$

$u_3=u_1\times u_2=(e_1+e_2)\times(e_1+e_2\times e_3)=e_1-e_2$;

$(u_1|u_2)=|u_1|\cdot|u_2|\cos\theta \Rightarrow 2=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta=\sqrt{\tfrac{2}{3}}$

$$\Rightarrow \sin\theta=\sqrt{\tfrac{1}{3}} \Rightarrow R_3(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2/3}&-\sqrt{1/3}&0\\\sqrt{1/3}&\sqrt{2/3}&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases}\hat{e}_1=\dfrac{u_1}{|u_1|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}e_2\\ \hat{e}_2=\dfrac{u_2}{|u_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}e_1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}e_2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}e_3\\ \hat{e}_3=\dfrac{u_3}{|u_3|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e_1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e_2\end{cases}$$

$$F(\hat{e}_1)=\hat{e}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1+e_2+e_3)$$
$$F(\hat{e}_2)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}e_1+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}e_2+e_3\right)$$
$$F(\hat{e}_3)=\hat{e}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}e_1-\frac{1}{\sqrt{2}}e_2$$

$$\left\{\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{2}}F(e_1+e_2)=\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1+e_2+e_3)\\ \frac{1}{\sqrt{3}}F(e_1+e_2+e_3)=\frac{\sqrt{2}-1}{3}e_1+\frac{\sqrt{2}+1}{3}e_2+\frac{\sqrt{3}}{3}e_3\\ \frac{1}{\sqrt{2}}F(e_1-e_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1-e_2)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}F(e_1)+F(e_2)=\sqrt{\frac{2}{3}}(e_1+e_2+e_3)\\ F(e_1)+F(e_2)+F(e_3)=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}e_1+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}e_2+e_3\\ F(e_1)-F(e_2)=e_1-e_2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [F]_e\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\0&1&0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}-1&\sqrt{3}\\\sqrt{2}&\sqrt{2}+1&-\sqrt{3}\\\sqrt{2}&\sqrt{3}&0\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\mathcal{F}]_e = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}+1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}+1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{bmatrix}\sqrt{2}+\sqrt{3} & \sqrt{2}-\sqrt{3} & 2\\ \sqrt{2}-\sqrt{3} & \sqrt{2}+\sqrt{3} & 2\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{3}-2\sqrt{2}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[\mathcal{F}]_e\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{6}\\ 1-\sqrt{2/3}\end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathcal{F}(e_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}e_2 + (1-\frac{\sqrt{6}}{3})e_3.$$

Uppgift 24.28 (Sid. 28)

Lösning

$$\pi_1:\ x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow n_1 = e_2 - e_3 \Rightarrow \hat{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 \Rightarrow$$

$$S_1 = E - 2\hat{n}_1\hat{n}_1^t = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}[0\ 1\ -1] =$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix};$$

$$\pi_2:\ x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow n_2 = e_1 - e_3 \Rightarrow \hat{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 \Rightarrow$$

$$S_2 = E - 2\hat{n}_2\hat{n}_2^t = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}[1\ 0\ -1] =$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix};$$

$$[\mathcal{F}]_e = [S_2]_e[S_1]_e = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 1 & 0 & -\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^3+1 = -(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \Rightarrow X = s\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ 0<|s|<\infty.$$

Anm. $\mathcal{F}$ är uppenbarligen en rotation en vinkel θ kring vektorn $e_1+e_2+e_3$; vektorn $u = e_1 - e_2$ övergår till $-e_1+e_3$, vid en sådan vridning: $(e_1-e_2|-e_1+e_3) = -1 = 2\cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \doteq 120°$, vridningsvinkeln.

Uppgift 24.29 (Sid. 28)

Lösning

$$\mathbb{A}=\begin{bmatrix}7&-6&0\\-2&3&3\\-3&2&2\end{bmatrix},\ \mathbb{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&4&0\\1&2&2\end{bmatrix}.$$

(1) $\mathbb{B}$ är vänstertriangulär och enklare att behandla; dess egenvärden 2, 4, 2.

$\underline{\lambda=2}$: $(\mathbb{A}-2\mathbb{E})\mathbb{X}=\mathbb{O} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\1&2&0&0\\1&2&0&0\end{array}\right] \Leftrightarrow x_1+2x_2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_1=2s\\x_2=-s\\x_3=t\end{cases} \Rightarrow \mathbb{X}=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}t.$$

Varken $\mathbb{e}\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$ eller $\mathbb{e}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ är egenvektor till $\mathbb{A}$.

$\underline{\lambda=4}$: $(\mathbb{A}-4\mathbb{E})\mathbb{X}=\mathbb{O} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}-2&0&0&0\\1&0&0&0\\1&2&-2&0\end{array}\right] \Leftrightarrow \mathbb{X}=s\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{X}$ ingen egenvektor till $\mathbb{A}$.

$$|\mathbb{A}-\lambda\mathbb{E}|=\begin{vmatrix}7-\lambda&-6&0\\-2&3-\lambda&3\\-3&2&2-\lambda\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}7-\lambda&-6\\-3&2\end{vmatrix}+(2-\lambda)\begin{vmatrix}7-\lambda&-6\\-2&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-3(2(7-\lambda)-18)+(2-\lambda)((\lambda-3)(\lambda-7)-12)=$$

$$=-(\lambda^3-12\lambda^2+23\lambda-30)=-(\lambda-10)(\lambda^2-2\lambda+3)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda=10 \Rightarrow (\mathbb{A}-10\mathbb{E})\mathbb{X}=\left[\begin{array}{ccc|c}-3&-6&0&0\\-2&-7&3&0\\0&8&-8&0\end{array}\right]\begin{array}{c}(-1/3)\\ \\(1/8)\end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\-2&-7&3&0\\0&1&-1&0\end{array}\right]\begin{array}{c}2\\ \\3\end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\0&0&0&0\\0&1&-1&0\end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_1+2x_2=0\\x_3-x_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=2s\\x_2=-s\\x_3=-s\end{cases} \Rightarrow \mathbb{X}=s\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{B}\mathbb{X}=$$

$=2\mathbb{X}$; $\therefore$ gemensam egenvektor.

Anm. $\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$; $\underline{s=1 \text{ och } t=-1 \text{ i } \mathbb{B}\text{:s } \mathbb{X}}$.

Uppgift 24.30 (Sid. 28)

Lösning

$$\underline{u_1=(1,2,0,2)^t_{e},\ u_2=(1,0,-1,4)^t_{e}}.$$

Låt $\mathcal{U}=[u_1,u_2]$ och $\underline{v}=(a,b,c,d)^t_{e}\in \mathcal{U}^\perp$.

$(u_1|v)=0 \Rightarrow a+2b+2d=0$; $(u_2|v)=0 \Rightarrow a-c+4d=0$

$$\begin{cases} 2b=-a-2d \\ c=a+4d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2s \\ 2b=-2s-2t \\ c=2s+4t \\ d=\quad\;\; t \end{cases} \Leftrightarrow \mathbb{X}=s\begin{bmatrix}2\\-1\\2\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\-1\\4\\1\end{bmatrix},\ s,t\in\mathbb{R}.$$

$\underline{u_1=(1,2,0,2),\ u_2=(1,0,-1,4),\ u_3=(2,-1,2,0),\ u_4=(0,-1,4,1)}$

Jag konstruerar en ON-bas med hjälp av Gram-Schmidts ortogonaliseringsförfarande.

$v_1=u_1=(1,2,0,2)_e$;

$v_2=u_2-\dfrac{(u_2|v_1)}{(v_1|v_1)}v_1=u_2-u_1=(0,-2,-1,2)$;

$v_3=u_3=(2,-1,2,0)$;

$v_4=u_4-\dfrac{(u_4|v_3)}{(v_3|v_3)}v_3=u_4-u_3=(-2,0,2,1)$.

Det återstår att normera dem till 1.

$$|v_1|=3,\ |v_2|=3,\ |v_3|=3 \text{ och } |v_4|=1.$$

$\hat{e}_1=(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3},\frac{2}{3})$, $\hat{e}_2=(0,-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, $\hat{e}_3=(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},0)$

$\hat{e}_4=(-\frac{2}{3},0,\frac{2}{3},\frac{1}{3})$; $\underline{P(\hat{e}_1)=\hat{e}_1,\ P(\hat{e}_2)=\hat{e}_2,\ P(\hat{e}_3)=P(\hat{e}_4)=\mathbb{O}.}$

<u>Anm</u> $[u_1,u_2]\oplus[u_3,u_4]=\mathcal{U}\oplus\mathcal{U}=\mathbb{R}^4$.

Symbolen $\oplus$ utläses "den direkta summan av". Dessa begrepp och många andra genomgås i högre kurser i linjär algebra.

<u>Uppgift 24.31</u> (Sid. 28)

<u>Lösning</u>

$Q(\mathbb{x})=x_2^2-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3=\mathbb{x}^t\begin{bmatrix}0&-1&2\\-1&1&-1\\2&-1&0\end{bmatrix}\mathbb{x}$;

$A=\begin{bmatrix}0&-1&2\\-1&1&-1\\2&-1&0\end{bmatrix}\Rightarrow \det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda&-1&2\\-1&1-\lambda&-1\\2&-1&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(1-\lambda)+$

$+6\lambda=-\lambda(\lambda^2-\lambda-6)=-\lambda(\lambda+2)(\lambda-3)$; $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=3.$

I en ON-bas bestående av egenvektorer är

$$Q=0\cdot y_1^2-2y_2^2+3y_3^2.$$

Det <u>positiva egenrummet</u> svarar mot $\lambda=3$:

$$(A-3E)\mathbb{X}=\mathbb{O}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}-3&-1&2&0\\-1&-2&-1&0\\2&-1&-3&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}-2&1&3&0\\-1&-2&-1&0\\2&-1&-3&0\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}-2&1&3&0\\-1&-2&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}-2&1&3&0\\-5&0&5&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}-2&1&3&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}0&1&1&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\Leftrightarrow\begin{cases}x_2+x_3=0\\-x_1+x_3=0\\x_3=\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=s\\x_2=-s\\x_3=s\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ det positiva egenrummet är $\mathcal{U}=[(1,-1,1)]$.

<u>Svar</u>: $Q(\mathbb{x})>0\Leftrightarrow\mathbb{x}\in[(1,-1,1)]$.

Uppgift 24.32 (Sid. 28)

Lösning

$$Q(\mathbb{X}) = x^2+3y^2+z^2+2xy+ayz = x^2+y^2+2xy+2y^2+z^2+ayz = (x+y)^2+\left(z+\frac{a}{2}y\right)^2+\frac{8-a^2}{4}y^2;$$

(1) $8-a^2>0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2} \Rightarrow$ positiv definit.

(2) $8-a^2=0 \Leftrightarrow a=\pm 2\sqrt{2} \Rightarrow$ positiv semidefinit.

(3) $8-a^2<0 \Leftrightarrow a<-2\sqrt{2} \vee a>2\sqrt{2} \Rightarrow$ indefinit.

Uppgift 24.33 (Sid. 28)

Lösning

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 - e^{-t} \\ x_2' = 2x_1 + 4x_2 + e^{-t} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}}^{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}}^{\mathbb{B}}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4)+2 = \lambda^2-5\lambda+6 = (\lambda-2)(\lambda-3); \quad \underline{\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3.}$$

$\underline{\lambda=2}$: $(A-2E)\mathbb{X} = \mathbb{O} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow x_1+x_2=0$

$$\Leftrightarrow \mathbb{X}^{(1)} = e[1\ \ -1]^t \Rightarrow \hat{e}_1 = e\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \qquad \text{forts}$$

$\underline{\lambda=3}$: $(A-3E)\mathbb{X} = \mathbb{O} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow 2x_1+x_2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mathbb{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}e\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow (\mathbb{X} = \mathbb{T}\mathbb{Y} \Leftrightarrow \mathbb{Y} = \mathbb{T}^{-1}\mathbb{X}) \Rightarrow \mathbb{T}\frac{d}{dt}\mathbb{Y} = A\mathbb{T}\mathbb{Y} + \mathbb{B} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\mathbb{Y} = \mathbb{T}^{-1}A\mathbb{T}\mathbb{Y} + \mathbb{T}^{-1}\mathbb{B} \Leftrightarrow \frac{d\mathbb{Y}}{dt} = \mathrm{diag}(2,3)\mathbb{Y} + \mathbb{T}^{-1}\mathbb{B} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\mathbb{Y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\mathbb{Y} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbb{B} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 2y_1 - e^{-t} \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' - 2y_1 = -e^{-t} \\ y_2' - 3y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}y_1e^{-2t} = -e^{-3t} \\ \dfrac{d}{dt}y_2e^{-3t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1e^{-2t} = \frac{1}{3}e^{-3t} + C_1 \\ y_2e^{-3t} = C_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_1 = C_1e^{2t} + \frac{1}{3}e^{-t} \wedge y_2 = C_2e^{3t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbb{X} = \mathbb{T}\mathbb{Y} \Rightarrow \mathbb{X}(0) = \mathbb{T}\cdot\mathbb{Y}(0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1+1/3 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} C_1+1/3 \\ C_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{11}{3} \\ C_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{11}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{-t} \\ -2e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3}e^{2t} - 2e^{3t} + \frac{1}{3}e^{-t} \\ -\frac{11}{3}e^{2t} + 4e^{3t} - \frac{1}{3}e^{-t} \end{bmatrix}$$

Svar: $x_1 = \frac{11}{3}e^{2t} - 2e^{3t} + \frac{1}{3}e^{-t}$, $x_2 = -\frac{11}{3}e^{2t} + 4e^{3t} - \frac{1}{3}e^{-t}$.