1. Komplexa tal

Problem 1.1 (Sid. 1)

Lösning

a) $(1+i)(2+i)(3+i)=(1+i)\big((2+i)(3+i)\big)=(1+i)(5+5i)=$

$$=(1+i)\cdot 5(1+i)=5(1+i)^2=5.2i=\underline{\underline{10i}}$$

b) $(1-2i)^4=(1+(-2i))^4=\sum_{j=0}^{4}\binom{4}{j}(-2i)^j=\binom{4}{0}(-2i)^0+$

$$+\binom{4}{1}(-2i)^1+\binom{4}{2}\cdot(-2i)^2+\binom{4}{3}(-2i)^3+\binom{4}{4}(-2i)^4=$$

$$=1\cdot 1+4\cdot(-2i)+6(-2i)^2+4\cdot(-2i)^3+1\cdot(-2i)^4=$$

$$=1-8i-24+32i+16=\underline{\underline{-7+24i.}}$$

c) Jag hänvisar till övningarna 1.1:15 och 27 i läroboken (Saff & Snider, Fundamentals of Complex Analysis..., 3rd Edition).

$$\frac{1+2i^5}{3-4i}+\frac{2+i^{19}}{5i}=\frac{1+2i^{4+1}}{3-4i}+\frac{2+i^{4^2+3}}{5i}=\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2+i^3}{5i}=$$

$$=\frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}+\frac{(2+i^3)(-i)}{5i(-i)}=\frac{-5+10i}{25}+\frac{-i^4-2i}{5}=$$

$$=\frac{5(-1+2i)}{5^2}+\frac{-1-2i}{5}=\frac{-1+2i}{5}+\frac{-1-2i}{5}=\frac{-1+2i-1-2i}{5}=\underline{\underline{-\frac{2}{5}}}$$

Problem 1.2 (Sid. 1)

Lösning

a) $\begin{cases} z+3\bar{z}=4-4i \\ \overline{z+3\bar{z}}=\overline{4-4i}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} z+3\bar{z}=4-4i \\ \bar{z}+3z=4+4i\end{cases}\overset{!}{\Leftrightarrow}\begin{cases} 4(z+\bar{z})=8 \\ -2(z-\bar{z})=-8i\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 4\cdot 2\operatorname{Re}z=8 \\ -2\cdot 2i\operatorname{Im}z=-8i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\operatorname{Re}z=1 \\ \operatorname{Im}z=2\end{cases}\Rightarrow \underline{\underline{z=1+2i.}}$$

Anm. I $\overset{!}{\Leftrightarrow}$ underförstås ledvis addition och ledvis subtraktion.

b) $z-\bar{z}=2i\Leftrightarrow\frac{z-\bar{z}}{2i}=1\Leftrightarrow\operatorname{Im}z=1\Leftrightarrow\underline{\underline{z=x+i,\ x\in\mathbb{R}.}}$

c) $\underline{\underline{z=a+ib}}\Rightarrow z-i\bar{z}=a+ib-i(a-ib)=a+ib-ia-b=$

$$=a(1-i)-b\cdot(1-i)=(a-b)(1-i)=i\Leftrightarrow$$

$$\mathbb{R}\ni a-b=\frac{i}{1-i}=\frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{i+i^2}{2}=\frac{-1+i}{2}\notin\mathbb{R}.$$

Ekvationen saknar lösningar i detta fall.

Problem 1.3 (Sid. 1)

Lösning: $\forall z,w\in\mathbb{C}:\ |zw|=|z||w|$ (Se Ö. 1.2:14)

$$z=re^{i\theta}\Rightarrow |z|=|re^{i\theta}|=r|e^{i\theta}|=r\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=r.$$

a) $$re^{i\theta}=1-i\sqrt{3}\Leftrightarrow\begin{cases} r\cos\theta=1\\ r\sin\theta=-\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow (r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=$$

$$=1^2+(-\sqrt{3})^2=4\Leftrightarrow r=2\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{2}\\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\theta=-\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi\Rightarrow \underline{1-i\sqrt{3}=2\,\mathrm{cis}\,\frac{6n-1}{3},\ n\in\mathbb{Z}}$$

b) $$\underline{(1+i)^6}=(1+i)^{2\cdot 3}=((1+i)^2)^3=(2i)^3=2^3\cdot i^3=8\cdot(-i)=$$

$$=8\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi\right)=\underline{8\,\mathrm{cis}\left(\frac{4n-1}{2}\pi\right),\ n\in\mathbb{Z}}.$$

Anm. $r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}=r\,\mathrm{cis}\,\theta=r\underline{/\theta}$.

De två sista beteckningssätten används av elektroingenjörerna.

c) $$\frac{1}{(1-i)^9}=\left(\frac{1}{1-i}\right)^9=\left(\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}\right)^9=\left(\frac{1+i}{2}\right)^9=\frac{(1+i)^9}{2^9}=$$

$$=\frac{(1+i)^8(1+i)}{2^9}=\frac{((1+i)^2)^4(1+i)}{2^9}=\frac{(2i)^4\cdot(1+i)}{2^9}=$$

$$=\frac{2^4(1+i)}{2^9}=\frac{1+i}{2^5}=\frac{1}{2^5}\cdot 2^{1/2}\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}+n2\pi\right)\Leftrightarrow$$

$$\underline{\frac{1}{(1-i)^9}=\frac{\sqrt{2}}{32}\,\mathrm{cis}\left(\frac{8n+1}{4}\pi\right),\ n\in\mathbb{Z}.}$$

d) $$\left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right)^{167}=\left(i\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{167}=i^{167}\cdot\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{167};$$ forts.

(1) $167=41\cdot 4+3\Rightarrow i^{167}=i^3=-i$ (Ö. 1.1:15).

(2) $$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\mathrm{cis}\frac{\pi}{3}\Rightarrow\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{167}=\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{3}\cdot 167+m2\pi\right)$$

$$=\mathrm{cis}\left(\left(56-\frac{1}{3}\right)\pi+m\cdot 2\pi\right)=$$

$$=\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{3}+(m+28)\pi\right)=\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi\right)\Rightarrow$$

$$\underline{\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{167}}=-i\cdot\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi\right)=$$

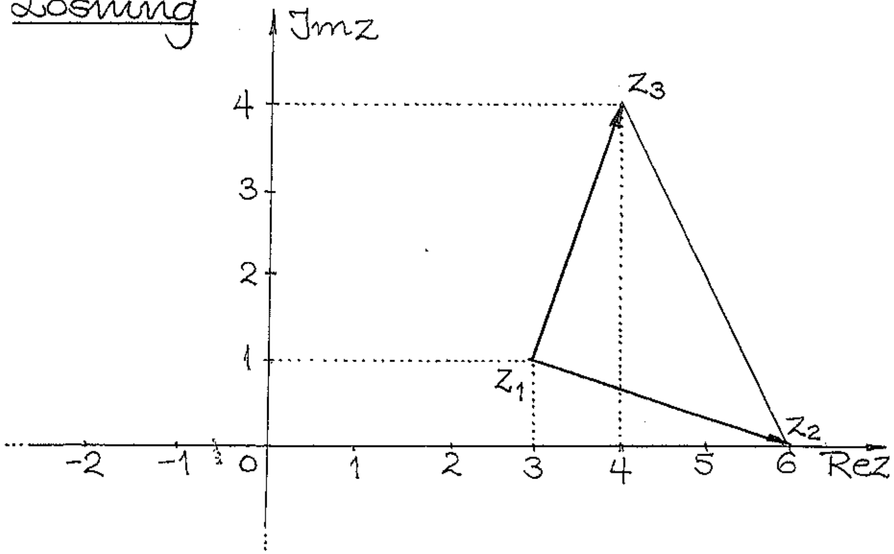
$$=\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{3}+n2\pi\right)=$$

$$=\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi\right)=$$

$$=\mathrm{cis}\left(\frac{7\pi}{6}+n2\pi\right)=\underline{\mathrm{cis}\left(\frac{12n+7}{6}\pi\right),\ n\in\mathbb{Z}.}$$

Problem 1.4 (Sid. 1)

Lösning



$$\begin{cases} z_2-z_1=6-(3+i)=6-3-i=3-i \\ z_3-z_1=4+4i-(3+i)=1+3i \end{cases} \Rightarrow z_3-z_1=i(z_2-z_1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z_3-z_1|=|i(z_2-z_1)| \\ \arg(z_3-z_1)=\arg(i(z_2-z_1)) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_3-z_1|=|z_2-z_1| \\ \arg(z_3-z_1)=\arg(i)+\arg(z_2-z_1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_3-z_1|=|z_2-z_1| \\ \arg(z_3-z_1)=\arg(z_2-z_1)+\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow z_1, z_2$ och z_3 hörn i en halvkvadrat.

b) $(1+i)(2+i)(3+i)=10i \Rightarrow \frac{\pi}{2}=\arg(10\cdot i)=\arg(1+i)+$

$$+\arg(2+i)+\arg(3+i)=\operatorname{atn}1+\operatorname{atn}2^{-1}+\operatorname{atn}3^{-1}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\operatorname{atn}\frac{1}{2}+\operatorname{atn}\frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{atn}\frac{1}{2}+\operatorname{atn}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}.$$

c) $(1-2i)^4=-7+24i \Leftrightarrow \arg(1-2i)^4=\arg(-7+24i)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\arg(1-2i)=\arg(-7+24i)=\arg(-(7-24i))$$

$$\Leftrightarrow 4(-\operatorname{atn}2)=-\pi-\operatorname{atn}\frac{24}{7}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\arctan 2-\arctan\frac{24}{7}=\pi.$$

Problem 1.5 (Sid. 1)

Lösning

$$\cos\theta\cdot\sin^2 2\theta=\cos\theta\left(\frac{e^{i2\theta}-e^{-i2\theta}}{2i}\right)^2=\cos\theta\cdot\frac{(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta})^2}{(2i)^2}=$$

$$=\cos\theta\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}-2)=$$

$$=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\left(-\frac{1}{4}\right)(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}-2)=$$

$$=-\frac{1}{8}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}-2)=$$

$$=-\frac{1}{8}(e^{5i\theta}+e^{-3i\theta}-2e^{i\theta}+e^{3i\theta}+e^{-5i\theta}-2e^{-i\theta})=$$

$$=-\frac{1}{8}(-2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta})+(e^{5i\theta}+e^{-5i\theta}))$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\cdot\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}-\frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}}{2}-\frac{e^{5i\theta}+e^{-5i\theta}}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}(2\cos\theta-\cos3\theta-\cos5\theta).$$

Problem 1.6 (Sid. 1)

Lösning

$$\cos3\theta+i\sin3\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3\cos^2\theta\, i\sin\theta$$

$$+3\cos\theta\cdot(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3=$$

$$=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\ \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\cdot(1-\cos^2\theta) \\ \sin 3\theta = 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta \\ \sin 3\theta = 3\sin\theta - 3\sin^3\theta - \sin^3\theta \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \end{cases}$$

Problem 1.7 (Sid. 1)

Lösning

$$w^2 = 3-4i \Rightarrow /w = u+iv/ \Rightarrow u^2-v^2+i2uv = 3-4i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2-v^2=3 \\ 2uv=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2-v^2=3 \\ v=-\frac{2}{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2-\frac{4}{u^2}=3 \\ v=-\frac{2}{u} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} u^4-3u^2-4=0 \\ v=-\frac{2}{u} \end{cases}}_{u,v\in\mathbb{R}} \Leftrightarrow /\zeta=u^2/ \Leftrightarrow \begin{cases} \zeta^2-3\zeta-4=0 \\ \zeta=u^2 \\ v=-2/u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \zeta=u^2=4 \\ v=-\frac{2}{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \vee u=-2 \\ v=-\frac{2}{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} u=-2 \\ v=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underline{w=2-i} \vee \underline{w=-2+i}. \quad (w=\pm(2-i).)$$

Problem 1.8 (Sid. 1)

Lösning

$$\begin{cases} z=re^{i\theta} \\ 32i=2^5e^{i\pi/2} \end{cases} \Rightarrow (re^{i\theta})^5 = 2^5e^{i\pi/2} \Leftrightarrow r^5e^{i5\theta} = 2^5e^{i\pi/2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^5=2^5 \\ e^{i5\theta}=e^{i(\pi/2+2k\pi)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=2 \\ 5\theta=\frac{4k+1}{2}\pi \end{cases}, 0\leq k\leq 4$$

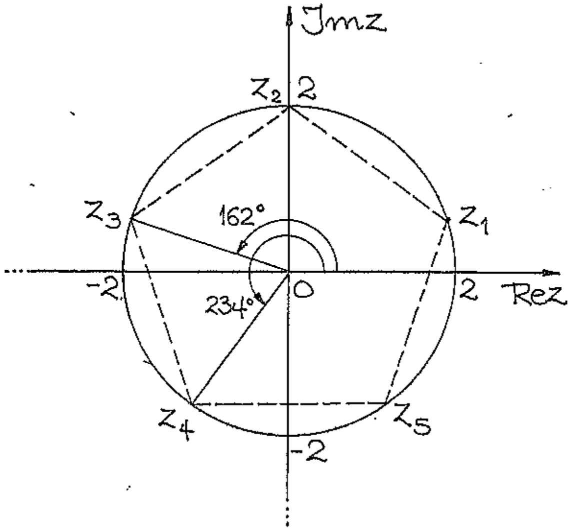
$$\Leftrightarrow z_{k+1} = 2e^{i(4k+1)\pi/10}, \ k=0,1,2,3,4$$

$$\Leftrightarrow \underline{z_1=2e^{i\pi/10}} \vee \underline{z_2=2e^{i\pi/2}=2i} \vee$$

$$\vee \underline{z_3=2e^{i9\pi/10}}, \underline{z_4=2e^{i13\pi/10}} \vee$$

$$\vee \underline{z_5=2e^{i17\pi/10}}.$$

Rötterna bildar en regelbunden femhörning inskriven i cirkeln $|z|=2$ med ett hörn i $2i$.



Figuren härovan visar rötterna till $z^5=32i$.

Problem 1.9 (Sid. 1)

Lösning

$$z^4+4=0 \Leftrightarrow z^4=-4 \Leftrightarrow z^2=\pm 2i=(1\pm i)^2 \Rightarrow z=\pm(1+i)$$

$$\Leftrightarrow P(z)=\underline{(z-1-i)(z-1+i)\cdot(z+1+i)(z+1-i)}=$$

$$=((z-1)^2-i^2)((z+1)^2-i)^2=$$

$$=\underline{(z^2-2z+2)(z^2+2z+2)}.$$

Anm. $P(z)=z^4+4=(z^4+4z^2+4)-4z^2=(z^2+2)^2-(2z)^2$

$$=(z^2-2z+2)(z^2+2z+2)=((z-1)^2+1)((z+1)^2+1)=/1=-i^2/=$$

$$=((z-1)^2-i^2)((z+1)^2-i^2)=(z-1-i)(z-1+i)(z+1-1)(z+1+i).$$

Problem 1.10 (Sid. 1)

Lösning

a) $\underline{z^2-(1+2i)z+(1-5i)=0} \Leftrightarrow z^2-(1+2i)z=-(1-5i) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z^2-(1+2i)z+\left(\frac{1+2i}{2}\right)^2=\left(\frac{1+2i}{2}\right)^2-(1-5i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(z-\frac{1+2i}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1-4+4i)-1+5i=\frac{1}{4}(-7+24i)$$

$$\Leftrightarrow \left(z-\frac{1+2i}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(3+4i)^2 \Leftrightarrow z-\frac{1+2i}{2}=\pm\frac{3+4i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{1+2i\pm(3+4i)}{2} \Leftrightarrow \underline{z=2+3i} \vee \underline{z=-1-i}.$$

b) $\underline{z^6-16z^3+64=0} \Leftrightarrow /\zeta=z^3/ \Leftrightarrow \zeta^2-16\zeta+64=0$

$$\Leftrightarrow (\zeta-8)^2=0 \Leftrightarrow \zeta=8 \text{ (dubblett)}.$$

$$z^3=8 \Leftrightarrow (z-2)(z^2+2z+4)=0 \Leftrightarrow z=2 \vee$$

$$\vee\ z^2+2z+4=0 \Leftrightarrow \underline{z=2,\ -1\pm i\sqrt{3}}.$$

$$\underline{z_1=z_2=2},\quad \underline{z_3=z_4=-1+i\sqrt{3}},\quad \underline{z_5=z_6=-1-i\sqrt{3}}.$$

c) $\underline{z^4+z^3+z^2+z+1=0} \Leftrightarrow \frac{z^5-1}{z-1}=0 \wedge z\neq 1 \overset{!}{\Leftrightarrow} z^5=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underline{z_n=e^{i2n\pi/5},\ n=1,2,3,4}.$$

d) $z^4+iz^3+2z^2+iz+1 \equiv (iz)^4-(iz)^3-2(iz)^2+iz+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow /w=iz/ \Leftrightarrow w^4-w^3-2w^2+w+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w^4-w^3-w^2-(w^2-w-1)=(w^2-1)(w^2-w-1)=0$

$\Leftrightarrow w^2=1 \vee w^2-w-1=0 \Leftrightarrow w=\pm 1, \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{z=i} \vee \underline{z=-i} \vee \underline{z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \vee \underline{z=\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

Problem 1.11 (Sid. 1)

Lösning

a) $z=a+ib \Rightarrow z\cdot\overline{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2=|z|^2$.

b) $z=a+ib \Rightarrow z+\overline{z}=a+ib+a-ib=2a=2\,\mathrm{Re}\,z$.

c) $z=a+ib \Rightarrow z-\overline{z}=a+ib-(a-ib)=2ib=2i\,\mathrm{Im}\,z$

d) $\underline{|z_1+z_2|^2}=(z_1+z_2)\cdot(\overline{z_1+z_2})=(z_1+z_2)\cdot(\overline{z_1}+\overline{z_2})=$

$=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=$

$=|z_1|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}+|z_2|^2=$

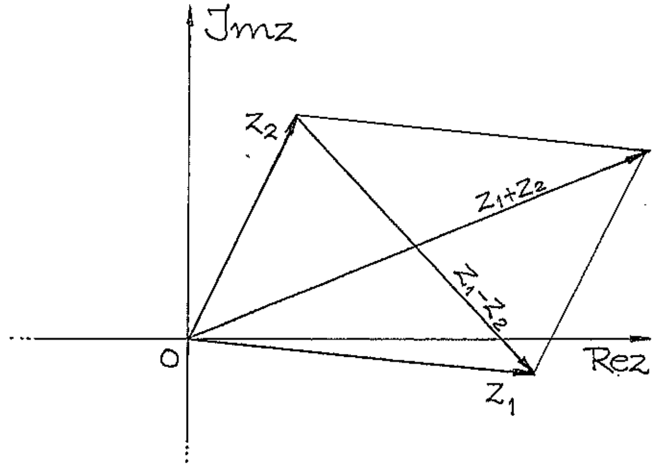
$=\underline{|z_1|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2}$.

e) $\underline{|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2}=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})=$

$=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=z_1z_1+z_1\overline{z_2}+$

$+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=$

$=2z_1\overline{z_1}+2z_2\overline{z_2}=\underline{2|z_1|^2+2|z_2|^2}$.



Komplexa visare uppför sig som vektorer.

Problem 1.12 (Sid. 1)

Lösning

a) $\underline{z=a+ib} \Rightarrow |z|^2=a^2+b^2 \geq a^2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2}\leq\sqrt{|z|^2} \Leftrightarrow |a|\leq|z|$

$\Leftrightarrow |\mathrm{Re}\,z|\leq|z|$; $\underline{|\mathrm{Re}\,z|=|z| \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}}$.

b) $\underline{z=a+ib} \Rightarrow |z|^2=a^2+b^2\geq b^2 \Leftrightarrow |b|=|\mathrm{Im}\,z|\leq|z|$;

$\underline{|\Im m z| = |z| \Leftrightarrow z = ib,\ b\in\mathbb{R}.}$

c) $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \le |z_1|^2+|z_2|^2+$

$+2|\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})| \le |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\overline{z_2}| =$

$=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||\overline{z_2}| = |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| =$

$=(|z_1|+|z_2|)^2 \Leftrightarrow \underline{|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|}.$

$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2| \Leftrightarrow |r_1e^{i\theta_1}+r_2e^{i\theta_2}| = r_1+r_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|1+\frac{r_2}{r_1}e^{i(\theta_2-\theta_1)}\right| = 1+\frac{r_2}{r_1} \Leftrightarrow \theta_1-\theta_2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \theta_1 = \mathrm{Arg}\, z_1 = \mathrm{Arg}\, z_2 = \theta_2 \Leftrightarrow \underline{z_1 = kz_2,\ k>0}.$

d) $\underline{|z|} = \left|\frac{z+\bar z}{2} + i\frac{z-\bar z}{2i}\right| \le \left|\frac{z+\bar z}{2}\right| + \left|\frac{z-\bar z}{2i}\right| = \underline{|\mathrm{Re}\, z|+|\Im m\, z|} \le$

$\le |z|+|z| = \underline{2|z|}$

$$\begin{cases} z=a+ib \\ |z| = |\mathrm{Re}\, z|+|\Im m\, z| \end{cases} \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = |a|+|b| \Leftrightarrow a^2+b^2 =$$

$=(|a|+|b|)^2 = a^2+b^2+2|a||b| \Leftrightarrow a\cdot b = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=0 \vee b=0 \Leftrightarrow \underline{\mathrm{Re}\, z=0} \vee \underline{\Im m\, z=0.}$

$|\mathrm{Re}\, z|+|\Im m\, z| = 2|z| \Leftrightarrow |a|+|b| = 2\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 4(a^2+b^2) =$

$=(|a|+|b|)^2 = a^2+2|a||b|+b^2 \Leftrightarrow a^2+b^2-\frac{2|a||b|}{3}=0$

$\Leftrightarrow \left(|a|-\frac{1}{3}|b|\right)^2+\frac{8}{9}b^2 = 0 \Leftrightarrow a=b=0 \Leftrightarrow \underline{z=0.}$

e) $|z_1| = |z_1+z_2-z_2| \le |z_1+z_2|+|-z_2| = |z_1+z_2|+|z_2|$

$\Leftrightarrow |z_1|-|z_2| \le |z_1+z_2|;$ (1)

$|z_2| = |z_1+z_2-z_1| \le |z_1+z_2|+|z_1| \Leftrightarrow |z_1|-|z_2| \le |z_1+z_2|$ (2)

$\underline{\underline{(1)+(2)}} \Rightarrow \pm(|z_1|-|z_2|) \le |z_1+z_2| \Leftrightarrow \underline{\underline{||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2|}}.$

$\underline{\underline{||z_1|-|z_2|| = |z_1+z_2|}} \Leftrightarrow (|z_1|-|z_2|)^2 = |z_1+z_2|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2| = |z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}\, z_1\overline{z_2}$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_1\overline{z_2}| = 0 \Leftrightarrow \cos(\theta_1-\theta_2)+1=0$

$\Leftrightarrow \theta_1-\theta_2 = \pm\pi \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2\pm\pi \Leftrightarrow \underline{z_1 \uparrow\downarrow z_2}.$

Problem 1.13 (Sid. 1)

Lösning

a) $|z|=1 \Rightarrow |2z^2+3iz+1| \le |2z^3|+|3iz|+1 = 2|z|^3+$

$+3|z|+1 = 2+3+1 = 6.$

b) $|z|=1 \Rightarrow |z^3+4| \ge ||z^4|-4| = 4-|z^3| = 4-1 = 3.$

c) $|z|=1 \Rightarrow \left|\frac{z+2i}{3iz-1}\right| = \frac{|z+2i|}{|3iz-1|} \le \frac{|z|+2}{3|z|-1} = \frac{1+2}{3-1} = \frac{3}{2}$ (Se 1.12).

d) $|2z^2+3iz+1| \overset{?}{=} 6$ (Se för övrigt under a))

$$\Leftrightarrow |2z^2+3iz+1|^2 = (2z^2+3iz+1)(\overline{2z^2+3iz+1}) =$$

$$= (2z^2+3iz+1)(2\bar{z}^2-3i\bar{z}+1) = 6^2 = 36 \Leftrightarrow$$

$$4z^2\bar{z}^2 - 6iz^2\bar{z} + 2z^2 + 6iz\bar{z}^2 + 9z\bar{z} + 3iz +$$

$$+ 2\bar{z}^2 - 3i\bar{z} + 1 = 4|z|^4 - 6iz|z|^2 + 2z^2 + 6i\bar{z}|z|^2 +$$

$$+ 9|z| + 3iz + 2\bar{z}^2 - 3i\bar{z} + 1 = 4 - 6iz + 2z^2 +$$

$$+ 6i\bar{z} + 9 + 3iz + 2\bar{z}^2 - 3i\bar{z} + 1 = 2(z^2+\bar{z}^2) +$$

$$+ 3i\bar{z} - 3iz + 14 = 36 \Leftrightarrow 4\,\mathrm{Re}(z^2) + 6\,\mathrm{Im}\,z =$$

$$= 22 \Leftrightarrow / z = e^{i\theta} / \Leftrightarrow 4\cos 2\theta + 6\sin\theta = 22$$

$$\Leftrightarrow 4 - 8\sin^2\theta + 6\sin\theta = 22 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\sin^2\theta - 6\sin\theta = -18 \Leftrightarrow \sin^2\theta -$$

$$- \frac{3}{4}\sin\theta = -\frac{9}{4} \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} - \frac{9}{4}} \notin \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ likhet kan inte gälla i a), varav

följer att $|z| = 1 \Rightarrow |2z^2+3iz+1| < 6$.

Med den använda triangelolikheten kan det visas att $0 < |2z^2+3iz+1| < 6$.

Problem 1.14 (Sid. 1)

Lösning

$$z = a+ib \Rightarrow |\mathrm{Re}\,z| + |\mathrm{Im}\,z| = |a|+|b| \overset{!}{=} C\sqrt{a^2+b^2} = C|z|$$

$$\Leftrightarrow (|a|+|b|)^2 = C^2(a^2+b^2) \Leftrightarrow / |x|^2 = x^2 / \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+2|a||b| = C^2(a^2+b^2) \Leftrightarrow / C>1 / \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (C^2-1)(a^2+b^2) - 2|a||b| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2 - \frac{2}{C^2-1}|a|\cdot|b| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(|a| - \frac{1}{C^2-1}|b|\right)^2 = \frac{1}{(C^2-1)^2}b^2 - b^2 = \left(\frac{1}{(C^2-1)^2} - 1\right)b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(C^2-1)^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (C^2-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow C^2-1 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow C^2 \leq 2 \Leftrightarrow C \leq \sqrt{2}.$$

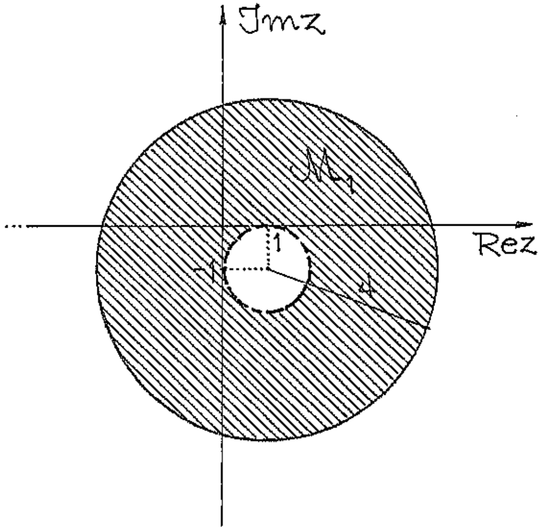
Det minsta C som duger är $\sqrt{2}$.

Problem 1.15 (Sid. 1)

Lösning: $z = x+iy$

a) $z-1+i = x-1+i+i(y+1) \Rightarrow |z-1+i| = \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$;

$M_1 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-1+i| \leq 4\}$; avståndet från z till $z_0 = 1-i$ är minst 1 och högst 4; det är frågan om en <u>ring</u> som i figuren nedan.



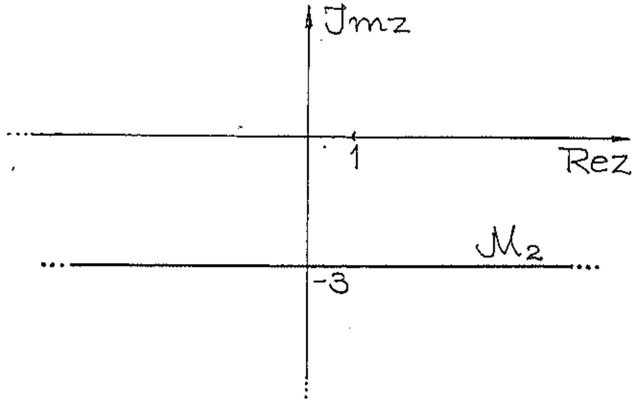
Den inre randdelen $|z-1+i|=1$ <u>ingår inte i M_1</u> (streckad i figuren). M_1 kan karakteriseras som punktmängden i det komplexa planet som ligger <u>utanför</u> cirkeln $C_1: |z-1+i|=1$ och samtidigt <u>innanför och på</u> cirkeln C_2: $|z-1+i|=4$.

<u>Liknande problem studeras i flervariabel.</u>

b) $z = x+iy \Rightarrow \bar{z} - i = \overline{z+i} = \overline{x+i(y+1)} = x - i(y+1)$;

$\operatorname{Im}(\bar{z}-i) = -(y+1) = 2 \Leftrightarrow y = -3 \Leftrightarrow \underline{z = x - 3i}$.

$\underline{M_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(\bar{z}-i) = 2\}}$ är en rät linje i det komplexa planet genom $z_0 = -3i$ och parallell med Re-axeln.



c) $|z-1| = |z+i| \Leftrightarrow |z-1|^2 = |z+i|^2 \Leftrightarrow (z-1)(\overline{z-1}) = (z+i)(\overline{z+i})$

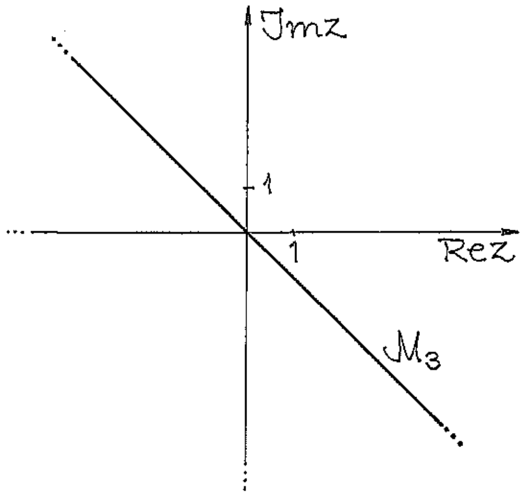
$$\Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) = (z+i)(\bar{z}-i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 = z\bar{z} + i(\bar{z}-z) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(z+\bar{z}) = -i(z-\bar{z}) \Leftrightarrow -2\operatorname{Re} z = 2\operatorname{Im} z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z = 0 \Leftrightarrow y + x = 0;$$

$\underline{M_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z+i|\}}$ är en rät linje genom origo i det komplexa talplanet (figur nedan)



d) $|z-i|<2|z+1| \Leftrightarrow |z-i|^2<4|z+1|^2 \Leftrightarrow (z-i)(\overline{z-i})<$

$<4(z+1)(\overline{z+1}) \Leftrightarrow (z-i)(\bar{z}+i)<4(z+1)(\bar{z}+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\bar{z}+i(z-\bar{z})+1<4(z\bar{z}+z+\bar{z}+1) \Leftrightarrow /z=x+iy/$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1<4(x^2+y^2+2x+1) \Leftrightarrow$

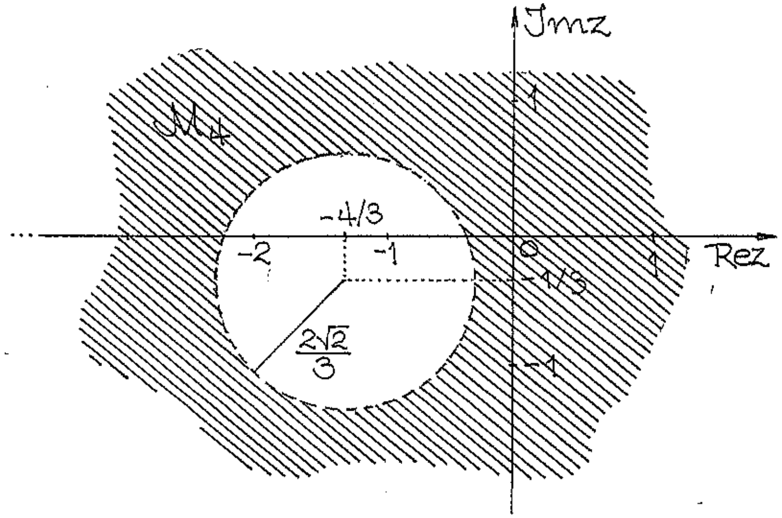
$\Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1<4x^2+4y^2+8x+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(x^2+y^2)+8x+2y+3>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{8}{3}x+\frac{2}{3}y+1>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+\frac{4}{3})^2+(y+\frac{1}{3})^2>-1+\frac{16}{9}+\frac{1}{9}=\frac{8}{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{M_4=\{z\in\mathbb{C}: |z+\frac{4}{3}+i\frac{1}{3}|>\frac{\sqrt{8}}{3}\}}.$ (Se figur)

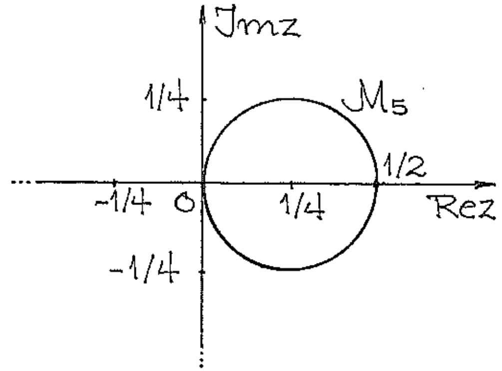


Figur till 1.15 d).

e) $\mathrm{Re}(\frac{1}{z})=\mathrm{Re}(\frac{\bar{z}}{|z|^2})=/z=x+iy/=\mathrm{Re}(\frac{x-iy}{x^2+y^2})=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2+y^2}=2 \Leftrightarrow x^2+y^2=\frac{1}{2}x \Leftrightarrow (x-\frac{1}{4})^2+y^2=(\frac{1}{4})^2$

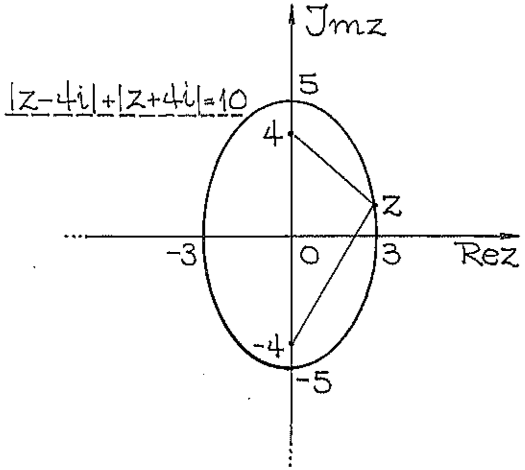
$\Leftrightarrow M_5=\{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Re}\frac{1}{z}=2\}=\underline{\{z\in\mathbb{C}: |z-\frac{1}{4}|=\frac{1}{4}\}}.$



M_4 är en cirkel i det komplexa planet.

f) $|z-4i|+|z+4i|=10$; avståndet från $z=(x,y)$ till $(0,-4)$ plus avståndet från $z=(x,y)$ till $(0,4)$ är konstant 10; det är frågan om en ellips i det komplexa planet med brännpunkterna i $\pm 4i$ och storaxeln $2a=10$.

$$\begin{cases} 2a=10 \\ 2c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow b^2=a^2-c^2=9 \Rightarrow \underline{\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1}.$$



Anm. Med $z=x+iy$ blir räkningarna omfattande; den geometriska definitionen är att föredra.

Problem 1.16 (Sid. 1)

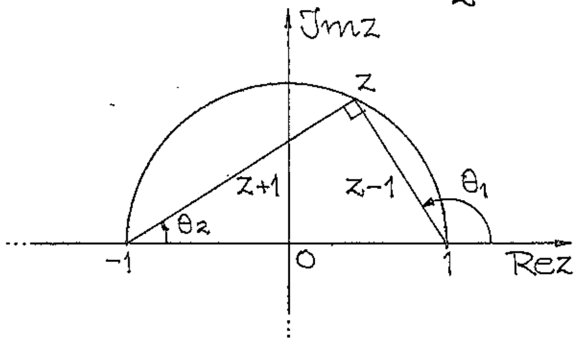
Lösning

(1) $|z|=1 \Leftrightarrow z=e^{i\theta} \Rightarrow \dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}=\dfrac{\cancel{e^{i\theta/2}}(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})}{\cancel{e^{i\theta/2}}(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})}$

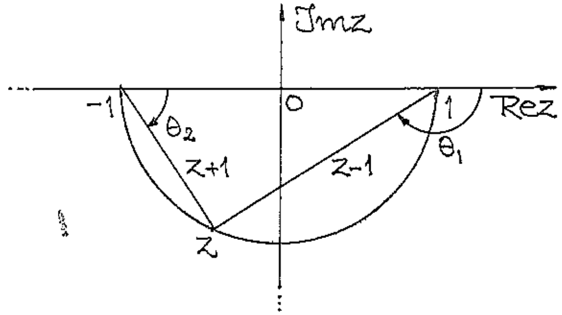
$$=i\frac{(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})/2i}{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})/2}=i\frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}=i\cdot\tan\frac{\theta}{2};$$

(2) $-\pi<\theta<\pi \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<0 \Rightarrow \tan\dfrac{\theta}{2}<0 \\ 0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\dfrac{\theta}{2}>0 \end{cases}$

(3) $\operatorname{Arg}\dfrac{z-1}{z+1}=\operatorname{Arg}\left(i\cdot\tan\dfrac{\theta}{2}\right)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2};\ |z|=1,\ \operatorname{Im}z<0 \\ +\dfrac{\pi}{2};\ |z|=1,\ \operatorname{Im}z>0 \end{cases}$



Obs! $\operatorname{Arg}\dfrac{z-1}{z+1}=\operatorname{Arg}(z-1)-\operatorname{Arg}(z+1)=\theta_1-\theta_2=\dfrac{\pi}{2}$.



forts

$$\operatorname{Arg}\frac{z-1}{z+1}=\operatorname{Arg}(z-1)-\operatorname{Arg}(z+1)=\theta_1-\theta_2=-\frac{\pi}{2}.$$

Problem 1.17 (Sid. 1)

Lösning

$\underline{z=1+e^{i\theta}=1+\cos\theta+i\sin\theta,\ -\pi<\theta<\pi.}$ (principal).

(1) $|z|^2=(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta=1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta=$

$$=1+2\cos\theta+1=2(1+\cos\theta)=4\cos^2\frac{\theta}{2}\Leftrightarrow \underline{|z|=2\cos\frac{\theta}{2}}.$$

(2) $\tan(\operatorname{Arg}z)=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)}=\tan\dfrac{\theta}{2}$

$$\Leftrightarrow \underline{\operatorname{Arg}z=\frac{\theta}{2}}.$$

Problem 1.18 (Sid. 2)

Lösning

$$e^{it}\neq 1\Rightarrow\sum_{n=-N}^{N}e^{it}=e^{-iNt}\cdot\frac{(e^{it})^{(2N+1)}-1}{e^{it}-1}=/q=e^{it}/=$$

$$=e^{-iNt}\cdot\frac{e^{i(2N+1)t}-1}{e^{it}-1}=\frac{e^{-iNt}(e^{i2Nt+it}-1)}{e^{it}-1}=$$

$$=\frac{e^{iNt+it}-e^{-iNt}}{e^{it}-1}=\frac{\cancel{e^{it/2}}(e^{iNt+it/2}-e^{-iNt-it/2})}{\cancel{e^{it/2}}(e^{it/2}-e^{-it/2})}=$$

$$=\frac{e^{i(2N+1)t/2}-e^{-i(2N+1)t/2}}{e^{it/2}-e^{-it/2}}=\frac{\sin((2N+1)t/2)}{\sin(t/2)}.$$

Problem 1.19 (Sid. 2)

Lösning

$$\bar z_1 z_2=(x_1-iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+y_1y_2+i(x_1y_2-x_2y_1)$$

$$=\underline{(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)}+i\,\underline{(x_1,y_1,0)\times(x_2,y_2,0)}.$$

$$\operatorname{Re}(\bar z_1 z_2)=x_1y_1+x_2y_2=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2).$$

$$\operatorname{Im}(\bar z_1 z_2)=x_1y_2-x_2y_1=e\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\0\end{bmatrix}\times e\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\0\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}e_3.$$

Anm. Modellen med skalärprodukt och kryssprodukt är icke-realistisk; komplex analys är en tvådimensionell icke-linjär analys; $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$ (isomorfi) som normerade vektorrum.

2. Analytiska funktioner

Problem 2.1 (Sid. 2)

Lösning

a) $\lim_{z\to i\pi}(e^z+e^{-z}) = e^{i\pi}+e^{-i\pi} = 2\cos\pi = 2\cdot(-1) = \underline{\underline{-2}}.$

b) $\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{|z|} = /z=re^{i\theta}/ = \lim_{r\to 0}\frac{r^2e^{2i\theta}}{r} = \lim_{r\to 0} re^{2i\theta} = \underline{\underline{0}}.$

c) $\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{|z|^2} = /z=re^{i\theta}/ = \lim_{r\to 0} e^{2i\theta}$ existerar inte.

Problem 2.2 (Sid. 2)

Lösning

$f(z) = \frac{z^3+i}{z^2+1}$ är definierad för alla $z\in\mathbb{C}$ med undantag av dem som gör nämnaren 0;

$$z^2+1 = 0 \Leftrightarrow z = \pm i \Rightarrow \underline{\underline{D_f = \mathbb{C}\setminus\{i,-i\}}}.$$

$$f(z) = \frac{z^3+i}{z^2+1} = \frac{\cancel{(z-i)}(z^2+iz-1)}{(z+i)\cancel{(z-i)}} = \frac{z^2+iz-1}{z+i};$$

$$\lim_{z\to i} f(z) = \lim_{z\to i}\frac{z^2+iz-1}{z+i} = \frac{-1-1-1}{2i} = -\frac{3}{2i} = \underline{\underline{\frac{3}{2}i}};$$

$$\lim_{z\to -i} f(z) = \lim_{z\to -i}\frac{z^2+iz-1}{z+i} \text{ existerar inte.}$$

Svar: f är definierad för $z\neq\pm i$; i $z=i$ har f en hävbar diskontinuitet; med $f(i)=\frac{3}{2}i$ blir den kontinuerlig där; $f(-i)$ kan inte definieras på detta sätt.

Problem 2.3 (Sid. 2)

Lösning

$$\underline{f(x+iy) = 3x^2y - 4i(x-y)^3}$$

a) $\begin{cases} u(x,y) = 3x^2y \\ v(x,y) = 4(y-x)^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 6xy \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 12(y-x)^2 \end{cases} \wedge \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -12(y-x)^2 \end{cases};$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow 6xy = 12(y-x)^2 \Leftrightarrow xy = 2(y-x)^2$$

$$\Leftrightarrow xy = 2x^2-4xy+2y^2 \Leftrightarrow \underline{\underline{2x^2-5xy+2y^2=0}};$$

$$\Leftrightarrow x^2-\frac{5}{2}xy+y^2=0 \Leftrightarrow y = \frac{5}{4}x \pm \frac{3}{4}x = \frac{5\pm 3}{4}x$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=\tfrac{1}{2}x}} \vee \underline{\underline{y=2x}}$$

$y = \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow f$ deriverbar på linjen $y=\frac{x}{2}$; prövning p.s.s. visar att

f inte är deriverbar på linjen $y=2x$.

b) f är inte analytisk någonstans; analyticiteten kräver att f ska vara deriverbar i någon omgivning/domän; linjen $y=\frac{1}{2}x$ är för "tunn" (består av idel randpunkter).

Problem 2.4 (Sid. 2)

Lösning

$$z=x+iy\neq 0 \Rightarrow f(x+iy)=\frac{(x-iy)^2}{x+iy}=\frac{(x-iy)^3}{x^2+y^2}=$$
$$=\frac{x^3-3ix^2y-3xy^2+iy^3}{x^2+y^2}=$$
$$=\frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}+i\frac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2}=u(x,y)+iv(x,y)\Leftrightarrow$$
$$u(x,y)=\frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}\wedge v(x,y)=\frac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2};$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^4}=\frac{\partial v}{\partial y}\wedge\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y^4+6x^2y^2-3x^4}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$
$$u'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{u(h,0)-u(0,0)}{h}=1=v'_y(0,0)$$
$$u'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{u(0,k)-u(0,0)}{k}=0=-v'_x(0,0)$$

Anm. $\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{r\to 0}f(re^{i\theta})=\lim_{r\to 0}re^{-2i\theta}=0=$

$=f(0)\Leftrightarrow u(0,0)=0=v(0,0)$, jfr derivatorna.

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim_{r\to 0}\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}=\lim_{r\to 0}e^{-3i\theta}\nexists.$$

Observera att de partiella derivatorna inte är kontinuerliga i origo.

Problem 2.5 (Sid. 2)

Lösning

$$z=x+iy\Rightarrow \Delta z=\Delta x+i\Delta y$$

a) $f(z)=z-\bar{z}\Rightarrow f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta z-\Delta\bar{z}=\Delta z-\overline{\Delta z}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\Delta z-\overline{\Delta z}}{\Delta z}=1-\frac{\Delta\bar{z}}{\Delta z}=1-\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(z)\overset{!}{=}\left\{\begin{matrix}1-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x},\ \Delta y=0\\ 1+\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta y},\ \Delta x=0\end{matrix}\right\}=\begin{cases}0, & \Delta y=0\\ 2, & \Delta x=0\end{cases}$$

$\Rightarrow$ <u>$f'(z)$ existerar inte någonstans.</u>

Anm. $f(x+iy)=2iy\Leftrightarrow u(x,y)\equiv 0\wedge v(x,y)=2y$

$\frac{\partial u}{\partial x}=0\neq 1=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow f'(z)$ existerar inte någonstans.

b) $f(x+iy)=2x+ixy^2\Leftrightarrow u(x,y)=2x\wedge v(x,y)=xy^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2 = 2xy = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = y^2 = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \text{(saknar lösning(ar))} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ <u>$f'(z)$ existerar inte någonstans.</u>

c) $f(x+iy) = e^x e^{-iy} = e^x \cos y - ie^x \sin y = u + iv \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = -e^x \sin y \end{cases} \Rightarrow (CR) \Rightarrow \begin{cases} \cos y = -\cos y \\ -\sin y = \sin y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = 0 \\ \sin y = 0 \end{cases} \text{(inkonsistent)} \Rightarrow \underline{f'(z) \text{ saknas}}$$

<u>för alla $z \in \mathbb{C}$.</u>

Problem 2.6 (Sid. 2)

<u>Lösning</u>

$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ <u>helanalytisk</u> $\Rightarrow$

$\Rightarrow u = \phi(x)$ <u>harmonisk</u> $\Rightarrow \phi''(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{\phi(x) = Ax + B;\ A, B \in \mathbb{R}.}$

$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}_{(CR)} \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \underline{v(x,y) = \psi(y) + C,\ C \in \mathbb{R};}$ forts

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = A \Leftrightarrow v = Ay + D. \Rightarrow f(x+iy) =$

$= Ax + B + i(Ay + D) = A(x+iy) + B + iD.$

<u>Svar:</u> $f(z) = Az + E,\ A \in \mathbb{R}, E \in \mathbb{C}.$

Problem 2.7 (Sid. 2)

<u>Lösning</u>

$\underline{u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2xy}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 2y \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy + 2x \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ <u>u harmonisk</u> $\Rightarrow f(z) = f(x+iy) = u + iv.$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + 2y \Leftrightarrow v = 3x^2y - y^3 + y^2 + \phi(x)$

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - 2x \overset{!}{=} 6xy + \phi'(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \phi'(x) = -2x \Leftrightarrow \phi(x) = -x^2 + C \Rightarrow$

$\Rightarrow v = 3x^2y - y^3 + y^2 - x^2 + C,\ C \in \mathbb{R};$

$f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + 2xy + i(3x^2y - y^3 + y^2 - x^2) + iC$

$= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) - (x^2 - y^2 + i\,2xy + C)i$

$= (x+iy)^3 - i(x+iy)^2 + iC \Leftrightarrow \underline{f(z) = z^3 - iz^2 + iC.}$

Anm. $f'(x+iy)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial y}=$

$$=3x^2-3y^2+2y-i(-6xy+2x)=$$

$$=3(x^2-y^2+i2xy)-2i(x+iy)=$$

$$=3(x+iy)^2-2i(x+iy) \overset{!}{\Rightarrow} f'(x)=3x^2-i2x$$

$$\Rightarrow f(x)=x^3-ix^2+C \Rightarrow \underline{f(z)=z^3-iz^2+iA.}$$

Ingen konstant ingår i u så C ingår i v och därför är $C=iA$, $A\in\mathbb{R}$.

Problem 2.8 (Sid. 2)

Lösning

a) $\underline{v=1-x-2xy} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x}=-1-2y \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0 \\ \frac{\partial v}{\partial y}=-2x \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \end{cases} \Rightarrow \Delta v=0.$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=-2x \Leftrightarrow u=-x^2+\phi(y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=1+2y \Leftrightarrow u=y+y^2+\psi(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{u=y+y^2-x^2+C}, \ C \text{ konstant}$$

$$f(x+iy)=y+y^2-x^2+i(1-x-2xy)+C=-i(x+iy)-$$

$$-(x^2-y^2+i2xy)+C+i=-(x+iy)^2-i(x+iy)+i+C.$$

Den komplexa funktionen är $f(z)=\underline{-z^2-iz+i+C}$, där C är en reell konstant.

b) $u=x+y^2 \Rightarrow \Delta u=2\neq 0 \Rightarrow$ <u>någon f finns inte.</u>

c) $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=3y^2-3x^2 \Rightarrow v=3xy^2-x^3+\phi(y)$;

$$\Delta v=\phi''(y)=0 \Leftrightarrow \phi(y)=Ay+B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{v=3xy^2-x^3+Ay+B};$$

$$\Delta u=0 \Rightarrow -6y+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=6xy+$$

$$+\psi(y) \Leftrightarrow u=3x^2y+x\psi(y)+\omega(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 6xy+\psi(y)=6xy+A \Leftrightarrow A=\psi(y)$$

$$\Rightarrow u=3x^2y+Ax+\omega(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2+\omega'(y) \overset{!}{=} 3x^2-3y^2 \Leftrightarrow \omega'(y)=-3y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega(y)=-y^3+D. \Rightarrow \underline{u=3x^2y-y^3+Ax+D}.$$

$$f(x+iy)=u+iv=3x^2y-y^3+Ax+D+i(3xy^2-x^3+$$

$$+Ay+B) \Rightarrow f(x)=Ax-ix^3+\underbrace{D+iB}_{=C} \Rightarrow$$

$$\underline{f(z)=-iz^3+Az+C,\ A\in\mathbb{R},\ C\in\mathbb{C}.}$$

<u>Se f.ö. punkt 2 ovanför problem 2.1.</u>

Problem 2.9 (Sid. 2)

Lösning

$v(x,y) = y^2 + a(x-1)^2 \Rightarrow \Delta v = 2+2a = 0 \Leftrightarrow \underline{a=-1}.$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2y \Rightarrow u = 2xy + \phi(y);$

$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -2x - \phi'(y) \Leftrightarrow v = \underline{-x^2 - \phi'(y)x + \psi(y)} \overset{!}{=}$

$= y^2 - (x-1)^2 = \underline{y^2 - x^2 + 2x - 1} \Leftrightarrow \psi(y) = y^2 - 1 \ \wedge$

$\wedge\ \phi'(y) = -2 \Leftrightarrow \underline{\phi(y) = -2y + C} \wedge \underline{\psi(y) = y^2 - 1};$

$f(x+iy) = u + iv = 2xy - 2y + C + i(y^2 - (x-1)^2);$

$f(0) = -1 - i \Rightarrow C - i = -1 - i \Leftrightarrow \underline{C=-1}.$

Resultat: $a=-1$; $f(x+iy) = 2xy - 2y - 1 + i(y^2 - (x-1)^2)$

Anm. $f(x) = -1 - i(x-1)^2 \Leftrightarrow f(z) = -1 - i(z-1)^2.$

En analytisk funktion $f(x+iy) = u + iv$ går alltid att skriva som $z \mapsto f(z)$ (utan $\bar{z}$).

Problem 2.10 (Sid. 2)

Lösning

$\underline{u(x,y) - 2v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 6xy};$

$\frac{\partial}{\partial x}(u - 2v) = 3x^2 - 3y^2 + 6y \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial v}{\partial x} = 3(x^2 - y^2 + 2y)$

$\Leftrightarrow \Big/ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Big/ \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + 6y \quad (1)$

$\frac{\partial}{\partial y}(u - 2v) = -6xy + 6x \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} - 2\frac{\partial v}{\partial y} = 6x - 6xy \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Big/ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big/ \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} - 2\frac{\partial u}{\partial x} = 6x - 6xy \quad (2)$

$$(1)+(2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial u/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 + 6y \\ 6x - 6xy \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial u/\partial y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 + 6y \\ 6x - 6xy \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{5}(3x^2 - 3y^2 + 12xy + 6y - 12x) & (3) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{5}(6x^2 - 6y^2 - 6xy + 12y + 6x); & (4) \end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial x} \overset{(3)}{=} \frac{1}{5}(3x^2 - 3y^2 + 12xy + 6y - 12x) \Leftrightarrow u = \frac{1}{5}(x^3 -$

$-3xy^2 + 6x^2y + 6xy - 6x^2) + \phi(y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} =$

$= \frac{1}{5}(-6xy + 6x^2 + 6x) + \phi'(y) \overset{(4)}{=} \frac{1}{5}(6x^2 - 6y^2 -$

$-6xy + 12y + 6x) \Leftrightarrow \phi'(y) = \frac{1}{5}(-6y^2 + 12y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \phi(y) = \frac{1}{5}(6y^2 - 2y^3) + C_1$, C_1 konstant.

$$\underline{u(x,y)=\tfrac{1}{5}(x^3-3xy^2+6x^2y+6xy-6x^2+6y^2-2y^3)+C_1};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{5}(3x^2-3y^2+12xy+6y-12x)\Rightarrow v=\frac{1}{5}(-y^3+$$
$$+3x^2y+6xy^2+3y^2-12xy)+\psi(x)\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial x}=$$
$$=\frac{1}{5}(6xy+6y^2-12y)+\psi'(x)\overset{!}{=}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{5}(6y^2-$$
$$-6x^2+6xy-12y-6x)\Leftrightarrow\psi'(x)=\frac{1}{5}(-6x^2-6x)$$
$$\Leftrightarrow\psi(x)=\frac{1}{5}(-2x^3-3x^2)+C_2,\ C_2 \text{ konstant};$$

$$\underline{v(x,y)=\tfrac{1}{5}(-y^3+3x^2y+6xy^2+3y^2-12xy-2x^3-}$$
$$\underline{-3x^2)+C_2.}$$

$$f(x+iy)=u+iv\Leftrightarrow f(x)=u(x,0)+iv(x,0)=$$
$$=\frac{1}{5}(x^3-6x^2+i(-2x^3-3x^2))+C_1+iC_2\ \Leftrightarrow$$
$$f(z)=\frac{1}{5}(z^3-6z^2+i(-2z^3-3z^2)+C_1+iC_2=$$
$$=\frac{1}{5}(1-2i)z^3-\frac{3}{5}(2+i)z^2+C_1+iC_2;$$
$$f(0)=0\ \Rightarrow C_1+iC_2=0\Leftrightarrow C_1=C_2=0.$$

<u>Svar</u>: $f(z)=\dfrac{1-2i}{5}(z^3-3iz^2)$.

<u>Anm.</u> Läs det som står under rubriken "Analytiska funktioner" i problemsamling.

<u>Problem 2.11</u> (Sid. 2)

<u>Lösning</u>

$$f(x+iy)=u(x,y)+iC\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}\Rightarrow du=$$
$$=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=0\Leftrightarrow u(x,y)=A\in\mathbb{R}\Rightarrow$$
$$f(x,y)=A+iC\Leftrightarrow \underline{f(z)=k,\ k\in\mathbb{C}.}$$

<u>Problem 2.12</u> (Sid. 2)

<u>Lösning</u>

a) $$\begin{cases}u(x,y)=C_1\\ v(x,y)=C_2\end{cases}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}\nabla u&=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial x},-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ \nabla v&=\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\nabla u\cdot\nabla v=\left(\frac{\partial u}{\partial x},-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}=$$
$$=0\Leftrightarrow\nabla u\perp\nabla v\Leftrightarrow u=C_1 \text{ och } v=C_2 \text{ skär}$$
varandra under rät vinkel.

b) $$\nabla(uv)=(\nabla u)v+u\nabla v\Rightarrow\Delta(uv)=\nabla\cdot(\nabla(uv))=$$
$$=\nabla\cdot((\nabla u)v+u\nabla v)=\nabla\cdot(\nabla u)v+\nabla\cdot(u\nabla v)=$$
$$=(\nabla\cdot(\nabla u))v+(\nabla u)\cdot\nabla v+(\nabla u)\cdot\nabla v+u(\nabla\cdot(\nabla v))$$

$$=(\Delta u)v+u\Delta v+2\nabla u\cdot\nabla v, \quad \text{V.S.V.}$$

c) $f=u+iv\in\mathcal{A}(\Omega)\Leftrightarrow \Delta u=\Delta v=0 \wedge \nabla u\cdot\nabla v=0.\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \Delta(uv)=0, \text{ dvs } u\in\mathcal{H}(\Omega).$$

d) $f=u+iv\in\mathcal{A}(\Omega)\Rightarrow f^2=u^2-v^2+i2uv\in\mathcal{A}(\Omega)\Rightarrow$

$$\Rightarrow uv=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(f^2)\in\mathcal{H}(\Omega).$$

Problem 2.13 (Sid. 2)

Lösning

$$f(z)=|f(z)|e^{i\operatorname{Arg}f(z)}=\exp(\ln|f(z)|+i\operatorname{Arg}f(z))\in\mathcal{A}(\Omega)$$

$$\Rightarrow \ln|f(z)|+i\operatorname{Arg}f(z)\in\mathcal{A}(\Omega)\Rightarrow \ln|f(z)|\in\mathcal{H}(\Omega).$$

Problem 2.14 (Sid. 2)

Lösning

a) $\left.\begin{array}{l} f=u+iv\in\hat{\mathcal{A}} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \\ \bar{f}=u-iv\in\tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$

$$\wedge \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{u=C_1}} \wedge \underline{\underline{v=C_2}}.$$

b) $|f|=k\Leftrightarrow |f|^2=f\cdot\bar{f}=u^2+v^2=C_1^2+C_2^2=\text{konstant}.$

Problem 2.15 (Sid. 2)

Lösning

$$\tilde{u}(r,\theta)=u(x,y)=u(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$x=r\cos\theta\Rightarrow dx=\frac{\partial x}{\partial r}dr+\frac{\partial x}{\partial\theta}d\theta=\cos\theta\,dr-\sin\theta\, r\,d\theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta \wedge \frac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta$$

$$y=r\sin\theta\Rightarrow dy=\frac{\partial y}{\partial r}dr+\frac{\partial y}{\partial\theta}d\theta=\sin\theta\,dr+\cos\theta\, r\,d\theta\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta \wedge \frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta.$$

a) $\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}(r,\theta)=\frac{\partial}{\partial r}u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=$

$$=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y};$$

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}\tilde{u}(r,\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}=$$

$$=-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\\ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta}\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\\ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta}\end{bmatrix}=$$

(matriskalkylen genomgås i den l. algebran).

$$=\frac{1}{r}\begin{bmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial\tilde u}{\partial r}\\[4pt] \frac{\partial \tilde u}{\partial\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\frac{\partial\tilde u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\tilde u}{\partial\theta} \\[4pt] \sin\theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\tilde u}{\partial\theta}\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial\tilde u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\tilde u}{\partial\theta} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \sin\theta\frac{\partial\tilde u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\tilde u}{\partial\theta}\end{aligned}\right\}$$

b)
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} &\Leftrightarrow \cos\theta\frac{\partial\tilde u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\tilde u}{\partial\theta} = \sin\theta\frac{\partial\tilde v}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\tilde v}{\partial\theta} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} &\Leftrightarrow \sin\theta\frac{\partial\tilde u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\tilde u}{\partial\theta} = -\cos\theta\frac{\partial\tilde v}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\tilde v}{\partial\theta}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial\tilde u}{\partial r}\\[4pt] \frac{\partial\tilde u}{r\partial\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial\tilde v}{\partial r}\\[4pt] \frac{\partial v}{r\partial\theta}\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\frac{\partial\tilde u}{\partial r}\\[4pt] \frac{\partial\tilde u}{r\partial\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial\tilde v}{\partial r}\\[4pt] \frac{\partial\tilde v}{r\partial\theta}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial\tilde v}{\partial r}\\[4pt] \frac{\partial\tilde v}{r\partial\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial v}{r\partial\theta}\\[4pt] -\frac{\partial v}{\partial r}\end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}\frac{\partial\tilde u}{\partial r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde v}{\partial\theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde u}{\partial\theta}\end{aligned}\right.$$

c)
$$f'(x+iy) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x} + i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x};$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y} + i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y};$$

<u>Anm.</u>
$$f'(x+iy) = \operatorname*{limes}_{\Delta x+i\Delta y\to 0}\frac{f(x+\Delta x+i(y+\Delta y))-f(x+iy)}{\Delta x+i\Delta y}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x+iy)-f(x+iy)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x+i(y+\Delta y))-f(x+iy)}{i\Delta y} \text{ osv}$$

I polära koordinater fås

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = \tilde u'_r\cos\theta - \frac{\tilde u'_\theta}{r}\sin\theta + i\left(\tilde v'_r\cos\theta - \frac{\tilde v'_\theta}{r}\sin\theta\right)$$
$$= \tilde u'_r\cos\theta + \tilde v'_r\sin\theta + i(\tilde v'_r\cos\theta - \tilde u'_r\sin\theta) =$$
$$= (\tilde u'_r + i\tilde v'_r)(\cos\theta - i\sin\theta) = (\tilde u'_r + i\tilde v'_r)e^{-i\theta}$$
$$= v'_y - iu'_x = \tilde v_r\sin\theta + \frac{\tilde v'_\theta}{r}\cos\theta - i\left(\tilde u'_r\sin\theta + \frac{u'_\theta}{r}\cos\theta\right)$$
$$= -\frac{u'_\theta}{r}\sin\theta + \frac{v'_\theta}{r}\cos\theta - i\left(\frac{v'_\theta}{r}\sin\theta + \frac{u'_\theta}{r}\cos\theta\right) =$$
$$= \frac{v'_\theta - iu'_\theta}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{v'_\theta - iu'_\theta}{r}e^{-i\theta}.$$

d) <u>$f(z) = \ln|r| + i\theta,\ r>0,\ -\pi<\theta<\pi.$</u>

$$\left.\begin{aligned}\tilde u = \ln r &\Rightarrow \frac{\partial\tilde u}{\partial r} = \frac{1}{r} \wedge \frac{\partial\tilde u}{\partial\theta} = 0 \\ \tilde v = \theta &\Rightarrow \frac{\partial\tilde v}{\partial r} = 0 \wedge \frac{\partial\tilde v}{\partial\theta} = 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}\frac{\partial\tilde u}{\partial r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde v}{\partial\theta} = \frac{1}{r} \\ \frac{\partial\tilde v}{\partial r} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde u}{\partial\theta} = 0\end{aligned}\right.;$$

$$f'(z) = (\tilde u'_r + i\tilde v'_r)e^{-i\theta} = \left(\frac{1}{r} + i0\right)e^{-i\theta} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \underline{\underline{\frac{1}{z}}}.$$

e)
$$f(z) = g(r) = \underbrace{u(r) + iv(r)}_{r=|z|} \Rightarrow f'(z) = (v'_\theta - iu'_\theta)e^{-i\theta}/r = 0 \text{ osv.}$$

Problem 2.16 (Sid. 3)

Lösning

a) $\frac{d(u,v)}{d(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{bmatrix}=$

$=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}-\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=|f'(z)|^2.$

b) $f'(c)\neq 0 \Rightarrow \frac{d(u,v)}{d(x,y)}\Big|_c\neq 0 \Rightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Big|$ inverterbar

i en omgivning till $z=c$.

c) $f'(z)=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0$ i en omgivning till pkn $z=c$

$\Rightarrow g'(f(z))=\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{f'(z)}.$

d) $w=e^z \Rightarrow /-\pi<\operatorname{Im} z<\pi/ \Rightarrow z=f(w)=\operatorname{Log} w=$

$=\ln|w|+i\operatorname{Arg} w$ analytisk, ty invers till

analytisk $\Rightarrow 1=\frac{d}{dw}e^z=e^z\frac{dz}{dw}=w\cdot f'(w)\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(w)=\frac{1}{w}=e^{-z}\Rightarrow f\in\mathscr{C}^1.$

Anm. Funktionalmatrisen betecknas $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ medan dess determinant skrivs $\frac{d(u,v)}{d(x,y)}$ (se för övrigt Persson & Böiers gröna paket).

3. Elementära funktioner

Problem 3.1 (Sid. 3)

Lösning

$w=z^2 \Rightarrow u+iv=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy \Leftrightarrow \begin{cases}u=x^2-y^2\\ v=2xy\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}u=x^2-b^2\\ v=2xb\end{cases} \Rightarrow \underline{u=\frac{v^2}{4b^2}-b^2}$ (parabel).

Anm. $b=0 \Rightarrow u\geq 0 \wedge v=0$

Exponential- och logaritmfunktionerna

Problem 3.2 (Sid. 3)

Lösning

a) $\underline{z=-1} \Rightarrow \log z=\ln|-1|+i(\operatorname{Arg}(-1)+2k\pi)=\underline{(2k+1)\pi i}.$

b) $\underline{z=2i} \Rightarrow \log z=\ln|2i|+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\underline{\ln 2+i\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}.$

c) $\underline{z=-1+i} \Rightarrow \log z=\ln|-1+i|+i\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)=\underline{\frac{1}{2}\ln 2+i\left(2k+\frac{3}{4}\right)\pi}.$

d) $\underline{z=-\sqrt{3}-i} \Rightarrow \log z=\ln|-\sqrt{3}-i|+i\left(2k-\frac{5}{6}\right)\pi=\underline{\ln 2+i\left(2k-\frac{5}{6}\right)\pi}.$

Problem 3.3 (Sid. 3)

Lösning

a) $\log i + \log i = \ln|i| + i\left(\frac{\pi}{2} + m2\pi\right) + \ln|i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) =$

$$= 0 + i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 2(m+n)\right)\pi = \underline{(2k+1)\pi i, \ k \in \mathbb{Z}}.$$

b) $\log(i^2) = \log(-1) = \underline{(2k+1)\pi i, \ k \in \mathbb{Z}}.$

c) $2\log i = 2 \cdot i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \underline{(4k+1)\pi i, \ k \in \mathbb{Z}}.$

d) $\exp(\log(1+4i)) = \underline{1+4i}.$

e) $\log(\exp(1+4i)) = 1 + 4i + 2k\pi i = \underline{1 + 2(k+2)\pi i}, \ k \in \mathbb{Z}.$

f) $\exp(\mathrm{Log}(1+4i)) = \underline{1+4i}$ (för $k=0$).

g) $\mathrm{Log}(\exp(1+4i)) = \mathrm{Log}(\exp(1 + i(4-2\pi))) = \underline{1 + i(4-2\pi)}.$

Problem 3.4 (Sid. 3)

Lösning

$$\underline{a = i}, \quad \underline{b = -1-i}, \quad \underline{c = -1+i}, \quad |\mathrm{Arg}\, z| < \pi.$$

a) $\mathrm{Log}\, a + \mathrm{Log}\, b = i\frac{\pi}{2} + i\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4}.$

$\mathrm{Log}(ab) = \mathrm{Log}(1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4} = \mathrm{Log}\, a + \mathrm{Log}\, b.$

b) $$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Log}\, a + \mathrm{Log}\, c = i\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{5\pi}{4} \\ &\mathrm{Log}(ac) = \mathrm{Log}(-1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{3\pi}{4} \neq \mathrm{Log}\, a + \mathrm{Log}\, c \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\mathrm{HL} - \mathrm{VL} = -2\pi i}.$$

c) $\mathrm{Log}\, a - \mathrm{Log}\, b = i\frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{5\pi}{4}$

$\mathrm{Log}\frac{a}{b} = \mathrm{Log}\frac{i}{-1-i} = \mathrm{Log}\frac{i(-1+i)}{2} = \mathrm{Log}\frac{-1-i}{2} = \ln\left|\frac{-1-i}{2}\right| +$

$+ i\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{3\pi}{4} \neq \mathrm{Log}\, a - \mathrm{Log}\, b;$

$$\underline{\mathrm{HL} - \mathrm{VL} = -i2\pi}.$$

d) $$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Log}(i^8) = \mathrm{Log}\, 1 = 0 \\ &8\,\mathrm{Log}\, i = 8 \cdot i\frac{\pi}{2} = 4\pi i \neq \mathrm{Log}\, i^8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{HL} - \mathrm{VL} = \underline{4\pi i}.$$

Problem 3.5 (Sid. 3)

Lösning

$$\underline{f(z) = \mathrm{Log}_{\pi/4}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z, \quad \frac{\pi}{4} < \mathrm{Arg}\, z < \frac{9\pi}{4}}$$

Låt oss gå mot $z_0 = 1+i$ längs kurvan $|z| = \sqrt{2}$.

$\lim_{z \to z_0^-} f(z) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$ och $\lim_{z \to z_0^+} f(z) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{9\pi}{4}.$

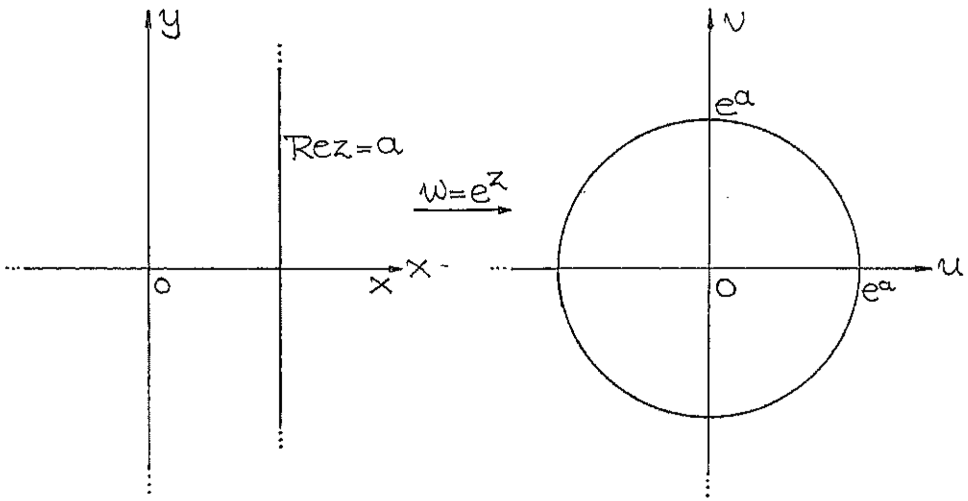
Anm. $\mathrm{Log}_{\pi/4}(z) = \mathcal{L}_{\pi/4}(z)$ är en specialgren.

Problem 3.6 (Sid. 4)

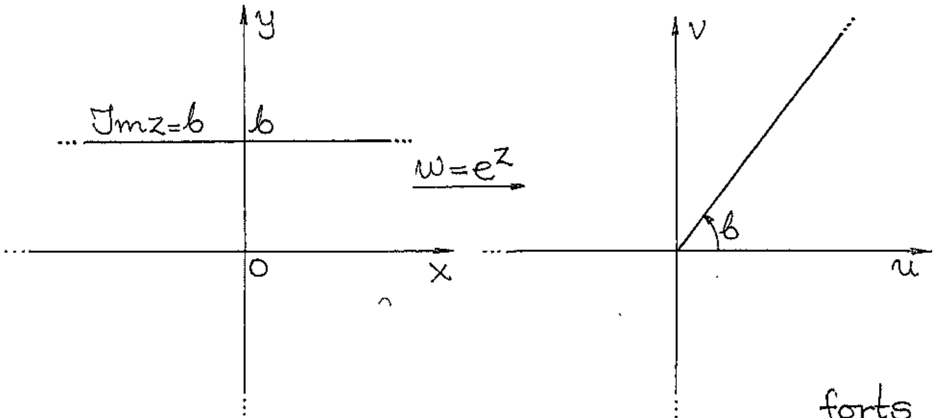
Lösning

$$z = x+iy, \quad w = u+iv$$

a) $w = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \Rightarrow /x=a/ \Rightarrow |w| = e^a$ (cirkel)

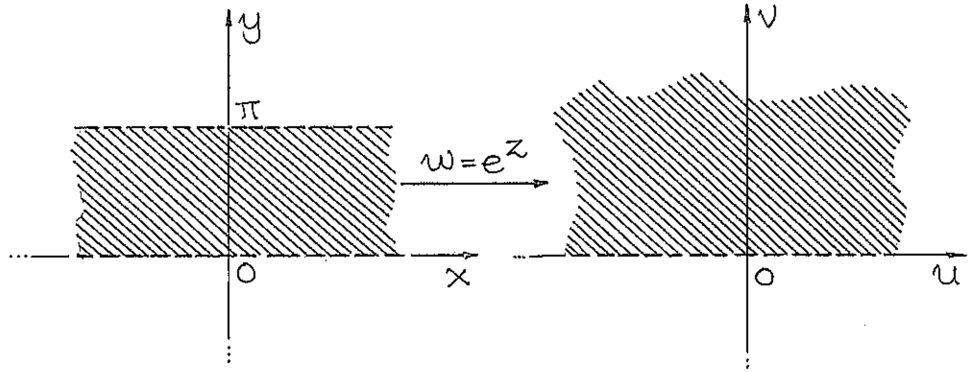


b) $w = e^x \cdot e^{iy} \Rightarrow /y=b/ \Rightarrow \arg w = b$ (strålen nedan).

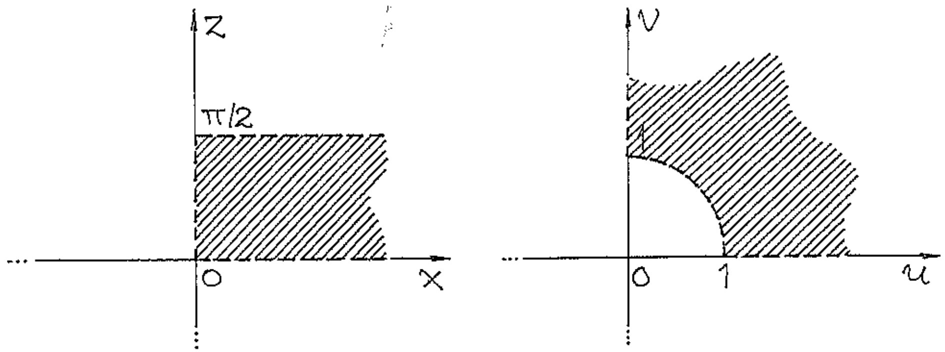


forts

c) $w = e^x \cdot e^{iy} \Rightarrow /0<y<\pi/ \Rightarrow 0<\operatorname{Arg} w<\pi \Leftrightarrow \operatorname{Im} w>0.$



d) $w = e^x \cdot e^{iy} \Rightarrow /x>0, \ 0<y<\frac{\pi}{2}/ \Rightarrow |w|>1 \wedge 0<\operatorname{Arg} w<\frac{\pi}{2}.$



Problem 3.7 (Sid. 4)

Lösning

a) $f(z) = \ln(z^2+1) = \ln(z-i)(z+i) = /z-i = r_1 e^{i\theta_1}, \ z+i = r_2 e^{i\theta_2}/ =$

$$= \ln r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2+2n\pi)} =$$

$$= \underline{\ln(r_1 r_2) + i(\theta_1+\theta_2+2n\pi), \quad n = ?}$$

Problem 3.11 (Sid. 4)

Lösning

a) $f(z)=1^z \Rightarrow f(x+iy)=e^{(x+iy)\log 1}=e^{(x+iy)\cdot 2k\pi i}=$

$$=\underline{e^{-2k\pi y+i2k\pi x}},\ \underline{k=0,\pm 1,\pm 2,\dots;}$$

PV $=1$ (fås för $k=0$).

b) $|f(x+iy)|=e^{-2\pi ky}=1 \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow \underline{z=x\in\mathbb{R}}.$

$$e^{i2k\pi x}=1=\text{PV} \Leftrightarrow x=a\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \underline{z\in\mathbb{Z}}.$$

Problem 3.12 (Sid. 4)

Lösning

$f(z)=z^{2/3} \Rightarrow f'(z)=\frac{2}{3}z^{-1/3} \Rightarrow f(-8i)=\frac{2}{3}\cdot(8e^{-i\pi/2})^{-1/3}$

$$=\frac{2}{3}\cdot 8^{-1/3}e^{i\pi/6}=\frac{1}{3}e^{i\pi/6}=\underline{\frac{\sqrt{3}+i}{6}}.$$

Anm. PG $(z^{2/3})=\exp(\frac{2}{3}\text{Log}z) \Rightarrow f'(z)=\frac{2}{3}z^{-1/3}$;

$$p\in\mathbb{R} \Rightarrow \frac{d}{dz}z^p=pz^{p-1} \quad \text{(principalt).}$$

Problem 3.13 (Sid. 4)

Lösning:

Se nästföljande sida.

$\mathcal{L}_{-\pi/2}(z)=\log z=\ln|z|+i\mathcal{A}rg z,\ -\frac{\pi}{2}<z<\frac{3\pi}{2}$;

$$\mathcal{L}_{-\pi/2}(1)=0 \text{ och } \mathcal{L}_{-\pi/2}(-1)=i\pi.$$

$f(z)=z^{1/3}+z^{1/4}=\exp(\frac{1}{3}\log z)+\exp(\frac{1}{4}\log z)$

$$=\exp(\tfrac{1}{3}\ln|z|+i\tfrac{1}{3}(\mathcal{A}rg z+2k\pi))+$$

$$+\exp(\tfrac{1}{4}\ln|z|+i\tfrac{1}{4}(\mathcal{A}rg z+2k\pi))$$

$f(1)=0 \Rightarrow e^{i2k\pi/3}+e^{ik\pi/2}=0 \Rightarrow k=6$ (t.ex) $\Rightarrow$

$f(z)=\exp(\frac{\ln|z|+i(\mathcal{A}rg z+12\pi)}{3})+$

$$+\exp(\frac{\ln|z|+i(\mathcal{A}rg z+12\pi)}{4}) \Rightarrow$$

$f(-1)=e^{i13\pi/3}+e^{i13\pi/4}=e^{i\pi/3}+e^{-i3\pi/4}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}+$

$$+\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}=\frac{1-\sqrt{2}+i(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2}.$$

Problem 3.14 (Sid. 4)

Lösning

a) $f(z)=(\frac{z-1}{z+1})^{1/2}=/z-1=r_1e^{i\theta_1},\ z+1=r_2e^{i\theta_2}/=$

$$=(\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}})^{1/2}=(\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)})^{1/2}=\underline{\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}};$$

Betrakta figuren på nästföljande sida.

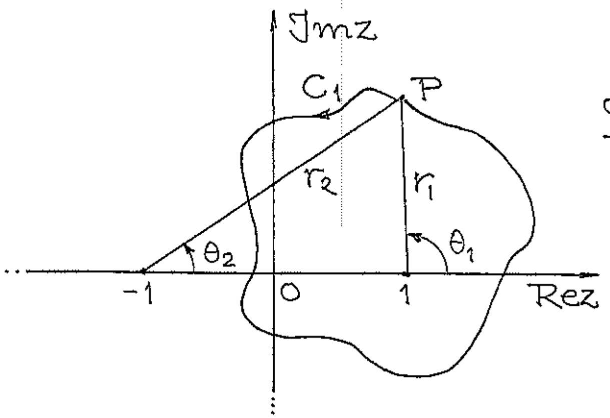


Fig 1.

När punkter P (eg. talet z) genomlöper C_1 ett varv ökar $\theta_1 = \arg(z-1)$ med 2π och då får vi $f(z) = \sqrt{r_1/r_2}\exp\left(\frac{\theta_1-\theta_2-2\pi}{2}i\right) =$

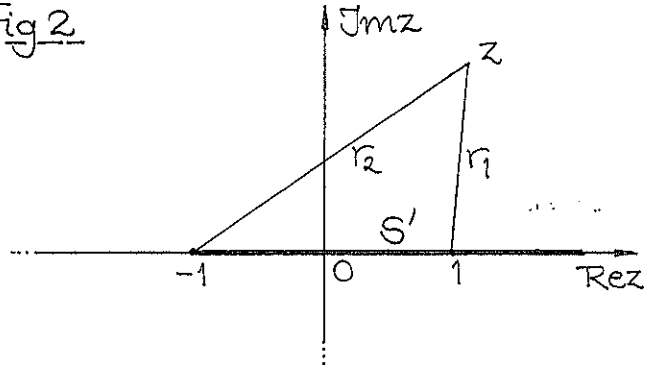
$$= -\sqrt{r_1/r_2}\cdot\exp\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}i\right),$$

dvs ett annat värde; gör vi grensnittet $S: x \geq 1, y=0$, så kan P inte korsa det; vi får entydighet.

Antag nu att P genomlöper en kurva C_2 som omsluter $z=-1$ men inte $z=1$; vi får ett tillskott 2π på θ_1 och samma situation som ovan; vi åstadkommer entydighet om vi förbjuder P att korsa sträckan $[-1,1]$. Detta leder till det "totala" grensnittet

$$S': x \geq -1, y=0$$

Fig 2



Samma figurer gäller även för $g(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/3}$. När P beskriver C_1 ökar θ_1 med 2π medan θ_2 återfår sitt ursprungliga värde, vilket leder till $g(z) = \sqrt{r_1/r_2}\exp\left(i\frac{\theta_1-\theta_2}{3}\right)\cdot\exp\left(-\frac{2\pi}{3}i\right)$, dvs till ett annat värde; vi åstadkommer entydighet genom att "förbjuda" P att korsa S. Ett liknande resonemang med C_2 omslutande -1 men inte 1 leder till en förlängning av grensnittet till att omfatta även intervallet $[-1,1]$; g blir alltså entydig för $z \in \mathbb{C} \setminus S'$.

<u>Anm.</u> De övriga två funktionerna studeras analogt.

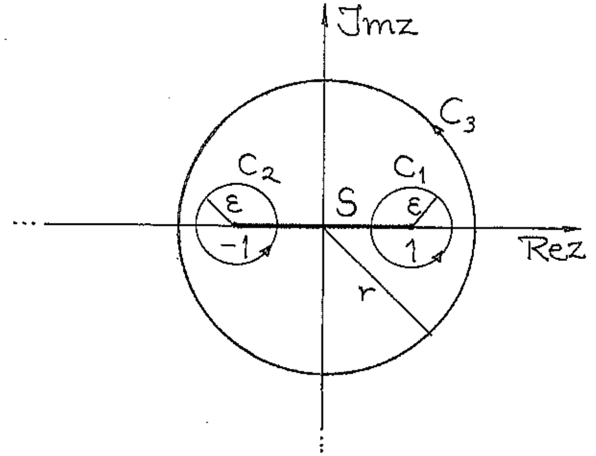
b) $f(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2} = \left|\frac{z-1}{z+1}\right|^{1/2} \exp\left(\frac{\arg(z-1) - \arg(z+1)}{2}\right)$

När z genomlöper en cirkel $C_1: |z-1| = \varepsilon$, $\varepsilon < 1$, ökar $\arg(z-1)$ med 2π och vi får ett annat värde $(-f(z))$; om z genomlöper cirkeln $C_2: |z+1| = \varepsilon$, händer samma sak; vi kan förhindra flertydighet genom att "snitta" det komplexa planet längs intervallet $[-1,1]$; även andra snitt kan tänkas...

Lägg märke till att om z genomlöper cirkeln $C_3: |z| = r$, $r > 1$, ökar såväl $\arg(z-1)$ som $\arg(z+1)$ med 2π och då är

$$\arg f(z) = \arg(z-1) + 2\pi - (\arg(z+1) + 2\pi) =$$

$= \arg(z-1) - \arg(z+1)$, dvs ingen ändring, vilket leder till samma värde.



$g(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/3} = \left|\frac{z-1}{z+1}\right|^{1/3} \cdot \exp\left(\frac{\arg(z-1) - \arg(z+1)}{3}\right)$;

Samma resonemang kan föras även här:

$\underline{h(z) = (z^2-1)^{1/2}} = |z^2-1|^{1/2} \cdot \exp\left(\frac{\arg(z-1) + \arg(z+1)}{2}\right)$.

När z genomlöper C_3 får vi situationen

$$\arg h(z) = \frac{\arg(z-1) + 2\pi + \arg(z+1) + 2\pi}{2} =$$

$$= \frac{\arg(z-1) + \arg(z+1)}{2} + 2\pi$$

vilket inte leder till ett nytt värde.

$\underline{k(z) = (z^2-1)^{1/3}} = |z^2-1|^{1/3} \cdot \exp\left(\frac{\arg(z-1) + \arg(z+1)}{3}\right)$.

När z genomlöper C_3 får vi argumentökningen $\Delta \arg k(z) = \frac{4\pi}{3}$, vilket leder till ett annat värde.

Problem 3.15 (Sid. 4)

Lösning

(1) $z^{\alpha} \cdot z^{\beta} = e^{\alpha \log z} \cdot e^{\beta \log z} = e^{\alpha \log z + \beta \log z} = e^{(\alpha+\beta)\log z}$

$= z^{\alpha+\beta}$.

(2) $z^{\alpha} w^{\alpha} = e^{\alpha \log z} \cdot e^{\alpha \log w} = e^{\alpha \log z + \alpha \log w} = e^{\alpha \log zw}$

$= (zw)^{\alpha}$.

(3) $(z^{\alpha})^n = (e^{\alpha \log z})^n = e^{\alpha n \log z} = z^{\alpha n}$.

(4) $|z^{\alpha}| = e^{\mathrm{Re}(\alpha \log z)} = e^{\alpha \mathrm{Re}(\log z)} = e^{\alpha \ln|z|} = |z|^{\alpha}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$

Anm $(i^3)^{1/3} = (-i)^{1/3} = (e^{i(2k-1/2)\pi})^{1/3} = e^{i(4k-1)\pi/3} =$

$= e^{-i\pi/3}, e^{i\pi}, e^{i7\pi/3} \neq i^{3\cdot(1/3)} = i$.

Problem 3.17 (Sid. 4)

Lösning: $(e^{i\theta})^{2\pi/2\pi} = (e^{i2\pi\theta})^{1/2\pi} \neq (e^{i2\pi})^{\theta/2\pi} =$

$= 1^{\theta/2\pi} = (e^{i(2k\pi)})^{\theta/2\pi} = e^{ik\theta} = (-1)^k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

Trigonometriska och hyperboliska funktioner

Problem 3.17 (Sid. 4)

Lösning

(1) $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \Rightarrow \cos(iz) = \frac{e^{i(iz)}+e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z}+e^{z}}{2} =$

$= \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \cosh z$.

(2) $\cosh(iz) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z$.

(3) $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \Rightarrow \sin(iz) = \frac{e^{i(iz)}-e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z}-e^{z}}{2i} =$

$= -i\frac{e^{-z}-e^{z}}{2} = -i\left(-\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\right) = i\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = i\sinh z$.

(4) $\sinh(iz) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = i\sin z$.

Anm. Komplexa trigonometriska och hyperboliska funktioner bör inte utläsas som motsvarande reellvärda, de ska utläsas bokstavligt så att säga; de har inget med geometriska kurvor att skaffa.

Problem 3.18 (Sid. 4)

Lösning

a) $\cosh(z+w) \overset{(1)}{=} \cos(i(z+w)) = \cos(iz+iw) =$

$= \cos(iz)\cos(iw) - \sin(iz)\sin(iw) = (1) =$

$= \cosh z \cosh w - \sin(iz)\sin(iw) = (3) =$

$= \cosh z \cosh w - i\sinh z \cdot i\sinh w =$

$= \cosh z \cosh w - i^2 \sinh z \sinh w =$

$= \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w.$

b) $\sinh(z+w) = -i\sin(i(z+w)) = -i\sin(iz+iw) =$

$= -i(\sin(iz)\cos(iw) + \cos(iz)\sin(iw)) =$

$= -i(i\sinh z \cosh w + \cosh z \cdot i\sinh w) =$

$= -i^2(\sinh z \cosh w + \cosh z \sinh z) =$

$= \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w.$

c) $\tan(iz) = \frac{\sin(iz)}{\cos(iz)} = \frac{i \cdot \sinh z}{\cosh z} = i\tanh z$; (*)

$\tanh(z+w) = -i\tan(i(z+w)) = -i\tan(iz+iw) =$

$= \frac{1}{i}\,\frac{\tan iz + \tan iw}{1 - \tan iz \cdot \tan iw} = \frac{1}{i}\,\frac{i\tanh z + i\tanh w}{1 - i\tanh z \cdot i\tanh w} =$

$= \frac{1}{i}\,\frac{i(\tanh z + \tanh w)}{1 - i^2\tanh z \tanh w} = \frac{\tanh z + \tanh w}{1 + \tanh z \tanh w}.$

d) $\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2iz}+e^{-2iz}+2}{4} +$

$+ \frac{e^{2iz}+e^{-2iz}-2}{-4} = \frac{e^{2iz}+e^{-2iz}+2-(e^{2iz}+e^{-2iz}-2)}{4} = 1.$

Problem 3.19 (Sid. 4)

Lösning

(1) $\cos z = \cos(x+iy) = /3.18/ = \cos x \cosh y + \sin x \sinh y \, i$

$\Rightarrow \underline{|\cos z|^2} = (\cos x \cosh y)^2 + (\sin x \sinh y)^2 =$

$= \cos^2 x \cdot \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y = $ /d ovan/ $=$

$= \cos^2 x\,(1 + \sinh^2 y) + \sin^2 x \sinh^2 y =$

$= \cos^2 x + (\cos^2 x + \sin^2 x)\sinh^2 y =$

$= \underline{\cos^2 x + \sinh^2 y}$;

(2) $\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{|\sin z|^2} = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y =$

$= \sin^2 x(1 + \sinh^2 y) + \cos^2 x \sinh^2 y =$

$= \sin^2 x + \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1}\sinh^2 y = \underline{\sin^2 x + \sinh^2 y}$;

(3) $|\cos z|^2+|\sin z|^2=\cos^2 x+\sin^2 x+2\sinh^2 y=1+2\sinh^2 y$

$$|\cos z|^2+|\sin z|^2=1 \Leftrightarrow \sinh^2 y=0 \Leftrightarrow \sinh y=0$$

$$\Leftrightarrow y=\mathrm{Im}\,z=0 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}.$$

Problem 3.20 (Sid. 4)

Lösning

$w=\cos z \Leftrightarrow u+iv=\cos(x+iy)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$

$$\Leftrightarrow \underline{u=\cos x\cosh y} \wedge \underline{v=-\sin x\sinh y}$$

a) $\begin{cases}\mathrm{Im}\,z=y=b\\ 0<|b|<\infty\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{u}{\cosh b}=\cos x\\ \dfrac{v}{\sinh b}=-\sin x\end{cases} \Rightarrow \dfrac{u^2}{\cosh^2 b}+\dfrac{v^2}{\sinh^2 b}=1.$

Bildkurvan är en ellips med halva storaxeln $\cosh b$ och halva lillaxeln $\sinh b$.

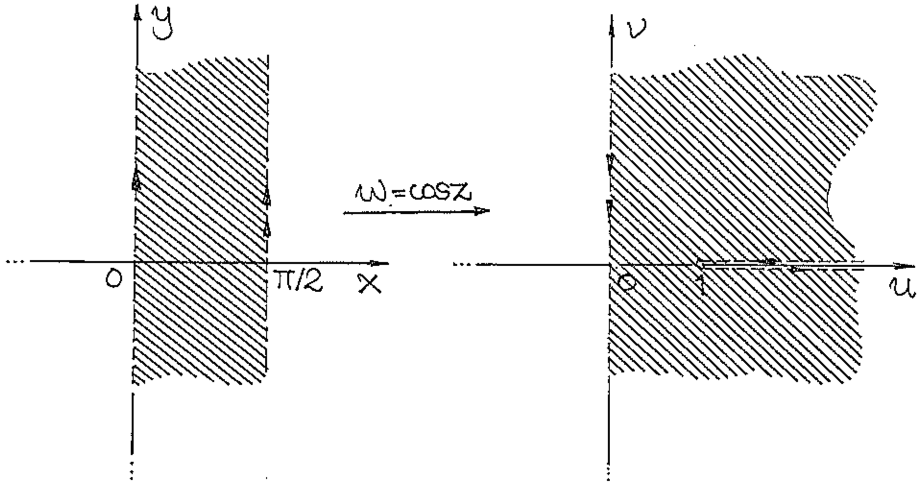
b) $\begin{cases}\mathrm{Re}\,z=x=a\\ 0<a<\frac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{u}{\cos a}=\cosh y\\ \dfrac{v}{\sin a}=-\sinh y\end{cases} \Rightarrow \dfrac{u^2}{\cos^2 a}-\dfrac{v^2}{\sin^2 a}=1;$

Bildkurvan är den högra grenen av hyperbeln $\dfrac{u^2}{\cos^2 a}-\dfrac{v^2}{\sin^2 a}=1$, dvs $u>0$.

c) $\begin{cases}\mathrm{Re}\,z=0\\ \mathrm{Im}\,z\in\mathbb{R}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u=\cosh y\\ v=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|u|\geq 1\\ v=0\end{cases}$ (2 strålar)

$\begin{cases}\mathrm{Re}\,z=\frac{\pi}{2}\\ \mathrm{Im}\,z\in\mathbb{R}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u=0\\ v=-\sinh y\end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,w=0$ (v-axeln)

$0<\mathrm{Re}\,z<\frac{\pi}{2}$ avbildas på det högra halvplanet utanför strålen $z=x$, $x\geq 1$ (se fig.)



Avbildningen är 1-1

Problem 3.21 (Sid. 5)

Lösning

a) $\sin i+i\cos i=i\sinh 1+i\cosh 1=i(\sinh 1+\cosh 1)=\underline{ie}.$

b) $\cos(\frac{\pi}{4}-i)=\cos\frac{\pi}{4}\cosh 1+i\sin\frac{\pi}{4}\sinh 1=\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\cosh 1+}$
$\underline{+i\frac{\sqrt{2}}{2}\sinh 1}.$

Problem 3.22 (Sid. 5)

Lösning

a) $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=2\Leftrightarrow e^{iz}+e^{-iz}=4\Leftrightarrow e^{2iz}+1=4e^{iz}$

$\Leftrightarrow e^{2iz}-4e^{iz}+1=0\Leftrightarrow e^{iz}=2\pm\sqrt{3}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow iz=\ln(2+\sqrt{3})+i2m\pi \vee iz=\ln(2-\sqrt{3})+i2n\pi$

$\Leftrightarrow \underline{z=2m\pi-i\ln(2+\sqrt{3})}\vee \underline{z=2n\pi-i\ln(2-\sqrt{3})}.$

$m,n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ (heltal).

b) $\tan z=\frac{4-3i}{5}\Leftrightarrow \frac{\sin z}{\cos z}=\frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}=\frac{1}{i}\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}=\frac{4-3i}{5}$

$\Leftrightarrow 5(e^{2iz}-1)=i(4-3i)(e^{2iz}+1)=(3+4i)(e^{2iz}+1)$

$\Leftrightarrow 5e^{2iz}-5=(3+4i)e^{2iz}+3+4i\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2-4i)e^{2iz}=8+4i\Leftrightarrow(1-2i)e^{2iz}=4+2i$

$\Leftrightarrow(1-2i)e^{2iz}=2i(1-2i)\Leftrightarrow e^{2iz}=2i=(1+i)^2$

$\Leftrightarrow e^{iz}=\pm(1+i)\Leftrightarrow \underline{e^{iz}=1+i}\vee \underline{e^{iz}=-1-i}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow iz=\ln|1+i|+i(2m+\frac{1}{4})\pi \vee iz=\ln|1+i|+i(2n-\frac{3}{4})\pi$

$\Leftrightarrow iz=\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{8m+1}{4}\pi \vee iz=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{8n-3}{4}\pi$

$\Leftrightarrow \underline{z=\frac{8m+1}{4}\pi-\frac{i}{2}\ln 2}\vee \underline{z=\frac{8n-3}{4}\pi-\frac{i}{2}\ln 2}.$

Anm. $e^{2iz}=2i\Leftrightarrow 2iz=\ln 2+i(2n+\frac{1}{2})\pi,\ n\in\mathbb{Z},$

$\Leftrightarrow z=(2n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}-i\frac{1}{2}\ln 2=\underline{\frac{4n+1}{4}\pi-\frac{i}{2}\ln 2}.$

Problem 3.23 (Sid. 5)

Lösning

a) $\forall w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}:\ e^z=w\Leftrightarrow z=\underline{\log w}.$

b) $\cos z=w\Leftrightarrow\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=w\Leftrightarrow e^{iz}+e^{-iz}=2w\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{2iz}+1=2we^{iz}\Leftrightarrow e^{2iz}-2we^{iz}+1=0$

$\Leftrightarrow e^{iz}=w+(w^2-1)^{1/2}\Leftrightarrow iz=\log(w+(w^2-1)^{1/2})$

$\Leftrightarrow z=\cos^{-1}w=\underline{-i\cdot\log(w+(w^2-1)^{1/2})},\ w\in\mathbb{C}.$

c) $\tan z=w\Leftrightarrow\frac{\sin z}{\cos z}=w\Leftrightarrow\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}=w\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}=iw\Leftrightarrow e^{2iz}-1=iw(e^{2iz}+1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(1-iw)e^{2iz}=1+iw\Leftrightarrow e^{2iz}=\frac{1+iw}{1-iw}\Leftrightarrow$

$$2iz=\log\frac{1+iw}{1-iw}=-\log\frac{1-iw}{1+iw}\Leftrightarrow \underline{z=\frac{i}{2}\log\frac{1-iw}{1+iw}},\ w\neq\pm i.$$

Problem 3.24 (Sid. 5)

Lösning

a) $e^z>0\Leftrightarrow e^z=w>0\Leftrightarrow z=\log w=\ln|w|+i2k\pi$

$$D_{\ln}=\mathbb{R}\Rightarrow z=x+i2k\pi,\ x\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}.$$

b) $\cos z=\cos x\cosh y+i\sin x\sinh y\in[-1,1]\Rightarrow y=0$

$$\Leftrightarrow \cos z=\cos x\Leftrightarrow z=\pm x+2k\pi\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}.$$

c) $\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y\in[-1,1]\Leftrightarrow y=0$

$$\Leftrightarrow \sin z=\sin x\Leftrightarrow z=x+2m\pi\ \vee\ z=$$

$$=-x+(2n+1)\pi\Leftrightarrow \underline{z\in\mathbb{R}}.$$

d) $D_{\tan}=\mathbb{C}\setminus\{\frac{\pi}{2}+n\pi: n\in\mathbb{Z}\}$, nollställena till cos.

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}\setminus\{\tfrac{\pi}{2}+n\pi;\ n\in\mathbb{Z}\}.$$

Problem 3.25 (Sid. 5)

Lösning

$$\sin z+\sin 3z+i\sin 2z=\sin(2z-z)+\sin(2z+z)+$$

$$+i\sin 2z=2\sin 2z\cos z+i\sin 2z=\sin 2z(2\cos z+i)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2z=0\ \vee\ \cos z=-\frac{i}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2z=m\pi\ \vee\ z=\cos^{-1}(\tfrac{i}{2})\Leftrightarrow /m\in\mathbb{Z}/\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{m\pi}{2}\ \vee\ z=\pm i\log\left(-\frac{i}{2}+\frac{i\sqrt5}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{m\pi}{2}\ \vee\ z=\pm i\log\left(i\frac{\sqrt5-1}{2}\right)\Leftrightarrow /n\in\mathbb{Z}/\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=m\frac{\pi}{2}\ \vee\ z=\pm i\left(\ln\frac{\sqrt5-1}{2}+i\frac{4n+1}{2}\pi\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{z=m\frac{\pi}{2}}\ \vee\ \underline{z=\pm\left(-\frac{4n+1}{2}\pi+i\ln\frac{\sqrt5-1}{2}\right)}.$$

Övning 3.26 (Sid. 5)

Lösning

$$\underline{f(z_1)=f(z_2)}\Leftrightarrow \cos z_1^{1/2}=\cos z_2^{1/2}\Leftrightarrow \cos z_1^{1/2}-\cos z_2^{1/2}=0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin\frac{z_1^{1/2}-z_2^{1/2}}{2}\cdot\sin\frac{z_1^{1/2}+z_2^{1/2}}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1^{1/2}-z_2^{1/2}=0\ \vee\ z_1^{1/2}+z_2^{1/2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1^{1/2}-z_2^{1/2})(z_1^{1/2}+z_2^{1/2})=z_1-z_2=0\Leftrightarrow \underline{z_1=z_2}.$$

$$z=re^{i\theta}\Rightarrow \lim_{z\to0}f(z)=\lim_{r\to0}\cos(\sqrt r e^{i\theta/2})=\cos 0=1=f(0)$$

$$\Rightarrow \underline{f \text{ är en kontinuerlig funktion}}.$$

$$f(z)=\cos\left(\sqrt{|z|}\exp\left(i\frac{\operatorname{Arg} z}{2}\right)\right) \text{ är helanalytisk } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(z)=\frac{d}{dz}\cos z^{1/2}=-\sin z^{1/2}\cdot\frac{1}{2z^{1/2}}.$$

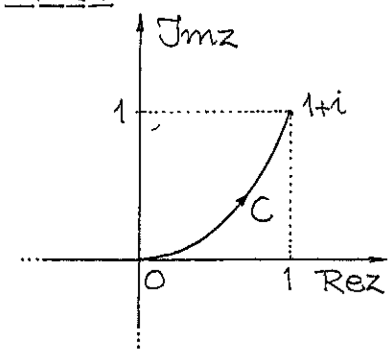
4. Komplex integration

Parametrisering och primitiv funktion. Cauchys integralsats

Problem 4.1 (Sid. 5)

Lösning

$C:\ z=t+it^2,\ 0\le t\le 1$



$$f(z)=3\bar z+iz=3(t-it^2)+i(t+it^2)=3t-t^2+i(t-3t^2)$$

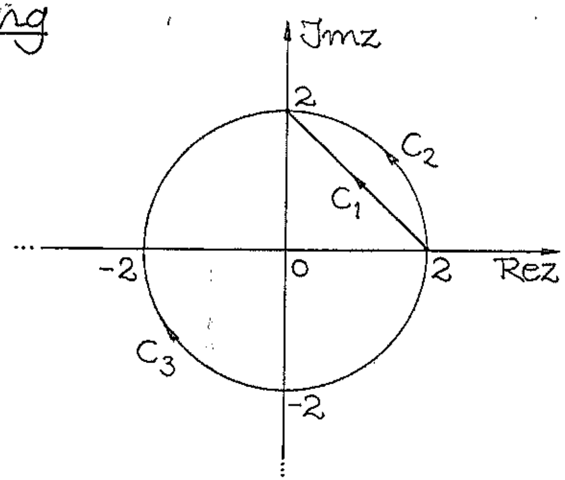
$$\int_C f(z)\,dz=\int_0^1(3t-t^2+i(t-3t^2))\cdot(1+2it)\,dt=$$

$$=\int_0^1(3t-3t^2+6t^3)\,dt+i\int_0^1(t+3t^2-2t^3)\,dt=$$

$$=\left[\frac{3t^2}{2}-t^3+\frac{3t^4}{2}\right]_0^1+i\left[\frac{t^2}{2}+t^3-\frac{t^4}{2}\right]_0^1=\underline{\underline{2+i}}.$$

Problem 4.2 (Sid. 5)

Lösning



$$\underline{J=\int_C z\,dz,\quad \mathcal{J}=\int_C \bar z\,dz.}$$

a) $J_1=\int_{C_1}z\,dz=\left[\frac{z^2}{2}\right]_2^{2i}=-2-2=\underline{\underline{-4}}.$

$\mathcal{J}_1=\int_{C_1}\bar z\,dz=/C_1:\ z=2-(2-2i)t,\ 0\le t\le 1/=$

$=(-2+2i)\int_0^1(2-2(1+i)t)\,dt=$

$=(-2+2i)\left[2t-(1+i)t^2\right]_0^1=(-2+2i)(1-i)=\underline{\underline{4i}}.$

b) $J_2=\int_{C_2}z\,dz=\left[\frac{z^2}{2}\right]_2^{2i}=\underline{\underline{-4}}=\int_{C_1}z\,dz$ (z hel).

$\mathcal{J}_2=\int_{C_2}\bar z\,dz=\int_{C_2}\frac{4}{z}\,dz=4\left[\operatorname{Log} z\right]_2^{2i}=4\cdot i\frac{\pi}{2}=\underline{\underline{2\pi i}}.$

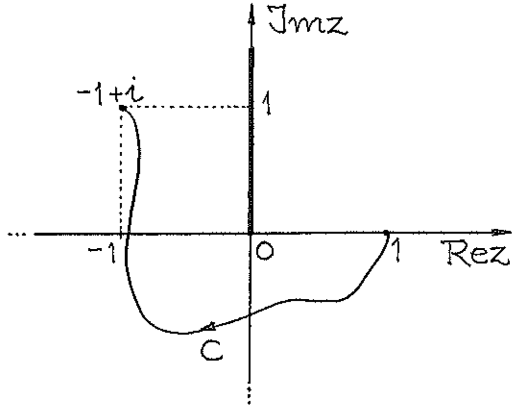
c) $\mathcal{I}_3 = \int_{C_3} z\,dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_2^{2i} = \underline{-4} = \int_{C_1} z\,dz = \int_{C_2} z\,dz.$

$$\mathcal{J}_3 = \int_{C_3} \bar{z}\,dz = 4\int_{C_3} \frac{dz}{z} = /\,C_3:\ z = 2e^{-t},\ 0 \le t \le \frac{3\pi}{2}\,/ =$$

$$= 4\int_0^{3\pi/2} \frac{1}{2e^{-it}} \cdot 2(-i)e^{-it}\,dt = -4i\int_0^{3\pi/2} dt = \underline{-6\pi i}.$$

Problem 4.3 (Sid. 5)

Lösning



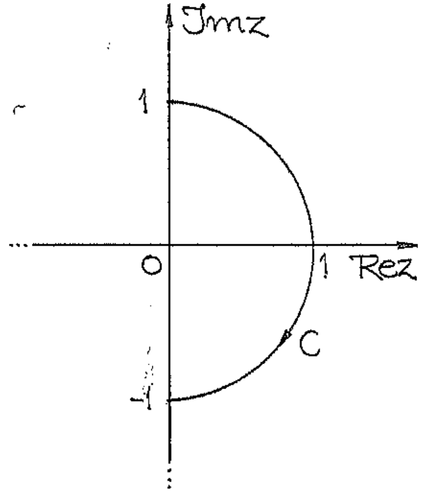
$$\int_C \frac{dz}{z} = \left[\mathcal{L}_{\pi/2}(z)\right]_1^{-1+i} = \mathcal{L}_{\pi/2}(-1+i) - \mathcal{L}_{\pi/2}(1) = \ln|-1+i| - i\frac{5\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{5\pi}{4}.$$

Anm. $\mathcal{L}_{\pi/2}(z) = \ln|z| + i\arg z,\ -\frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}.$

Integrationsvägen C ovan är en godtycklig, styckvis glatt kurva, $1 \to -1+i$.

Problem 4.5 (Sid. 6)

Lösning



$$\int_C \frac{\mathrm{Log}\,z}{z^2}\,dz = /\,z = e^{-i\theta}\,/ = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-i\theta}{e^{-2i\theta}}(-ie^{-i\theta})\,d\theta =$$

$$= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \theta e^{+i\theta}\,d\theta = -i\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \theta\sin\theta\,d\theta =$$

$$= -2i\int_0^{\pi/2} \theta\sin\theta\,d\theta = -2i\left[-\theta\cos\theta + \sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{-2i}.$$

(2) $$\int_C \frac{\mathrm{Log}\,z}{z^2}\,dz = \left[-\frac{1}{z}\mathrm{Log}\,z\right]_i^{-i} + \int_C \frac{dz}{z^2} = \frac{\mathrm{Log}(-i) + \mathrm{Log}\,i}{i} +$$

$$+ \left[-\frac{1}{z}\right]_i^{-i} = \frac{1}{i}\left(-\frac{\pi}{2}i + \frac{\pi}{2}i\right) + \frac{2}{i} = \underline{-2i}.$$

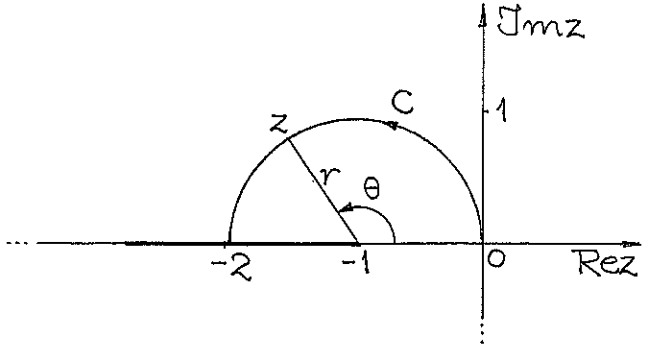
Anm $\mathrm{Log}\,z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z,\ -\pi < \mathrm{Arg}\,z \le \pi$, är log:s principalgren.

Problem 4.6 (Sid. 6)

Lösning:

(1) $w = z+1 \Leftrightarrow u+iv = x+1+iy \Leftrightarrow \underline{u=x+1} \wedge \underline{v=y}$;

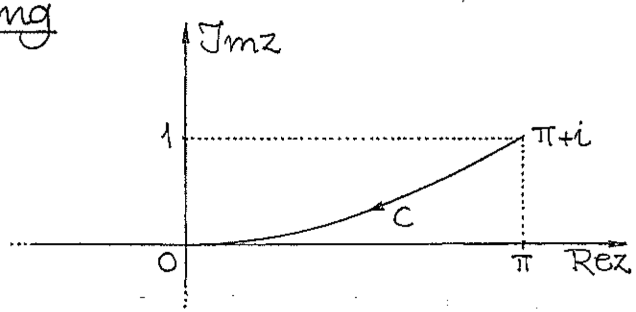
$$\begin{cases} \operatorname{Re} w<0 \Leftrightarrow x+1<0 \Leftrightarrow x<-1 \\ \operatorname{Im} w = 0 \Leftrightarrow y=0 \end{cases} \text{(se figur).}$$



$$\int_C \operatorname{Log}(z+1)\,dz = \left[(z+1)\cdot\operatorname{Log}(z+1)\right]_0^{-2} - \int_C dz = -\operatorname{Log}(-1) - \operatorname{Log}1 -$$
$$-\left[z\right]_0^{-2} = -i\pi+2 = \underline{2-i\pi}.$$

Problem 4.7 (Sid. 6)

Lösning



Sats 3 på sidan 164 och partialintegration

$$\Rightarrow \int_C (z+2)e^{iz}\,dz = \int_{\pi+i}^{0} (z+2)e^{iz}\,dz =$$
$$= \left[(z+2)(-ie^{iz})\right]_{\pi+i}^{0} + i\int_{\pi+i}^{0} e^{iz}\,dz =$$
$$= 2(-i) + i(\pi+2+i)e^{i(\pi+i)} + \left[e^{iz}\right]_{\pi+i}^{0} =$$
$$= -2i + i(\pi+2+i)(-1)e^{-1} + 1 - e^{i(\pi+i)} =$$
$$= \underline{1 - \frac{\pi+1}{e} - \frac{2e+1}{e}i}.$$

Problem 4.8 (Sid. 6)

Lösning

a) $\underline{C: |z-1|=2} \Leftrightarrow z = 1+2e^{i\theta},\ 0\le\theta\le 2\pi$;

$$I_1 = \int_C \frac{dz}{z-1} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2e^{i\theta}}\cdot 2ie^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta = i\left[\theta\right]_0^{2\pi} = \underline{2\pi i}.$$

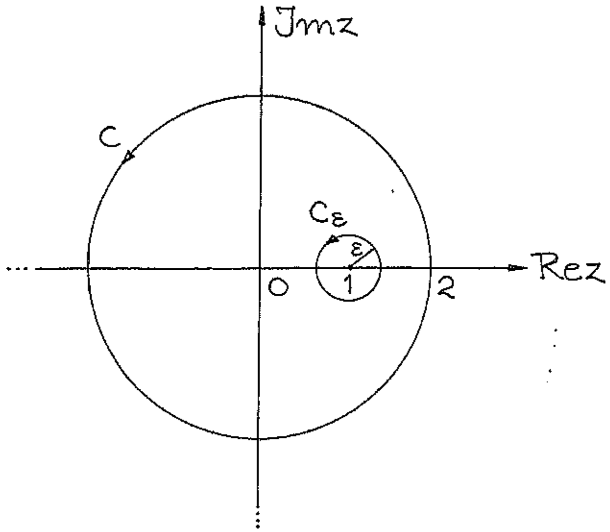
$$I_2 = \int_C \frac{dz}{(z-1)^2} = /z = 1+2e^{i\theta},\ 0\le\theta\le 2\pi/ = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4e^{2i\theta}} 2ie^{i\theta}\,d\theta$$
$$= \frac{i}{2}\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}\,d\theta = 0.$$

b) $\underline{C: |z|\le\frac{1}{2}} \Rightarrow z=1 \notin \operatorname{Int}(C) \Rightarrow \frac{1}{z-1}$ och $\frac{1}{(z-1)^2}$ är analytiska i $|z|\le\frac{3}{4} \Rightarrow$ /Cauchys sats/ $\Rightarrow$

$$I_1 = \int_C \frac{dz}{z-1} = 0 = \int_C \frac{dz}{(z-1)^2} = I_2.$$

forts

c)



$$J_1 = \int_C \frac{dz}{z-1} = \int_{C_\varepsilon} \frac{dz}{z-1} = \underline{2\pi i}\,; \quad J_2 = \int_C \frac{dz}{(z-1)^2} = \int_{C_\varepsilon} \frac{dz}{(z-1)^2} = \underline{0}.$$

Problem 4.9 (Sid. 6)

Lösning $\forall z,w \in \mathbb{C}: \ \big||z|-|w|\big| \leq |z+w|.$

a) $\forall z \in \mathbb{C}: |z^3+1| \geq \big||z|^3-1\big|$ (Obs! $|z^3| = |z|^3$).

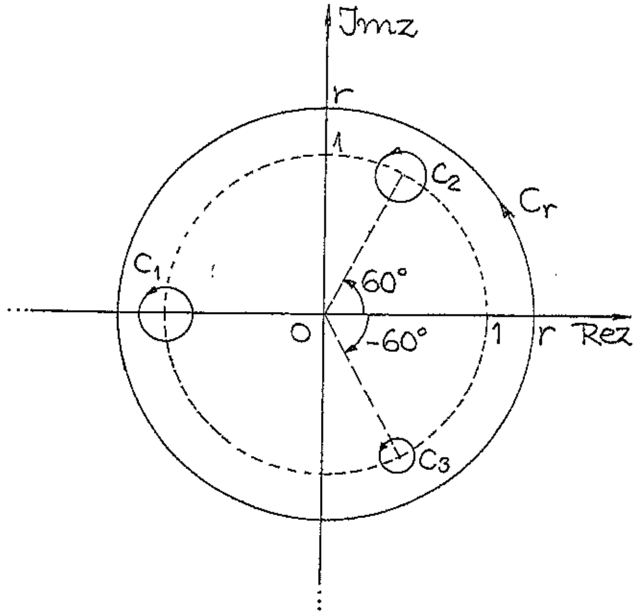
$$\underline{|z| = r > 1 \Rightarrow |z^3+1| \geq r^3-1} \Leftrightarrow \frac{1}{|z^3+1|} \leq \frac{1}{r^3-1} \Rightarrow$$

$$\left|\int_{|z|=r} \frac{dz}{z^3+1}\right| \leq \int_{|z|=r} \frac{1}{|z^3+1|}|dz| \leq \int_0^{2\pi} \frac{dr}{r^3-1} = \frac{2\pi r}{r^3-1}.$$

b) $z^3+1 = (z+1)(z^2-z+1) = 0 \Leftrightarrow z_1 = -1,\ z_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ poler;

$$\Rightarrow \forall r>1: \int_{C_r} \frac{dz}{z^3+1} = \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}\right) \frac{dz}{z^3+1} \overset{!}{=} 0.$$

$$= 2\pi i(z_1+z_2+z_3) = \underline{0} \quad \text{(Se figur).}$$



$$C_1: |z+1| = \varepsilon_1, \quad C_2: \left|z - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right| < \varepsilon_2, \quad C_3: \left|z - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right| = \varepsilon_3\,;$$

$$\varepsilon_i < \tfrac{1}{2}(r-1) \Rightarrow C_i \subset \operatorname{Int}(C_r),\ i = 1,2,3.$$

c) $\forall r>1: |J(r)| \leq \frac{2\pi r}{r^3-1} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \Rightarrow J(r) = 0$, för alla $r>1$.

Problem 4.10 (Sid. 6)

Lösning: $\underline{\forall z,w \in \mathbb{C}: \big||z|-|w|\big| \leq |z+w| \leq |z|+|w|}.$

$$\left|\int_0^\pi \frac{1+i\sin t}{3+4i+2e^{it}}dt\right| \leq \int_0^\pi \left|\frac{1+i\sin t}{3+4i+2e^{it}}\right|dt = \int_0^\pi \frac{|1+i\sin t|}{|3+4i+2e^{it}|}dt$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{\sqrt{1+\sin^2 t}}{\big||3+4i|-|2e^{it}|\big|}dt = \int_0^\pi \frac{\sqrt{1+\sin^2 t}}{5-2}dt \leq /0 \leq t \leq \pi/$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{\sqrt{2}}{3}dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}.$$

Problem 4.11 (Sid. 6)

Lösning

a) $\forall r>1: \ |J(r)| = \left| \oint_{C_r} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2+1}\,dz \right| \leq \int_{C_r} \left| \frac{\operatorname{Log} z}{z^2+1} \right| |dz| = /z=re^{i\theta}/$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\operatorname{Log} re^{i\theta}}{(re^{i\theta})^2-1} \right| \cdot |d(re^{i\theta})| = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\operatorname{Log} r + i\theta|}{|r^2e^{2i\theta}-1|} r\,d\theta \leq$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{Log} r + |\theta|}{r^2-1} r\,d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{Log} r+\pi}{r^2-1} r\,d\theta = 2\pi r \cdot \frac{\operatorname{Log} r+\pi}{r^2-1}.$$

b) $\forall r \in]0,1[: \ |J(r)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\ln r|+\pi}{1-r^2} r\,d\theta = 2\pi r \frac{|\ln r|+\pi}{1-r^2}.$

Anm. $r>1 \Rightarrow \ln r < r \Rightarrow \lim\limits_{r\to\infty} \left(2\pi \frac{r\ln r}{r^2-1}\right) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{r\to\infty} J(r) = 0.$$

$$0<r<1 \Rightarrow \lim_{r\to 0+} \left(2\pi \cdot \frac{r\ln r}{1-r^2}\right) = 0.$$

Cauchys integralformel (4.5)

Problem 4.12 (Sid. 6)

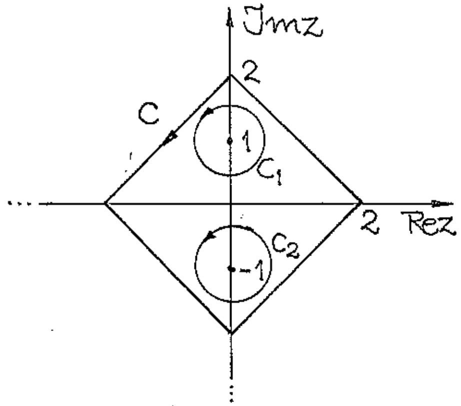
Lösning

$\oint_C \frac{\cos z}{z-2}\,dz = /C: |z|=4/ = 2\pi i \cdot \cos 2 = (2\pi \cos 2) i.$ (1)

$\oint_C \frac{\cos z}{(z-2)^2}\,dz = 2\pi i \cdot \lim\limits_{z\to 2} \frac{d}{dz} \cos z = (-2\pi \sin 2) i.$ (5)

Problem 4.13 (Sid. 6)

Lösning



$$\oint_C \frac{e^z}{z^2+1} = \int_{C_1} \frac{\frac{e^z}{z+i}}{z-i}\,dz + \int_{C_2} \frac{\frac{e^z}{z-i}}{z+i}\,dz = 2\pi i\left(\frac{e^i - e^{-i}}{2i}\right) = 2\pi \sin 1 \cdot i.$$

Problem 4.14 (Sid. 6)

Lösning

$z \in \operatorname{Int}(C) \Rightarrow \int_C \frac{s^3+2s}{(s-z)^3}\,ds = \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{ds^2}(s^3+2s)\Big|_{s=z} = 6\pi i z.$

$z \in \operatorname{Ext}(C) \Rightarrow \int_C \frac{s^2+3s}{(s-z)^3}\,ds = 0$, ty $\frac{s^2+3s}{(s-z)^3} \in A(\operatorname{Ext}(C)).$

Problem 4.15 (Sid. 6)

Lösning: $z_0 = 0 \in \operatorname{Int}(C) \Rightarrow \int_C \frac{\cosh 2z}{z^5}\,dz = /\text{Cauchy}/ =$

$$= \frac{2\pi i}{4!} \frac{d^4}{dz^4} \cosh 2z \Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{4!} \cdot 2^4 \cosh 0 = \frac{4\pi}{3} i$$

$$\Leftrightarrow \int_C \frac{\cosh 2z}{z^5}\,dz = -\int_C \frac{\cosh 2z}{z^5}\,dz = -\frac{4\pi}{3} i.$$

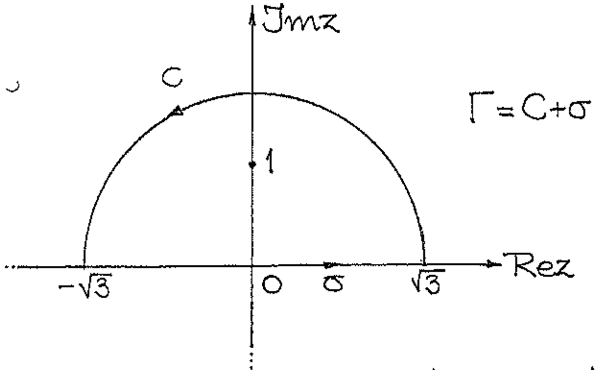
Problem 4.16 (Sid. 6)

Lösning

$$\int_C \left(1+z^2+\frac{1}{z^2+1}\right)dz = \int_C (1+z^2)\,dz + \int_C \frac{dz}{z^2+1} = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2;$$

(1) $\mathfrak{J}_1 = \int_C (1+z^2)\,dz = \left[z+\frac{z^3}{3}\right]_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} = \underline{-4\sqrt{3}};$

(2) För att bestämma $\mathfrak{J}_2$ tillgriper jag ett knep



$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z^2+1} = \int_C \frac{dz}{z^2+1} + \int_\sigma \frac{dz}{z^2+1} \Leftrightarrow \int_C \frac{dz}{z^2+1} = \oint_\Gamma \frac{dz}{z^2+1} -$$

$$- \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \oint_\Gamma \frac{1/(z+i)}{z-i}\,dz - 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} - 2\arctan\sqrt{3} = \pi - 2\cdot\frac{\pi}{3} = \underline{\frac{\pi}{3}}.$$

Resultat: $\int_C \frac{dz}{z^2+1} = \frac{\pi}{3} - 4\sqrt{3}.$

Problem 4.17 (Sid. 6)

Lösning: $f(z) = \frac{\bar{z}^2 - i}{z-i} = \frac{|z|^4/z^2 - i}{z-i} = /|z|=2/ = \frac{16z^{-2}-i}{z-i}$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{\bar{z}^2-i}{z-i}\,dz = \oint_C \frac{16-iz^2}{z^2(z-i)}\,dz = \oint_C \frac{(16-iz^2)z^{-2}}{z-i}\,dz +$$

$$+ \oint_C \frac{(16-iz^2)/(z-i)}{z^2}\,dz = 2\pi i \cdot \lim_{z\to i} \frac{16-iz^2}{z^2} +$$

$$+ 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \frac{16-iz^2}{z-i} = -2\pi i\cdot(i+16) +$$

$$+ 2\pi i \cdot \lim_{z\to 0} \frac{-2iz(z-i)-(16-iz^2)}{(z-i)^2} =$$

$$= -2\pi i(16+i) - 2\pi i(-16) = 2\pi i(-i) = 2\pi.$$

Svar: $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\bar{z}^2-i}{z-i}\,dz = -i \quad (C: |z|=2).$

Maximumprincipen

Problem 4.18 (Sid. 6)

Lösning

Studera Sats 24 på sidan 238 i S & S.

a) $C: |z|=1 \Leftrightarrow z = e^{i\theta}, -\pi \le \theta \le \pi.$

$$f(z) = f(e^{i\theta}) = e^{2i\theta} + 2i = \cos 2\theta + i(\sin 2\theta + 2) \Rightarrow$$

$$|f(e^{i\theta})|^2 = \cos^2 2\theta + (\sin 2\theta + 2)^2 =$$

$$= \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta + 4\sin 2\theta + 4 =$$

$$= 4\sin 2\theta + 5 \le 9;$$

$$|f(e^{i\theta})|^2=9 \Leftrightarrow \sin 2\theta=1 \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{4} \vee \theta=-\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}} \Rightarrow \max_{|z|\le 1}|f(z)|=|f(\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}})|=3.$$

b) $$|f(z)|^2=|f(e^{i\theta})|^2=\left|\frac{e^{i\theta}}{e^{2i\theta}+3}\right|^2=\frac{1}{(\cos 2\theta+3)^2+\sin^2 2\theta}=$$

$$=\frac{1}{6\cos 2\theta+10}\le\frac{1}{6\cdot(-1)+10}=\frac{1}{4};$$

$$\cos 2\theta=-1 \Leftrightarrow \theta=\pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z=\pm i \Rightarrow$$

$$\max_{|z|\le 1}|f(z)|=|f(\pm i)|=\frac{1}{2}.$$

c) $$|f(z)|^2=|f(e^{i\theta})|^2=|(e^{i\theta}-1)^2(e^{i\theta}+1)|^2=|(e^{i\theta}-1)|^4|e^{i\theta}+1|^2=$$

$$=((\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta))^2((\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta)=$$

$$=(2-2\cos\theta)^2(2+2\cos\theta)=8(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)$$

$$=8\sin^2\theta(1-\cos\theta)=g(\theta).$$

Det gäller att bestämma $\max\limits_{-\pi<\theta\le\pi}(g(\theta))$.

$$g'(\theta)=16\sin\theta\cos\theta(1-\cos\theta)+8\sin^3\theta=\sin\theta(8\sin^2\theta+$$

$$+16\cos\theta-16\cos^2\theta)=\sin\theta(8+16\cos\theta-24\cos^2\theta)$$

$$g'(\theta)=0 \Rightarrow 24\cos^2\theta-16\cos\theta-8=0 \Leftrightarrow \cos^2\theta-\frac{2}{3}\cos\theta=$$

$$=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos\theta=\frac{1}{3}\pm\frac{2}{3} \Leftrightarrow \underline{\cos\theta=1} \vee \underline{\cos\theta=-\frac{1}{3}};$$

$(\cos\theta=1 \Rightarrow \sin\theta=0) \Rightarrow z=1 \Rightarrow f(1)=0 \Rightarrow z=1$ är inkonsistent och förkastas; $|f(z)|_{max}>0$.

$\cos\theta=-\frac{1}{3} \Rightarrow \sin\theta=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow z=\frac{-1\pm i2\sqrt{2}}{3}$ ger maximum $\frac{16\sqrt{3}}{9}$.

Problem 4.19 (Sid. 6)

Lösning

$\underbrace{f(z)=|2z^2-z-1| \Rightarrow f_{min}\overset{!}{=}0}_{f(\theta)\ge 0}$; $f(z)=0 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2},-1$.

$f(z)=|2z^2-z-1|$ antar sitt största värde på randen $C: |z|=1$; $C: z=e^{i\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi$ s.a.

$$f(z)=|2z^2-z-1| \Rightarrow f(e^{i\theta})^2=|2e^{2i\theta}-e^{i\theta}-1|^2=$$

$$=|2\cos 2\theta-\cos\theta-1+i(2\sin 2\theta-\sin\theta)|^2=$$

$$=(2\cos 2\theta-\cos\theta-1)^2+(2\sin 2\theta-\sin\theta)^2=$$

$$=4\cos^2 2\theta+\cos^2\theta+1-4\cos 2\theta\cos\theta-4\cos 2\theta+$$

$$+2\cos\theta+4\sin^2 2\theta+\sin^2\theta-4\sin 2\theta\sin\theta=$$

$$=4(\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta)+(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+1-$$

$$-4(\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta)-4\cos 2\theta+2\cos\theta=$$

$$=6-4\cos\theta-4(2\cos^2\theta-1)+2\cos\theta=$$

$$=10-8\cos^2\theta-2\cos\theta=10-8(\cos^2\theta+\frac{1}{4}\cos\theta)=$$

$$=10-8((\cos\theta+\frac{1}{8})^2+\frac{1}{8}=\frac{81}{8}-8(\cos\theta+\frac{1}{8})^2\leq$$

$$\leq\frac{81}{8}\Rightarrow f_{max}=f(\frac{-1\pm i3\sqrt{7}}{8})=\underline{\frac{9\sqrt{2}}{4}}.$$

Svar: Det minsta värdet är 0 och antas i punkten -1 (och $-\frac{1}{2}$); det största värdet är $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ och antas i punkterna $\frac{-1\pm i3\sqrt{7}}{8}$.

Problem 4.20 (Sid. 6)

Lösning

$$f(z)=e^{e^{iz}}\Rightarrow|f(x+iy)|=e^{\mathrm{Re}(e^{-y+ix})}=\underline{e^{e^{-y}\cos x}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|f(iy)|=e^{e^{-y}}\xrightarrow[y\to-\infty]{}+\infty\Rightarrow|f|\text{ obegränsad.}$$

Randen består av linjerna $|\mathrm{Re}\,z|=\frac{\pi}{2}$ s.a.

$$|f(\pm\tfrac{\pi}{2}+iy)|=e^0=1,\ \text{för alla } y\in\mathbb{R}.$$

Anm. Max-principen gäller för begränsat Ω.

Problem 4.21 (Sid. 6)

Lösning

Jag bevisar påståendet indirekt; jag antar motsatsen och får en motsägelse.

Antag alltså att $f(z)\neq 0$, för alla $|z|\leq 1$; då är $g(z):=\frac{1}{f(z)}$, $|z|\leq 1$, analytisk.

$|z|=1\Rightarrow|f(z)|>1\Rightarrow|g(z)|<1$, motsägelse, ty $g(0)=1$ och max-principen säger att g:s max finns på randen; det finns alltså $z_0\in\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ s.a. $f(z_0)=0$.

Anm. Låt P och Q vara två utsagor, atomära eller syntetiska. Då gäller

$$(P\Rightarrow Q)\Leftrightarrow(\neg Q\Rightarrow\neg P).$$

Symbolen $\neg$ anger negering av en utsaga; $\neg(x\leq 2):=x>2$; $\neg Q\Rightarrow\neg P$ är kontrapositionen av $P\Rightarrow Q$. (Se diskret matematik).

5 Komplexa serier

Numeriska serier. Potensserier

Problem 5.1 (Sid. 7)

Lösning

a) $\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{i^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\xrightarrow[N\to\infty]{}+\infty$ (harmoniska serien)

$\Rightarrow$ serien ej absolutkonvergent.

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{i^n}{n}\right)=\frac{i}{1}+\frac{i^2}{2}+\frac{i^3}{3}+\frac{i^4}{4}+\frac{i^5}{5}+\frac{i^6}{6}+\frac{i^7}{7}+\frac{i^8}{8}+\frac{i^9}{9}+\dots+\frac{i^N}{N}$$

$$=\frac{i}{1}-\frac{1}{2}-\frac{i}{3}+\frac{1}{4}+\frac{i}{5}-\frac{1}{6}-\frac{i}{7}+\frac{1}{8}+\frac{i}{9}-\frac{1}{10}+\dots+\frac{i^N}{N}=$$

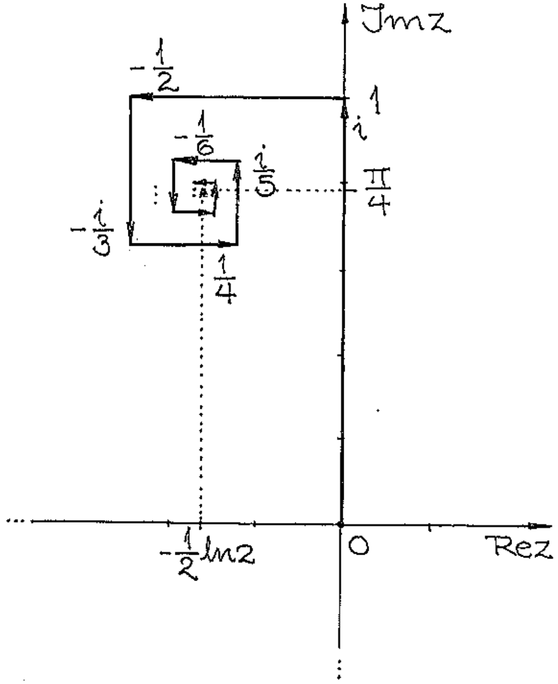
$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\dots+i\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\dots\right)+\frac{i^N}{N}$$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$ konvergent,

enligt Leibniz' konvergenskriterium om alternerande serier.

Anm. Läs mer om detta kriterium i N.4 i Alexanderssons GNP.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}=-\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4}$$ (se figur!)



b) $\sum_{n=0}\left|\frac{1}{n-i}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\sim\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=+\infty$, enligt Cauchys integralkriterium (N.2 i GNP).

Symbolen $\sim$ utläses "är jämförbar med" (finns inte i kompendiet).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n-i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+i}{n^2+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}\sim$$

$\sim\int_0^{\infty}\frac{x}{x^2+1}dx+i\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx$, divergent enl. Cauchys integralkriterium.

c) $\forall N \geq 1: \sum_{n=0}^{N} \left| \frac{1}{n^2+i} \right| = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} <$

$< 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n^4}} = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{n^2+i} \right| < \infty$ (absolutkonvergent).

d) $\forall N \geq 1: \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{N} \frac{|\sin(n)|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ är absolutkonvergent.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(ni)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(n)}{n^2}; \; \lim_{n\to\infty} \frac{\sinh n}{n^2} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{2n^2} \neq 0 \Rightarrow$ ingen absolutkonvergens; den är inte betingat konvergent heller, ty $\lim_{n\to\infty} \frac{i \cdot \sinh n}{n^2} \neq 0$.

Den givna serien är divergent.

Problem 5.2 (Sid. 7)

Lösning

a) $u_n = \frac{n^2}{2^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$

$\Rightarrow R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1.$

Enligt kvotkriteriet (Sats 2, sid. 237) är serien konvergent.

b) $u_n = \frac{2^{n/2}}{n^7} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2^{(n+1)/2}}{(n+1)^7} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{2} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^7 \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \sqrt{2} > 1 \Rightarrow$ serien divergerar.

c) $u_n = i^n \cdot n^2 \Rightarrow u_{n+1} = i^{n+1}(n+1)^2 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = i\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 1 \Rightarrow$ kvotkriteriet duger inte, inte rotkriteriet heller. $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$ är ett nödvändigt villkor för konvergens... Divergent!

d) $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} \Rightarrow$ kriterierna duger inte; enligt kriteriet om alternerande serier (Se GNP) är serien konvergent.

Problem 5.3 (Sid. 7)

Lösning

a) $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k; \; \begin{cases} a_{2j} = \frac{1}{3^j} \\ a_{2j-1} = \frac{1}{3^{j+1}} \end{cases} \Leftrightarrow a_k = \begin{cases} \frac{1}{3^{(k+3)/2}}, & k \text{ udda} \\ \frac{1}{3^{k/2}}, & k \text{ jämnt} \end{cases}$

(1) $$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\begin{cases}3, & k \text{ udda}\\ \frac{1}{9}, & k \text{ jämnt}\end{cases}.$$

Kvotkriteriet ger ingen information om seriens konvergens.

(2) $$\sqrt[k]{a_k}=\left\{\begin{matrix}\frac{1}{3^{1/2+3/2k}}, & k \text{ udda}\\ \frac{1}{3^{1/2}}, & k \text{ jämnt}\end{matrix}\right\} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{3}}<1 \Rightarrow$$

serien är konvergent.

b) Lemma: Antag att $\sigma_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{n}$, $n=1,2,3,\dots$. Om a_n är konvergent så är σ_n konvergent och $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$.

Bevis (av lemmat)

Jag sätter $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$. För ett $\varepsilon>0$ existerar $N\in\mathbb{Z}_+$ s.a. $\forall n>N: |a_n-A|<\varepsilon$. Alltså är

$$|\sigma_n-A|=\left|\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}-A\right|=\left|\frac{(a_1-A)+(a_2-A)+\dots+(a_n-A)}{n}\right|$$
$$\leqslant\frac{|a_1-A|+|a_2-A|+\dots+|a_N-A|+\dots+|a_n-A|}{n}<$$
$$<\frac{|a_1-A|+|a_2-A|+\dots+|a_N-A|}{n}+\frac{n-N}{n}\varepsilon,\ n>N;$$

Den första termen i sista ledet kan göras mindre än ε för ett visst $n=N'$. För $n>\nu=\max(N,N')$ gäller $|\sigma_n-A|<2\varepsilon$, vilket, eftersom ε och därmed 2ε är godtyckligt, att $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$.

Påstående: Om $Q=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $0<Q<\infty$, så är $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=Q$

Bevis (av påståendet). (För $a_n>0$).

$$a_n=\frac{a_1}{1}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\dots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow \ln\sqrt[n]{a_n}=\frac{\sum_1^n \ln(a_k/a_{k-1})}{n},$$

där $a_0=1$. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{a_n}{a_{n-1}}=\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)=\ln Q \Rightarrow$

$\Rightarrow$/lemmat/$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{a_n}=\ln Q \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=Q.$

Problem 5.4 (Sid. 7)

Lösning

a) $$u_n(z)=\frac{z^n}{3^n+n^3} \Rightarrow \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}=\frac{3^n+n^3}{3^{n+1}+(n+1)^3}z=\frac{1+n^3/3^n}{3+(n+1)^3/3^n}z;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|<1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}|z|<1 \Leftrightarrow |z|<3;\ \underline{R=3.}$$

b) $u_n(z)=\frac{z^n}{n!} \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{1}{n+1}|z|$; $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|<1$

$\Leftrightarrow |z|<\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty$; $\underline{R=\infty.}$

c) $u_n(z)=n!z^n \Rightarrow \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}=(n+1)\cdot z$; $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|<1$

$\Leftrightarrow |z| \overset{!}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$; $\underline{R=0.}$

d) $u_n(z)=\frac{(3+4i)^n}{n^2}z^n \Rightarrow |u_n(z)| = \frac{5^n}{n^2}|z|^n \Rightarrow \sqrt[n]{|u_n(z)|}=$

$=\frac{5}{(\sqrt[n]{n})^2}|z|$; $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(z)|}<1 \Leftrightarrow 5|z|<1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|<\frac{1}{5}$; $\underline{R=0{,}2.}$

e) $u_n(z)=(1+\frac{1}{n})^{n^2}z^{2n} \Rightarrow \sqrt[n]{|u_n(z)|}=(1+\frac{1}{n})^n|z|^2$;

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1 \Rightarrow e|z|^2<1 \Leftrightarrow |z|<\frac{1}{\sqrt{e}}$; $\underline{R=\frac{1}{\sqrt{e}}}$

f) Serien $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^{n!}$ är en "del" av serien $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$; denna har konvergensradien $R=1$ så även den givna serien har samma R.

g) $u_n(z)=\frac{z^n}{(2+i+(-1)^n)^n} \Rightarrow \sqrt[n]{|u_n(z)|}=\frac{1}{((2+(-1)^n)^2+1)^{1/2}}|z|$;

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1 \Rightarrow |z|<\liminf_{n\to\infty}((2+(-1)^n)^2+1)^{1/2}$

$\Leftrightarrow \underline{R=\sqrt{2}.}$

Problem 5.5 (Sid. 7)

Lösning

$u_n(z)=e^{nz} \Rightarrow \sqrt[n]{|u_n(z)|}=e^{\mathrm{Re}\,z}$; $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(z)|}<1$

$\Leftrightarrow e^{\mathrm{Re}\,z}<1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,z<0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}e^{nz}=\frac{1}{1-e^z}.$

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\alpha}\sin n\beta = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\alpha}\cdot e^{i\beta}\right) = \mathrm{Im}\sum_{n=0}^{\infty}e^{i(\beta+i\alpha)n} = \mathrm{Im}\frac{1}{1-e^{i(\beta+i\alpha)}},\quad \alpha>0.$$

$$\lim_{\alpha\to0^+}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\alpha}\sin n\beta = \mathrm{Im}\left(\lim_{\alpha\to0+}\frac{1}{1-e^{i(\beta+i\alpha)}}\right) = \mathrm{Im}\frac{1}{1-e^{i\beta}} = \mathrm{Im}\frac{1}{1-\cos\beta-i\sin\beta} =$$

$$=\mathrm{Im}\frac{1-\cos\beta+i\sin\beta}{(1-\cos\beta)^2+\sin^2\beta}=\frac{\sin\beta}{2-2\cos\beta}=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{2\sin(\beta/2)\cos(\beta/2)}{\sin^2(\beta/2)}=\frac{1}{2}\cot\frac{\beta}{2},\quad \frac{\beta}{\pi}\notin\mathbb{Z}.$$

$\frac{\beta}{\pi}\in\mathbb{Z} \Rightarrow \underline{\sin n\beta=0} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\alpha}\sin n\beta=0.$

Övning 5.6 (Sid. 7)

Lösning

Se nästföljande sida.

$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ = konvergensområdet för den geometriska serien $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

a) $S'(z) = \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{1}{(1-z)^2} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2},\ z \in \Omega.$

b) $\forall z \in \Omega :\ \int_0^z S(\zeta)\,d\zeta = \int_0^z \frac{d\zeta}{1-\zeta} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z \zeta^n d\zeta = -\mathrm{Log}(1-z)$

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1} = -\mathrm{Log}(1-z) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} = -\mathrm{Log}(1-z).$

<u>Termvis integration</u> tillåten inom Ω.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2-i)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{1}{2-i}\right)^n = /a)/ = \frac{1/(2-i)}{(1-i)^2} = \frac{-1}{2i(2-i)} =$

$= \frac{i}{2(2-i)} = \frac{i(2+i)}{2\cdot 5} = \frac{-1+2i}{10} = \underline{-\frac{1}{10}+\frac{1}{5}i}.$

<u>Anm.</u> $\left|\frac{1}{2-i}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{1}{2-i} \in \Omega$ och summan fås via insättning i HL.

d) $2 > 1 \Rightarrow 2 \notin \Omega \Rightarrow$ insättning är inte aktuell;

$\lim_{n\to\infty} n\cdot 2^n = +\infty$ och inte 0; divergent.

e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+i)^n(n+1)} = /k = n+1/ = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1+i)^{k-1}\cdot k} = \sum_{n=1}^{\infty}(i+1)\cdot\frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^k}{k}$

$= (1+i)\left(-\mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{1+i}\right)\right) = (1+i)\left(-\mathrm{Log}\frac{i}{1+i}\right) =$

$= -(1+i)\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4} + i\frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4} =$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}\right).$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2} \Rightarrow \forall z \in \Omega :\ \frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{d}{dz}z^n =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n-1} = z^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n \overset{!}{=} \frac{d}{dz}\frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2} +$

$+ \frac{2z}{(1-z)^3} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{2z^2}{(1-z)^3} \Rightarrow /\tfrac{1}{2} \in \Omega/ \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1/2}{1/4} + \frac{2\cdot(1/2)^2}{1/8} = 2 + 4 = 6.$

g) $z\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z^2}{(1-z)^2} + \frac{2z^3}{(1-z)^3} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n+1} = \frac{z^2+z^3}{(1-z)^3}$

$\Rightarrow \forall z \in \Omega :\ \int_0^z\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2\zeta^{n+1}\right)d\zeta = \int_0^z\frac{\zeta^2+\zeta^3}{(1-\zeta)^3}d\zeta$

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2\int_0^z \zeta^{n+1}d\zeta = \int_0^z\left(\frac{2}{(1-\zeta)^3} - \frac{5}{(1-\zeta)^2} + \frac{4}{1-\zeta} - 1\right)d\zeta$

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2\,\frac{z^{n+2}}{n+2} = \left[\frac{1}{(1-\zeta)^2} - \frac{5}{1-\zeta} - 4\mathrm{Log}(1-z) - \zeta\right]_0^z$

$\Leftrightarrow z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n+2}z^n = \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{5}{1-z} - 4\,\mathrm{Log}(1-z) - z + 4$

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n+2}z^n = z^{-2}\left(\frac{5z-4}{(1-z)^2} - (z-4) - 4\mathrm{Log}(1-z)\right)$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n(n+2)} = (3)^2\left(\frac{5/3-4}{4/9} + \frac{11}{3} - 4\,\mathrm{Log}\frac{2}{3}\right) =$

$= 9\left(-\frac{21}{4} + \frac{11}{3} + 4\,\mathrm{Log}\frac{3}{2}\right) =$

$= 36\,\mathrm{Log}\frac{3}{2} - \frac{57}{4}.$

Problem 5.7 (Sid. 7)

Lösning

$$u_n(z)=\frac{z^{2n}}{(2n)!}\Rightarrow u_{n+1}(z)=\frac{z^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}=\frac{z^{2n+2}}{(2n+2)!}=$$
$$=\frac{z^{2n}\cdot z^2}{(2n+2)!}=\frac{z^{2n}}{(2n)!}\cdot\frac{z^2}{(2n+1)(2n+2)};$$
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|<1\Rightarrow|z|^2<\lim_{n\to\infty}2(n+1)(2n+1)=+\infty$$
$\Rightarrow R=\infty\Rightarrow$ serien konvergerar för alla z.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\Rightarrow f'(z)=\frac{d}{dz}f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dz}\frac{z^{2n}}{(2n)!}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\cdot 2nz^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}z^{2n-1}\Rightarrow$$
$$f''(z)=\frac{d}{dz}f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}\cdot(2n-1)z^{2n-2}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-2)!}z^{2n-2}=/k=n-1/=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}=f(z).$$
$$f''(z)=f(z)\Leftrightarrow f''(z)-f(z)=0\Rightarrow/f(z)=e^{\lambda z}/\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\lambda^2-1=0\Leftrightarrow\lambda=\pm1\Rightarrow \underline{f(z)=C_1e^{z}+C_2e^{-z}};$$
$$f(0)=1\Rightarrow C_1+C_2=1\quad(*)$$
$$f'(z)=C_1e^{z}-C_2e^{-z};\ f'(0)=0\overset{(*)}{\Rightarrow}C_1=C_2=\frac{1}{2}.$$

Svar: $f(z)=\frac{1}{2}(e^{z}+e^{-z})=\cosh z$; f.ö. se ovan.

Problem 5.8 (Sid. 7)

Lösning

a) $$w=z^4\Rightarrow u_n(z)=\frac{w^n}{(4n)!}\Rightarrow u_{n+1}(z)=\frac{w^{n+1}}{(4n+4)!}=$$
$$=\frac{w^n}{(4n)!}\cdot\frac{w}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)};$$
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1\Leftrightarrow|w|<\lim_{n\to\infty}(4n+4)^n=+\infty$$
$\Leftrightarrow R=+\infty$ (serien konvergerar för alla z).

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{4n}}{(4n)!}\Rightarrow f(0)=1;$$
$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{4n-1}}{(4n-1)!}\Rightarrow f'(0)=0;$$
$$f''(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{4n-2}}{(4n-2)!}\Rightarrow f''(0)=0;$$
$$f'''(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{4n-3}}{(4n-3)!}\Rightarrow f'''(0)=0;$$
$$f^{(4)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{4n-4}}{(4n-4)!}=/k=n-1/=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{4k}}{(4k)!}=f(z)$$
$$\underline{f^{(4)}(z)-f(z)=0}\Leftrightarrow/f(z)=e^{\lambda z}/\Leftrightarrow\lambda^4-1=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\lambda=\pm1,\pm i\Leftrightarrow f(z)=e^{\pm z},e^{\pm iz}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underline{f(z)=C_1e^{z}+C_2e^{-z}+C_3\cos z+C_4\sin z};$$

$$\Rightarrow f'(z) = C_1 e^{z} - C_2 e^{-z} - C_3 \sin z + C_4 \cos z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(z) = C_1 e^{z} + C_2 e^{-z} - C_3 \cos z - C_4 \sin z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'''(z) = C_1 e^{z} - C_2 e^{-z} + C_4 \sin z - C_4 \cos z\,;$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=1 \Rightarrow C_1+C_2+C_3=1 \\ f'(0)=0 \Rightarrow C_1-C_2+C_4=0 \\ f''(0)=0 \Rightarrow C_1+C_2-C_3=0 \\ f'''(0)=0 \Rightarrow C_1-C_2-C_4=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2(C_1+C_2)=1 \\ 2(C_1-C_2)=0 \\ C_1+C_2=C_3 \\ C_1-C_2 \overset{!}{=} \pm C_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{C_1=C_2=\tfrac{1}{4} \wedge C_3=\tfrac{1}{2} \wedge C_4=0.}$$

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}+\cos z\right) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{4n}}{(4n)!}=\frac{\cosh z+\cos z}{2}$$

b) $u_n(z)=\dfrac{z^{3n}}{(3n)!} \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{z^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)},\ n\geq 0\,;$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|<1 \Rightarrow |z|^3<\lim_{n\to\infty}(3n+3)=+\infty$$

$\Rightarrow R=+\infty$ (serien konvergerar för alla z).

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n}}{(3n)!} \Rightarrow f(0)=1\,;$$

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{3n-1}}{(3n-1)!} \Rightarrow f'(0)=0\,;$$

$$f''(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{3n-2}}{(3n-2)!} \Rightarrow f''(0)=0\,;$$

forts

$$f'''(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{3n-3}}{(3n-3)!}=/k=n-1/=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{3k}}{(3k)!}=f(z)\,;$$

$$\underline{f'''(z)-f(z)=0} \Leftrightarrow /f(z)=e^{\lambda z}/ \Leftrightarrow \lambda^3-1=0 \Leftrightarrow \lambda=1,\ -\tfrac{1}{2}\pm i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow f(z)=C_1e^{z}+e^{-z/2}\left(C_2\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}z+C_3\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}z\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(z)=C_1e^{z}-\tfrac{1}{2}e^{-z/2}\left(C_2\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}z+C_3\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}z\right)+$$
$$+\tfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-z/2}\left(-C_2\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}z+C_3\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}z\right)$$

$$\Rightarrow f''(z)=C_1e^{z}+\tfrac{1}{4}e^{-z/2}\left(C_2\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}z+C_3\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}z\right)$$
$$-\tfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-z/2}\left(-C_2\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}z+C_3\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}z\right)-$$
$$-\tfrac{3}{2}e^{-z/2}\left(C_2\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}z+C_3\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}z\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=1 \Rightarrow C_1+C_2=1 \\ f'(0)=0 \Rightarrow C_1-\tfrac{1}{2}C_2+\tfrac{\sqrt{3}}{2}C_3=0 \\ f''(0)=0 \Rightarrow C_1+\tfrac{1}{2}C_2-\tfrac{\sqrt{3}}{2}C_3-\tfrac{3}{2}C_2=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1=\tfrac{1}{3} \\ C_2=\tfrac{2}{3} \\ C_3=0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\underline{f(z)=\tfrac{1}{3}e^{z}+\tfrac{2}{3}e^{-z/2}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}z\right),\ z\in\mathbb{C}.}$$

Problem 5.9 (Sid. 7)

Lösning

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n}}{n^2} \Rightarrow f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n}=\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n}}{n}=-\frac{\mathrm{Log}(1-z)}{z}$$

$$\Leftrightarrow f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}=\oint_0^z\left(-\frac{\mathrm{Log}(1-\zeta)}{\zeta}\right)d\zeta,\quad C\subset\{z:|z|<1\}.$$

Problem 5.10 (Sid. 7)

Lösning

a) $\underline{(1-z)f'(z)=2f(z),\ f(0)=1.}$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n\Rightarrow f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}z^n;$$

$$(1-z)f'(z)-2f(z)=0\Leftrightarrow f'(z)-zf'(z)-2f(z)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}nc_nz^n-\sum_{n=0}^{\infty}2c_nz^n=0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)c_{n+1}-(n+2)c_n\right)z^n=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\forall n\geq 0:\ (n+1)c_{n+1}-(n+2)c_n=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_{n+1}=\frac{n+2}{n+1}c_n\Rightarrow R=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1;$$

$f(0)=c_0=1\Rightarrow c_1=2\Rightarrow c_2=3\Rightarrow c_3=4$ osv.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=1+2z+3z^2+4z^3+\cdots,\quad |z|<1.$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}z^{n+1}=\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1}=\frac{d}{dz}\left(z\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)=$$

$$=\frac{d}{dz}\left(z\cdot\frac{1}{1-z}\right)=\frac{1}{1-z}+\frac{z}{(1-z)^2}=\frac{1}{(1-z)^2},\quad |z|<1.$$

b) $\underline{f''(z)+f(z)=0;\ f(0)=2,\ f'(0)=-1.}$ (*)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots\Rightarrow \underline{f(0)=c_0=2};$$

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nz^{n-1}=c_1+2c_2z+3c_3z^2+\ldots\Rightarrow\underline{f'(0)=c_1=-1};$$

$$f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nz^{n-2}=/k=n-2\Leftrightarrow n=k+2/=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)c_{k+2}z^k=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}z^n;$$

$$f''(z)+f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)(n+2)c_{n+2}+c_n\right)z^n=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\forall n\geq 0:\ (n+1)(n+2)c_{n+2}+c_n=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_{n+2}=-\frac{1}{(n+1)(n+2)}c_n,\quad c_0=2,\ c_1=-1;$$

(1) $f(0)=c_0=2\Rightarrow c_2=-\frac{1}{1\cdot 2}\cdot 2=-\frac{2}{2!}\Rightarrow c_4=-\frac{1}{3\cdot 4}\cdot(-1)=\frac{2}{4!}$

$$\Rightarrow c_6=-\frac{1}{5\cdot 6}\cdot\frac{2}{4!}=-\frac{2}{6!}\Rightarrow\cdots\Rightarrow a_{2n}=\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot 2$$

(2) $f'(0)=c_1=-1\Rightarrow c_3=-\frac{1}{2\cdot 3}\cdot(-1)=\frac{1}{3!}\Rightarrow c_5=-\frac{1}{4\cdot 5}\cdot\frac{1}{3!}=$

$$=-\frac{1}{5!}\Rightarrow c_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot(-1),\quad n=1,2,3,\ldots$$

$$f(z)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}+(-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}\quad (R=?)$$

Med kvotkriteriet finner man att serierna och därmed $f(z)$ konvergerar för alla z.

Anm. $f(z) = 2\cos z - \sin z$ (helanalytisk!).

c) $(1-4z^2)f''(z) = f(z),\ f(0)=1,\ f'(0)=0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \Rightarrow f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2} = /k=n-2/ =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)c_{k+2}z^k = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}z^n$$

$$(1-4z^2)f''(z) - f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)(n+2)c_{n+2} - 4n(n-1) - 1\right)z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)(n+2)c_{n+2} - (2n+1)^2 c_n\right)z^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall n \geq 0: (n+1)(n+2)c_{n+2} - (2n+1)^2 c_n = 0$$

$$\Leftrightarrow c_{n+2} = \frac{(2n-1)^2}{(n+1)(n+2)}c_n,\ c_0 = 1,\ c_1 = 0;$$

$c_1 = 0 \Rightarrow c_3 = c_5 = \dots = c_{2n-1} = 0 \Rightarrow f(z)$ jämn.

$$c_0 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow c_4 = \frac{3^2}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3^2}{4!} = \frac{3^2}{4!} \Rightarrow c_6 =$$

$$= \frac{3^2\cdot 7^2}{6!} \Rightarrow c_8 = \frac{3^2\cdot 7^2\cdot 11^2}{8!} \Rightarrow \dots \Rightarrow c_{2n} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2n-1)}{(2n)!}$$

Anm. $\prod$ är produkttecknet (symbolen).

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right)z^{2k} + 1\ ,\ |z| < \frac{1}{2}. \quad (*)$$

$$(1-4z^2)f''(z) = f(z) \overset{!}{\Leftrightarrow} f''(z) - \frac{1}{1-4z^2}f(z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f''(z) - \left(\sum_{k=0}^{\infty}(4z^2)^k\right)f(z) = 0;\ (\text{Ex. } 3,4)$$

f analytisk $\Leftrightarrow f''$ analytisk $\Leftrightarrow$ /s. 257/

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-4z^2} \text{ analytisk} \overset{!}{\Leftrightarrow} |z| < \frac{1}{2} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} R = \frac{1}{2}.$$

Problem 5.11 (Sid. 7)

Lösning

a) $$\sum_{n=0}^{N} a_n = A_N \Rightarrow \sum_{n=0}^{N} a_n b_n = \sum_{n=0}^{N}(A_n - A_{n-1})b_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}(A_n - A_{n-1})b_n + (A_N - A_{N-1})b_N =$$

$$= A_N b_N - \sum_{n=0}^{N-1} A_n(b_{n+1} - b_n).$$

Man måste här definiera $A_{-1} = 0$.

Ovanstående "identitet" kommer att bevisas med induktion på N!

(1) $N = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{1} a_n b_n = a_0 b_0 + a_1 b_1$ och dessutom

$(a_0 + a_1)b_1 - a_0(b_1 - b_0) = a_0 b_0 + a_1 b_1 (= \text{VL})$.

(2) Antag att $\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = A_N b_N - \sum_{n=0}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n)$ för något $N \geq 0$.

(3) $\sum_{n=0}^{N+1} a_n b_n = a_{N+1} b_{N+1} + \sum_{n=0}^{N} a_n b_n = /(2)/ =$

$$= a_{N+1} b_{N+1} + A_N b_N - \sum_{n=0}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n) =$$

$$= (A_{N+1} - A_N) b_{N+1} + A_N b_N - \sum_{n=0}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n) =$$

$$= A_{N+1} b_{N+1} - A_N (b_{N+1} - b_N) - \sum_{n=0}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n) =$$

$$= A_{N+1} b_{N+1} - \sum_{n=0}^{N} A_n (b_{n+1} - b_n).$$

Induktionen är därmed genomförd.

b) För en N-partialsumma gäller:

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n b_n\right| = \left|\sum_{n=0}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_N b_N\right| \leq$$

$$\leq C\left(\sum_{n=0}^{N-1} (b_n - b_{n+1}) + b_N\right) \leq /\max_{0 \leq n \leq N} b_n = b_0 / \leq$$

$\leq 2Cb_0 \Rightarrow$ partialsummorna är begränsade $\Rightarrow$ serien konvergerar, enl. principen om monoton konvergens, alt. Cauchykriteriet; $b_n - b_{n+1} > 0$.

c) Jag sätter $a_n = z^n$ och $b_n = \frac{1}{n}$; $b_n \leq 1$, för $n \geq 1$, $\Rightarrow$

$$\left|\sum_{n=0}^{N} z^n\right| = \left|\frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}\right| \leq \frac{1 + |z|^{N+1}}{|1 - z|} \leq \frac{2}{|1 - z|}, \quad |z| = 1, \ z \neq 1.$$

d) Låt $A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$. Vi får

$$\sum_{n=0}^{N} a_n t^n = \sum_{n=0}^{N} (A_n - A_{n-1}) t^n = (1 - t) \sum_{n=0}^{N-1} A_n t^n + A_N t^N$$

För $|t| < 1$ låter vi $N \to \infty$ och får

$$f(t) = (1 - t) \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n. \quad (*)$$

Antag att $A_n \xrightarrow[n \to \infty]{} A$ och låt $\varepsilon > 0$ vara givet.

Välj N så stort att $n > N \Rightarrow |A - A_n| < \varepsilon/2$.

Eftersom för $|t| < 1$ är $(1 - t) \sum_{n=0}^{\infty} t^n = 1$ så ger $(*)$

$$|f(t) - A| = \left|(1 - t) \sum_{n=0}^{\infty} (A_n - A) t^n\right| \leq (1 - t) \sum_{n=0}^{N} |A_n - A| |t|^n$$

$$\leq (1 - t) \sum_{n=0}^{N} |A_n - A| \cdot |t|^n + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

om $t > 1 - \delta$, för något lämpligt valt $\delta > 0$, vilket visar att

$$\lim_{t \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

MacLaurin-, Taylor- och Laurentserier

Problem 5.12 (Sid. 7)

Lösning: Se Sats 5 på sidan 247 (S&S).

(1) $\underline{\cosh z} := \frac{1}{2}(e^z+e^{-z}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!}\right) =$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(1+(-1)^n)\frac{z^n}{n!} = /n=2k,\ k\in\mathbb{N}/ =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{z^{2k}}{(2k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad \underline{R=+\infty}.$$

(2) $\underline{\sinh z} := \frac{1}{2}(e^z-e^{-z}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!}\right) =$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(1-(-1)^n)\frac{z^n}{n!} = /n=2k+1/ =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \underline{R=+\infty}.$$

Anm. $\underline{1+(-1)^n} = 2$, om n är jämnt.

$= 0$, om n är udda.

$\underline{1-(-1)^n} = 2$, om n är udda;

$= 0$, om n är jämnt.

$\cosh(-z) = \cosh z \Leftrightarrow$ cosh är jämn $\Leftrightarrow$ serien består av idel jämna potenser; $\sinh(-z) = -\sinh z \Leftrightarrow$ sinh är udda $\Leftrightarrow$ serien består av idel udda termer.

(3) $\underline{\cos z} = \cosh(iz) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n}\cdot\frac{z^{2n}}{(2n)!} =$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(i^2)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad \underline{R=+\infty}.$$

(4) $\underline{\sin z} = -i\cdot\sinh(iz) = -i\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$

$$=-i\cdot\sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1}\cdot\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \underline{R=+\infty}.$$

Problem 5.13 (Sid. 7)

Lösning

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!} \Rightarrow e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k$$

$$k=20 \Leftrightarrow n=10 \Rightarrow \frac{f^{(20)}(0)}{20!} = \frac{1}{10!} \Leftrightarrow \underline{f^{(20)}(0) = \frac{20!}{10!}}$$

Problem 5.14 (Sid. 8)

Lösning

a) $\phi(z) = (1-z)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}(-z)+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}(-z)^2+O(|z|^3) = /\text{forts}/=$

$$=1-\frac{1}{2}z-\frac{1}{8}z^2+O(|z|^3)\ ,\ R=1;$$

$$\psi(z)=\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4+O(|z|^6),\ R=1;$$

$$f(z)=\frac{(1-z)^{1/2}}{1+z^2}=\left(1-\frac{1}{2}z-\frac{1}{8}z^2+O(|z|^3)\right)\left(1-z^2+O(|z|^4)\right)=$$

$$=1-z^2-\frac{1}{2}z-\frac{1}{8}z^2+O(|z|^3)=\underline{1-\frac{1}{2}z-\frac{9}{8}z^2+O(|z|^3)}.$$

b) $\tan(-z)=-\tan z \Leftrightarrow$ tan är udda $\Leftrightarrow$ serien till tan-funktionen består av udda potenser, dvs $\tan z=a_0z+a_1z^3+a_2z^5+\dots$

$$\cos z\cdot\tan z=\sin z \Leftrightarrow (a_0z+a_1z^3+a_2z^5+O(|z|^7))\cdot$$

$$\cdot\left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+O(|z|^6)\right)=z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}+O(|z|^7)$$

$$\Leftrightarrow a_0z-\frac{a_0}{2}z^3+\frac{a_0}{24}z^5+a_1z^3-\frac{1}{2}a_1z^5+a_2z^5+$$

$$+O(|z|^7)=a_0z+\left(a_1-\frac{a_0}{2}\right)z^3+\left(\frac{a_0}{24}-\frac{a_1}{2}+a_2\right)z^5+O(|z|^7)$$

$$\equiv z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5+O(|z|^7)\Leftrightarrow a_0=1 \wedge a_1-$$

$$-\frac{a_0}{2}=-\frac{1}{6}\wedge a_2-\frac{a_1}{2}+\frac{a_0}{24}=\frac{1}{120}\ \wedge\dots\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_0=1\ \wedge a_2=\frac{1}{3}\wedge a_2=\frac{2}{15}\ \text{osv}\ \Rightarrow$$

$$\tan z=\underline{z-\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+O(|z|^7)},\ |z|<\frac{\pi}{2}.$$

c) $$\cos z-\frac{5}{4}=1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+O(|z|^6)-\frac{5}{4}=-\frac{1}{4}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+O(|z|^6)$$

$$=-\frac{1}{4}\left(1+2z^2-\frac{z^4}{6}+O(|z|^6)\right)=-\frac{1}{4}\left(1+\left(2z^2-\frac{z^4}{6}\right)+O(|z|^6)\right);$$

$$f(z)=\frac{1}{\cos z-5/4}=-4\left(1+\left(2z^2-\frac{z^4}{6}\right)+O(|z|^6)\right)^{-1}=$$

$$=-4\left(1-\left(2z^2-\frac{z^4}{6}\right)+(2z^2)^2+O(|z|^6)\right)=$$

$$=-4\left(1-2z^2+\frac{z^4}{6}+4z^4+O(|z|^6)\right)=$$

$$=-4\left(1-2z^2+\frac{25}{6}z^4+O(|z|^6)\right)=$$

$$=\underline{-4+8z^2-\frac{50}{3}z^4+O(|z|^6)}.$$

<u>Anm.</u> $\cos z=\frac{5}{4}\Leftrightarrow e^{iz}+e^{-iz}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow e^{2iz}-\frac{5}{2}e^{iz}+1=0$

$$\Leftrightarrow e^{iz}=\frac{5}{4}\pm\frac{3}{4}\Leftrightarrow e^{iz}=2\vee e^{iz}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow iz=\ln 2+i2k\pi\ \vee\ iz=-\ln 2+i2n\pi\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{z=\pm i\ln 2+2m\pi}\ \Rightarrow \underline{R=|z|_{min}=\ln 2}.$$

<u>Problem 5.15</u> (Sid. 8)

<u>Lösning</u>

a) $z-2i=w\Leftrightarrow z=w+2i=2i\left(1+\frac{w}{2i}\right)\Leftrightarrow f(z)=\frac{1}{z}=$

$$=\frac{1}{2i}\left(1+\frac{w}{2i}\right)^{-1}=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-w/2i)^n=\underline{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2i)^n}{(2i)^{n+1}}};$$

Konvergensradien är avståndet från $2i$ till singulariteten 0; $R=2$.

b) $f(z)=\frac{1}{z^2}=-\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(z-2i)^n}{(2i)^{n+1}}=/\text{se a)}/=$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n\cdot\frac{(z-2i)^{n-1}}{(2i)^{n+1}}=/k=n-1/=$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(k+1)\cdot\frac{(z-2i)^k}{(2i)^{k+2}}=/n\leftrightarrow k/=$$

$$=\underline{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2i)^{n+2}}(z-2i)^n,\ |z-2i|<2.}$$

c) $f(z)=\mathrm{Log}\,z=\int_{2i}^{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)\frac{(\zeta-2i)^n}{(2i)^{n+1}}\right)d\zeta=/|z-2i|<2/=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2i)^{n+1}}\int_{2i}^{z}(\zeta-2i)^n d\zeta=$$

$$=\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(2i)^{n+1}}(z-2i)^{n+1},\ (\text{principalt}).}$$

<u>Anm.</u> $\log z=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}\,z+i2m\pi=\mathrm{Log}\,z+2m\pi i$

$$\mathrm{Log}\,z=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}\,z,\ -\pi<\mathrm{Arg}\,z\leq\pi.$$

<u>Problem 5.16</u> (Sid. 8)

<u>Lösning</u>

a) $0<|z|<1\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z^2+z}=\frac{1}{z(1+z)}=\frac{1}{z}(1+z)^{-1}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^{n-1}=\underline{\frac{1}{z}-1+z-z^2+z^3-\ldots}$$

b) $|z|>1\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z^2+z}=\frac{1}{z^2(1+1/z)}=\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-1}=$

$$=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+2}}=$$

$$=\underline{\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^5}-\frac{1}{z^6}+\cdots}$$

c) $w=z+1\Leftrightarrow z=w-1\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z^2+z}=\frac{1}{(z+1)((z+1)-1)}=$

$$=\frac{1}{w(w-1)}=-\frac{1}{w}(1-w)^{-1}=/0<|w|<1/=$$

$$=-\frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}w^n=-\sum_{n=0}^{\infty}w^{n-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^{n-1}=$$

$$=\underline{-\frac{1}{z+1}-1-(z+1)-(z+1)^2-(z+1)^2-\cdots,\ 0<|z+1|<1.}$$

d) $|z+1|>1\Rightarrow f(z)=\frac{1}{(z+1)^2(1-(z+1)^{-1})}=\frac{1}{(z+1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+1}\right)^n=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+2}}=\underline{\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^3}+\frac{1}{(z+1)^4}+\cdots}$$

e) $f(z)=\frac{1}{z^2+z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z+1/2)-1/2}-\frac{1}{(z+1/2)+1/2}=$

$$=-\frac{2}{1-(2z+1)}-\frac{2}{1+(2z+1)}=-2\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)(2z+1)^n=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}\cdot(1+(-1)^n)\left(z+\frac{1}{2}\right)^n=/\text{jämnt } n/=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}2^{2(n+1)}\left(z+\frac{1}{2}\right)^{2n},\ \left|z+\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}.$$

f) $|z+\frac{1}{2}|>\frac{1}{2}\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z^2+z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z+1/2)-1/2}-$

$$-\frac{1}{(z+1/2)+1/2}=\frac{1}{z+1/2}\left(\frac{1}{1-(2z+1)^{-1}}-\frac{1}{1+(2z+1)^{-1}}\right)=$$

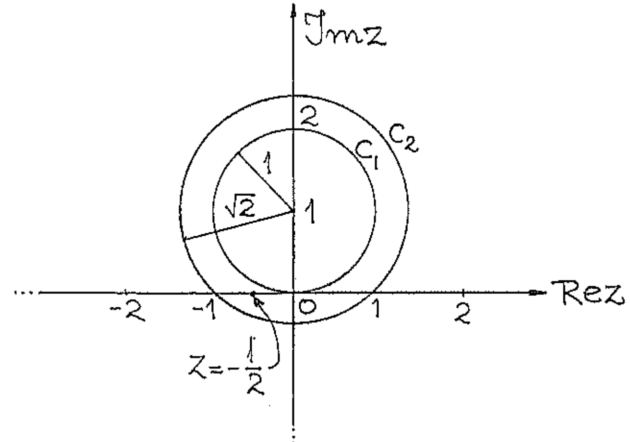
$$=\frac{1}{z+1/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z+1}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2z+1}\right)^n\right)=$$

$$=\frac{1}{z+1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(1-(-1)^n)\frac{1}{(2z+1)^n}=$$

$$=\frac{1}{z+1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{2^n}\frac{1}{(z+1/2)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{2^n}\cdot\frac{1}{(z+1/2)^{n+1}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{2^{2k-1}}\frac{1}{(z+1/2)^{2k}}=\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{1-n}}{(z+1/2)^{2n}}}.$$

g)



Ringen ifråga represteras av $\underline{1<|z-i|<\sqrt{2}}$

$$f(z)=\frac{1}{z^2+z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-i)+i}-\frac{1}{(z-i)+1+i}=\frac{1}{(z-i)(1+i(z-i)^{-1})}-$$

$$-\frac{1}{(1+i)(1+(z-i)/(1+i))}=\frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{z-i}\right)^n-$$

$$-\frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{1+i}\right)^n=\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{(z-i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(1+i)^{n+1}}}$$

Problem 5.17 (Sid. 8)

Lösning

a) $f(z)=\frac{1}{(z+1)(9-z^2)}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{z-1}{9-z^2}\right)=\frac{1}{8}\frac{1}{z+1}+\frac{1}{8}\frac{z-1}{9-z^2}=$

$$=\frac{1}{8}\frac{1}{z+1}+\frac{1}{24}\left(\frac{2}{z-3}+\frac{1}{z+3}\right)=/1<|z|<3/=$$

$$=\frac{1}{8}\frac{1}{z(1+z^{-1})}-\frac{1}{36}\frac{1}{1-z/3}+\frac{1}{72}\cdot\frac{1}{1+z/3}=$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}-\frac{1}{36}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}+\frac{1}{72}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^n}.$$

b) $f(z)=(1+z)\sin\frac{1}{z}=/|z|>0/=(1+z)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}}=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{-2n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{-2n}.$$

c) $|z|>1\Rightarrow f(z)=\frac{e^z}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-z^{-1}}\cdot e^z=\frac{1}{z}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}z^{-j}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=$

$$=\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots-1\right)\cdot\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)+\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\right)z^0+$$

$$+\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)z+\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\right)z^2+\cdots=$$

$$=e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)z^n.$$

Cauchys olikheter

Problem 5.18 (Sid. 8)

Lösning

Låt $\Gamma: |z|=r$; $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$; $M(r)=\max_{z\in\Gamma}|f(z)|$;

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \Rightarrow |a_4|=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_\Gamma\frac{f(z)}{z^5}dz\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma\frac{|f(z)|}{|z|^5}|dz|\leq\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{r^2}}{r^5}\cdot 2\pi r=\frac{e^{r^2}}{r^4};\ r>0;$$

$$\phi(r)=\frac{e^{r^2}}{r^4}\Rightarrow\phi'(r)=\frac{2re^{r^2}}{r^4}-\frac{4e^{r^2}}{r^5}=\frac{2e^{r^2}}{r^5}(r^2-2);$$

$$\phi'(r)=0\Leftrightarrow r=\sqrt{2}\Rightarrow\phi_{min}=\phi(\sqrt{2})=\frac{e^2}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|a_4|=\frac{|f^{(4)}(0)|}{4!}\leq\frac{e^2}{4}\Leftrightarrow|f^{(4)}(0)|\leq 6e^2,\ \text{V.S.V.}$$

Problem 5.19 (Sid. 8)

Lösning

Låt $\Gamma: |z|=r$; $|f(z)|\leq C(1+|z|^N)$, $C\in\mathbb{R}_+$, $N\in\mathbb{N}$;

$$|f^{(n)}(0)|\leq n!\frac{C(1+r^N)}{r^n},\ n=0,1,2,3,\dots,\ r>R.$$

$r\to+\infty\Rightarrow|f^{(n)}(0)|\longrightarrow 0$, för $n>N\Rightarrow$

$\underline{f(z)=a_0+a_1z+\dots+a_Nz^N}$ (ett polynom av grad högst N.)

Problem 5.20 (Sid. 8)

Lösning

$$|\zeta|=r\Rightarrow|f'(z)|=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right|\leq\frac{1}{2\pi}\oint_{|\zeta|=r}\frac{|f(z)|}{(|\zeta|-|z|)^2}|dz|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{r}+1/\sqrt{r}}{(r-|z|)^2}\cdot 2\pi r=\frac{r^2+r}{\sqrt{r}(r-|z|)^2}\xrightarrow[r\to\infty]{}0\Rightarrow$$

$f'(z)=0\Leftrightarrow\underline{f(z)=\text{konstant}}.$

Nollställen och singulariteter

Problem 5.21 (Sid. 8)

Lösning

a) $f(z)=z^5-5z^4+9z^3-7z^2+2z\Rightarrow f(1)=1-5+9-7+2=0$;

$f'(z)=5z^4-20z^3+27z^2-14z+2\Rightarrow f'(1)=5-20+27-14+2=0$;

$f''(z)=20z^3-60z^2+54z-14\Rightarrow f''(1)=20-60+54-14=0$;

$f'''(z)=60z^2-120z+54 \Rightarrow f'''(1)=60-120+54=-6$;

multipliciteten är 3.

Anm. $f(z)=z(z-1)^3(z-2)$. (Sats 16)

b) $f(z)=\sinh(i\pi z)=i\sin\pi z \Rightarrow f(1)=i\sin\pi=0$;

$f'(z)=i\pi\cos\pi z \Rightarrow f'(1)=i\pi\cos\pi=-i\pi$;

multipliciteten är 1.

c) $f(z)=1-\cos 2\pi z \Rightarrow f(1)=1-\cos 2\pi=1-1=0$;

$f'(z)=2\pi\sin 2\pi z \Rightarrow f'(1)=2\pi\cdot\sin 2\pi=0$;

$f''(z)=4\pi^2\cos 2\pi z \Rightarrow f''(1)=4\pi^2\cos 2\pi=4\pi^2$;

multipliciteten är 2.

Problem 5.22 (Sid. 8)

Lösning

a) $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=f(\lim\limits_{n\to\infty} z_n)=f(0)=0$, ty $f(z_n)=0$,

för varje n; $f(0)=1$ säger att en sådan funktion inte finns (Sats 22, s. 296).

b) $z_n=1+\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1 \Rightarrow 0=\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=f(1)=0 \Leftrightarrow f(z)\equiv 0$;

$f(0)=1$ motsäger sats 22; svaret är nej.

c) $g(z)=\sin\pi z \Rightarrow \forall n\geq 1: g(n)=0$;

$f(z)=\frac{\sin\pi}{\pi z} \Rightarrow f(n)=0 \wedge \lim\limits_{z\to 0} f(z)=1\overset{!}{=}f(0)$;

Problem 5.23 (Sid. 8)

Lösning

a) $f(x)=x^2$, $0<x<1$, är reell analytisk, så den kan utvidgas till en komplex analytisk i hela enhetsskivan $D:|z|<1$.

b) $f(z)=\frac{1}{z}=\frac{z}{z\cdot z}=\frac{z}{1/4}=4z$, $z\in D$.

c) $f(z)=\bar{z}=\frac{z\bar{z}}{z}=\frac{1}{4z}$; $f(0)$ kan inte definieras; så någon analytisk fortsättning i D finns inte.

d) $\begin{cases} f(z)+f(-z)=z^2 \\ f(iz)-f(-iz)=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(z)+f(-z)=z^2 \\ f(z)-f(-z)=-iz \end{cases} \Rightarrow f(z)=\frac{z^2-iz}{2}$.

Problem 5.24 (Sid. 8)

Lösning

Jag börjar med att visa identitessatsen för potensserier. Se f.ö. Ö. 5.3:1 (S & S).

Sats: Antag att potensserierna

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n \text{ och } g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-a)^n$$

båda har positiv konvergensradie. Om då $f(z_k)=g(z_k)$, för alla punkter z_k i en oändlig följd av skilda punkter $z_1, z_2, z_3, \ldots$, sådana att $\lim_{k\to\infty} z_k=a$, så är serierna identiska, dvs

$$a_n=b_n,\ n=0,1,2,3,\ldots \quad (*)$$

Bevis (av identitetssatsen)

Det är uppenbart, att om vi visar satsen i det senare fallet, så är den därmed speciellt bevisad under det starkare villkoret att $f(z)=g(z)$ i en hel omgivning till $z=a$.

Låt $D: |z-a|<r$ vara en skiva omsluten av båda seriernas konvergenscirklar. Emedan f och g båda är kontinuerliga i $z=a$ får vi

$$f(z_k)\xrightarrow[k\to\infty]{} f(a)=a_0,\quad g(z_k)\xrightarrow[k\to\infty]{} g(a)=b_0.$$

Men $f(z_k)\overset{!}{=}g(z_k)$, för alla k (se ovan) så även $f(a)=g(a)$, dvs $a_0=b_0$. Resten följer induktivt: Antag att vi visat (*) för $n=0,1,2,3,\ldots,\nu-1$, (ν uttalas "ny"). Vi skriver

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\nu-1}a_n(z-a)^n+\sum_{n=\nu}^{\infty}a_n(z-a)^n=$$
$$=f_1(z)+(z-a)^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+\nu}(z-a)^n,$$
$$g(z)=\sum_{n=0}^{\nu-1}b_n(z-a)^n+\sum_{n=\nu}^{\infty}b_n(z-a)^n=$$
$$=g_1(z)+(z-a)^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}b_{n+\nu}(z-a)^n; \quad (**)$$

Vi inser omedelbart att $f_1(z)=g_1(z)$, i det område vi betraktar ($D: |z-a|<r$). Vidare ser vi omedelbart att, att de båda serierna längst till höger, som vi kan kalla $f_2(z)$

resp. $g_2(z)$ har samma konvergenscirkel som de båda ursprungliga, och de konvergerar alltså båda i D. Villkoret $f(z_k)=g(z_k)$

$$\Rightarrow f_2(z_k)=g_2(z_k),\ k=1,2,3,\ldots$$

Men låter vi här $k\to+\infty$ får vi $f_2(a)=g_2(a)$, dvs $a_\nu=b_\nu$ och därmed blir induktionen genomförd. Identitetssatsen är nu bevisad.

En reell funktion ψ säges vara analytisk (termen förekommer inte i envariabelanalysen) i en punkt x_0 om den framställs som (alt. genom) en potensserie

$$\psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,$$

som konverger i "cirkelskivan" $D:|x-x_0|<r$. Om vi i denna serie ersätter x med $z\in\mathbb{C}$ får vi en annan potensserie

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-x_0)^n, \qquad (***)$$

som tydligen konvergerar i cirkelskivan $\Omega:|z-x_0|<r$, och där framställer en analytisk funktion. Vi har därmed fått en fortsättning av $\psi(x)$ i det komplexa planet, och från identitessatsen vet vi att $(***)$ ger den enda funktion som är analytisk i en omgivning av x_0 och antar samma värden på den reella axeln som f. Att en reellvärd funktion $f(x)$ är analytisk innebär alltså helt enkelt, att den är restriktionen till reella axeln av en analytisk funktion

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-x_0)^n\Rightarrow /\ \overline{a_n}=a_n\ /\Rightarrow$$

$$f(\bar z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\bar z-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n}(\bar z-\overline{x_0})^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n}\,\overline{(z-x_0)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n(z-x_0)^n}=$$

$$=\overline{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-x_0)^n}=\overline{f(z)}.$$

Problem 5.25 (Sid. 9)

Lösning

a) $e^z - 1 = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots - 1 = z\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + O(|z|^3)\right) \Leftrightarrow$

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}: \; f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + O(|z|^3)}$$

$$\lim_{z \to 0} f(z) = 1 = f(0) \Rightarrow f \in \mathcal{A}(D), \quad D: |z| < 2\pi.$$

b) $\frac{z}{e^z - 1} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \Leftrightarrow \frac{1}{1 + z/2 + z^2/6 + O(|z|^3)} =$

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + O(|z|^3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + O(|z|^3)\right)\left(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + O(|z|^3)\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow c_0 + \left(\frac{c_0}{2} + c_1\right) z + \left(c_2 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_0}{6}\right) z^2 + O(|z|^3) = 1$$

$$\Leftrightarrow \underline{c_0 = 1} \wedge \underline{c_1 = -\frac{1}{2}} \wedge \underline{c_2 = \frac{1}{12}} \text{ osv.}$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{12} z^2 + O(|z|^3).$$

$\underline{e^z - 1 = 0} \Leftrightarrow e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i, \; k \in \mathbb{Z}; \; \underline{\rho = |\pm 2\pi i - 0| = 2\pi}.$

c) **Division av potensserier**

Låt $a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots$

vara en potensserie med konvergensradie $r > 0$, och låt

$$(*) \quad b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + b_3(z - z_0)^3 + \cdots, \; b_0 \neq 0$$

vara en annan potensserie (i $z - z_0$) med konvergensradien $\rho > 0$. Emedan $b_0 \neq 0$, så existerar en skiva $D: |z - z_0| < R$, s.a. båda serierna konvergerar i D, och eftersom den senare saknar nollställen i D, kan vi välja

$$R = \min(r, \rho, |z_1 - z_0|),$$

där z_1 är nollstället till $(*)$ som ligger närmast z_0 (notera att det kan finnas fler z_1).

Det innebär att

$$(**) \quad f(z) = \frac{a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots}{b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + b_3(z - z_0)^3 + \cdots}$$

är analytisk i D, så den kan utvecklas i en potensserie, dvs.

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots \quad (***)$$

i skivan $D: |z - z_0| < R$.

forts

Med division av potensserier menas en process som leder till uttrycket/serien (***).

Vi ansätter därmed $(w = z - z_0)$:

$$(c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + \dots)(b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \dots) =$$

$$= a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 w^3 + \dots$$

Hopmultiplikation av serierna i vänsterledet

$$\Rightarrow c_0 b_0 + (c_0 b_1 + c_1 b_0) w + (c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0) w^2 + \dots +$$

$$+ (c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \dots + c_{n-1} b_1 + c_n b_0) w^n + \dots =$$

$$= a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \dots + a_n w^n + \dots \iff$$

$$\iff \begin{cases} c_0 b_0 = a_0 \\ c_0 b_1 + c_1 b_0 = a_1 \\ c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0 = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \dots + c_{n-1} b_1 + c_n b_0 = a_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Systemets obekanta c_n är entydigt bestämda; vi har till exempel $c_0 = \frac{a_0}{b_0}$, $c_1 = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_0^2}$. forts

I vårt fall är $a_0 = 1$ och $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 0$

samt $b_n = \frac{1}{(n+1)!}$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

vilket leder till differensrelationen

$$c_0 = 1 \text{ och } \forall n \geq 1: \frac{c_0}{(n+1)!} - \frac{c_1}{n!} + \dots + c_n = 0$$

Talen $c_n \cdot n!$ går under namnet Bernoulli-tal och betecknas B_n; de finns i handböcker.

Rekursionsformeln för $f(z)$ blir således

$$B_0 = 1; \ \forall n \geq 1: \frac{B_0}{0!(n+1)!} + \frac{B_1}{1!\,n!} + \dots + \frac{B_n}{n!\,1!} = 0$$

Multiplikation av detta med $(n+1)!$ leder till

$$B_0 \binom{n+1}{0} + B_1 \binom{n+1}{1} + \dots + B_n \binom{n+1}{n} = 0, \ n \geq 1.$$

Denna ekvation kan skrivas i sin tur

$$(1 + B)^{n+1} - B^{n+1} = 0. \quad (+)$$

Beteckningen är symbolisk. Jag har upphöjt $1 + B$ i potensen $n+1$, och har ändrat B^k till B_k, $k = 1, 2, \dots, n+1$. Med hjälp av "relationen" (+) och det faktum att $B_0 = c_0 \cdot 0! = 1$, fås i tur och ordning

$B_0=1 \wedge \underline{B_0+2B_1=0} \Leftrightarrow B_1=-\frac{1}{2}B_0=-\frac{1}{2}$;

$B_0=1 \wedge B_1=-\frac{1}{2} \wedge \underline{B_0+3B_1+3B_2=0} \Leftrightarrow B_2=-\frac{1}{3}B_0-B_1=\frac{1}{6}$,

$B_0+4B_1+6B_2+4B_3=0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B_3=0$;

$B_0+5B_1+10B_2+10B_3+5B_4=0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B_4=-\frac{1}{30}$;

$B_0+6B_1+15B_2+20B_3+15B_4+6B_5=0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B_5=0$;

$B_0+7B_1+21B_2+35B_3+35B_4+21B_5+7B_6=0 \Rightarrow B_6=\frac{1}{42}$.

Det hela kan teoretiskt fortgå ad infinitum.

$$f(z)=\frac{z}{e^z-1}=c_0+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\cdots+c_nz^n+\cdots=$$
$$=B_0+\frac{B_1}{1!}z+\frac{B_2}{2!}z^2+\frac{B_3}{3!}z^3+\cdots+\frac{B_n}{n!}z^n+\cdots$$

Låt oss nu ersätta z med $-z$:

$$f(-z)=\frac{-z}{e^{-z}-1}=-\frac{-ze^z}{(e^{-z}-1)e^z}=\frac{ze^z}{e^z-1}=$$
$$=B_0-\frac{B_1}{1!}z+\frac{B_2}{2!}z^2-\frac{B_3}{3!}z^3+\cdots+\frac{B_n}{n!}(-1)^nz^n+\cdots$$

Ledvis subtraktion av $f(z)$ och $f(-z)$ ger alltså

$$f(z)-f(-z)=\frac{z}{e^z-1}-\frac{ze^z}{e^z-1}=-z=2\frac{B_1}{1!}z+2\frac{B_3}{3!}z^3+\cdots+$$
$$+2\frac{B_{2m+1}}{(2m+1)!}z^{2m+1}+\cdots \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2B_1=1 \wedge B_3=B_5=\cdots=B_{2m+1}=0 \Rightarrow$$

$$f(z)=\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{z}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{2m}}{(2m)!}z^{2m},$$

med konvergensradien $R=2\pi$, dvs $|z|<2\pi$.

Se för övrigt Övning 6.3:16 i Saff/Snider (sid. 328) samt referens [5].

Problem 5.26 (Sid. 9)

Lösning

$$h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{(z-z_0)^{N_f}\cdot\phi(z)}{(z-z_0)^{N_g}\cdot\psi(z)}=$$
$$=(z-z_0)^{N_f-N_g}\cdot\frac{\phi(z)}{\psi(z)};$$

a) $N_f<N_g \Rightarrow N_f-N_g<0 \Rightarrow h(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\frac{\phi(z)}{\psi(z)}$,

där $m=N_f-N_g$.

b) $N_f\geqslant N_g \Rightarrow n=N_f-N_g\geqslant 0 \Rightarrow h(z)=(z-z_0)^n\frac{\phi(z)}{\psi(z)}$

$\Rightarrow z=z_0$ nollställe av ordning n om $n>0$, annars hävbar singularitet.

Anm. Det förutsättes här att $\phi(z_0)\neq 0\neq\psi(z_0)$ och att z_0 är ett isolerat nollställe.

Problem 5.27 (Sid. 9)

Lösning

a) $f(z)=\dfrac{z^3+1}{z^2(z+1)} \Rightarrow P(z)=z^3+1=(z+1)(z^2-z+1)$;

(1) $P(0)=1\neq 0 \Rightarrow$ $z=0$ dubbelpol.

(2) $f(z)=\dfrac{(z+1)(z^2-z+1)}{z^2(z+1)}=/z\neq -1/=\dfrac{z^2-z+1}{z^2} \Rightarrow \lim\limits_{z\to -1} f(z)=3$

$\Rightarrow$ $z=-1$ hävbar singularitet.

b) $f(z)=z^3e^{1/z}=z^3\left(1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{2}{z^2}+\dfrac{6}{z^3}+\dfrac{24}{z^4}+\dfrac{120}{z^5}+\dfrac{720}{z^6}+O\left(\dfrac{1}{|z|^7}\right)\right)$

$=z^3+z^2+2z+6+\dfrac{24}{z}+\dfrac{120}{z^2}+\dfrac{720}{z^3}+O\left(\dfrac{1}{|z|^4}\right) \Rightarrow$

$z=0$ är en väsentlig singularitet.

c) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2+1}=\dfrac{\cos z}{(z+i)(z-i)} \Rightarrow$ $z=\pm i$ enkelpoler.

d) $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{z+1-e^z}{z(e^z-1)}=\dfrac{z^2/2+O(|z|^3)}{z^2(1+O(|z|))}=\dfrac{1/2+O(|z|)}{1+O(|z|)}$;

$z=0$ är en hävbar singularitet.

$z=2m\pi i$, $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, är enkla poler.

e) $f(z)=\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z} \Rightarrow z_n=(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$, är enkelpoler.

f) $f(z)=z/\operatorname{Log} z \Rightarrow$ $z=1$ enkelpol; alla $z+|z|=0$ är icke-isolerade singulariteter.

Anm. $z+|z|=0 \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+y^2}+iy=0 \Leftrightarrow y=0\ \wedge$

$\wedge\ x+|x|=0 \Leftrightarrow x\leq 0 \wedge y=0$.

g) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z^{-1}}$; $z=\dfrac{1}{n\pi}$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, enkelpoler;

$z=0$ icke-isolerad singularitet.

h) $f(z)=1/((z^2-9)^{1/2}-4)$; $(z^2-9)^{1/2}-4=0 \Leftrightarrow z=\pm 5$ är enkelpoler.

$$\begin{cases} z=-3+r_1e^{i\theta_1} \\ z=3+r_2e^{i\theta_2} \end{cases} \Rightarrow (z^2-9)^{1/2}=\sqrt{r_1r_2}\,e^{i(\theta_1+\theta_2)/2};$$

för $\theta_1+\theta_2=\pi$ har ekvationen $(z^2-9)^{1/2}=4$ alltid (två) lösningar, så Im-axeln och $[-3,3]$ på Re-axeln utgör icke-isolerade singulariteter

Problem 5.28 (Sid. 9)

Lösning

$\lim\limits_{z\to 0} zf(z)=0$ innebär att f är begränsad i mängden $D: 0<|z|<\delta$, dvs existerar $M>0$:

$$0<|z|<\delta \Rightarrow |f(z)|<M.$$

Antag att f inte är analytisk i $z=0$; $z=0$ är då en isolerad singularitet till f, och

$$(*) \quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad 0<|z|<\delta$$

Om $C: |z|=\rho<\varepsilon$ så vet vi att

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{-n+1}}dz, \quad n\geq 1$$

$$\Rightarrow |b_n| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{-n+1}}\cdot 2\pi\rho = M\rho^n, \quad n\geq 1.$$

b_n är konstanter och ρ kan tas godtyckligt litet så vi drar slutsatsen att $b_n=0, n\geq 1$, i $(*)$ ovan. Det säger i sin tur att $z=0$ är en hävbar singularitet till f.

Anm. Den isolerade singulariteten $z=z_0$ till en analytisk funktion f är hävbar om f är begränsad för $0<|z-z_0|<\delta$.

Problem 5.29 (Sid. 9)

Lösning

$f(z)=z+f(z^2)=z+z^2+f(z^4)=z+z^2+z^4+f(z^8)$ osv.

a) $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \Rightarrow$ konvergensradien är $R=1$, ty koefficienten c_k är 1 eller 0 allteftersom det naturliga talet k är av formen 2^n eller inte, varför

$$R=\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}=1.$$

Jag har därmed visat att $f\in A(\Omega)$, där $\Omega: |z|<1$.

b) Om $z_0=e^{i\theta}$ är en regulär punkt på $\partial\Omega$, så existerar en direkt analytisk fortsättning av f till en öppen mängd som innehåller z_0. Denna mängd innehåller en hel båge av $\partial\Omega$, och på denna båge finns (oändligt många) punkter av formen

$$z_1 = e^{2\pi i a},\ a = m2^{-n},\ n\in N,\ m = 1,2,\dots,2^n.$$

Eftersom f kunde direkt fortsättas till ett område, som innehåller z_1, och speciellt måste gränsvärdet

$$\lim_{r\to 1^-} f(re^{2\pi i a})$$

existerar. Vi ska nu se att detta leder till en motsägelse. Låt N vara ett godtyckligt givet tal och välj p så stort, att

$$p - \frac{2}{2^n} - 1 > N.$$

Sätter vi nu $z = re^{2\pi a i}$ finner vi att

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} z^{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} z^{2^k}\right| \geq$$

$$\geq \sum_{k=n+1}^{\infty} r^{2^k} - \sum_{k=0}^{n} r^{2^k} \geq$$

$$\geq r^{2^p}(p-2^n) - (2^n+1).$$

forts

Då $r\to 1^-$ går högra ledet mot

$$p - 2^{1-n} - 1 > N,$$

och för r tillräckligt nära 1 är alltså

$$|f(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}\right| > N.$$

Detta strider mot utsagan att f har ett gränsvärde, och förutsättningen att det finns en regulär punkt på konvergenscirkelns rand måste därför vara falsk. Detta fullbordar beviset för att alla punkter på randen $\partial\Omega$ är singulära.

c) Det finns ingen kontinuerlig funktion i någon större domän som sammanfaller med Ω. Randen säges utgöra en naturlig gräns i detta fall.

Anm. De sista talen i varje avsnitt är svåra.

Problem 5.30 (Sid. 9)

Lösning

Antag att $|f(z)-c| \geq \varepsilon$, för $0<|z|<\delta$. Då är

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-c},\ 0<|z|<\delta,$$

begränsad och analytisk i sin def-mängd. $z=0$ är då hävbar singularitet, enligt problem 5.28 (Riemanns sats), och vi låter $g(z)$ vara definierad i origo, så den är analytisk där. Men $g(0)\neq 0 \Rightarrow f(z)=c+\frac{1}{g(z)}$, $0<|z|<\delta$, $\Rightarrow z=0$ är en hävbar singularitet (ej väsentlig) till $f(z)$, motsägelse.

Anm. Om $g(0)=0$, så har g ett m-faldigt nollställe, ty g är inte identiskt lika med 0 i $|z|<\delta$. Men då har $f(z)=c+\frac{1}{g(z)}$ en m-faldig pol i $z=0$, motsägelse även i detta fallet.

Påståendet är darmed fullständigt bevisat.

6. Residyteori

Residyberäkning

Problem 6.1 (Sid. 9)

Lösning

a) $z^3e^{1/z}=z^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{z^{n-3}} \Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=0} z^3e^{1/z}=4!=24.$

Anm. Residyn i $z=0$ är a_{-1} i Laurentserien.

b) $f(z)=f(-z) \Leftrightarrow f(z)$ jämn $\Leftrightarrow \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=0$, ty alla potenser är jämna tal.

c) $\operatorname*{Res}_{z=0} \cot \pi z=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos\pi z}{\pi\cos\pi z}=\underline{\underline{\frac{1}{\pi}}}.$

d) $\operatorname*{Res}_{z=-2} \cos\frac{1}{z+2}=/w=z+2/=\operatorname*{Res}_{w=0}\cos\frac{1}{w}=\underline{\underline{0}}$ (Se c)).

e) $\operatorname*{Res}_{z=1} \sin\frac{z}{z-1}=/w=z-1/=\operatorname*{Res}_{w=0}\sin\frac{w+1}{w}=\operatorname*{Res}_{w=0}\sin(1+\frac{1}{w})$

$=\operatorname*{Res}_{w=0}(\sin 1\cdot\cos\frac{1}{w}+\cos 1\sin\frac{1}{w})=/\text{Se c)}/=$

$=\operatorname*{Res}_{w=0}\cos 1\cdot\sin\frac{1}{w}=\cos 1\cdot\operatorname*{Res}_{w=0}(\frac{1}{w}+O(\frac{1}{|w|^3}))=$

$=\cos 1.$

Substitutionerna är tillåtna här:

Problem 6.2 (Sid. 9)

Lösning

a) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-3z+2}=\dfrac{z+1}{(z-1)(z-2)} \Rightarrow z_1=1, z_2=2$, enkelpoler.

(1) $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\dfrac{z+1}{z-2}=\dfrac{2}{-1}=\underline{-2}.$

(2) $\operatorname*{Res}_{z=2} f(z)=\lim_{z\to 2}(z-2)f(z)=\lim_{z\to 2}\dfrac{z+1}{z-1}=\dfrac{3}{1}=\underline{3}.$

b) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^4+z^2}=f(-z) \Rightarrow f(z)$ jämn. (*)

(1) $z^4+z^2=z^2(z^2+1)=0 \Leftrightarrow z_1=0,0,\ z_2=i,\ z_3=-i$ poler.

(2) $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=0$, ty f jämn (udda potenser saknas)

(3) $\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\dfrac{\cos z}{z^2(z+i)}=\dfrac{\cos(i)}{2i^3}=$
$=\dfrac{\cosh 1}{-2i}=\underline{-\dfrac{\cosh 1}{2}i}.$

(4) $\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)=\overline{\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)}=\overline{-\dfrac{\cosh 1}{2}i}=\underline{\dfrac{\cosh 1}{2}i}.$

c) $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z+1)^3}$; $z_1=0,\ z_2=-1,-1,-1$ poler.

(1) $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to 0} z f(z)=\lim_{z\to 0}\dfrac{e^z}{(z+1)^3}=\underline{1}.$

(2) $\operatorname{Res} f(-1)=\lim_{z\to -1}\dfrac{1}{2!}\dfrac{d^2}{dz^2}(z+1)^3 f(z)=\dfrac{1}{2}\lim_{z\to -1}\dfrac{d^2}{dz^2}\dfrac{e^z}{z}=$
$=\dfrac{1}{2}\lim_{z\to -1}\dfrac{z^2-2z+2}{z^3}e^z=\underline{-\dfrac{5}{2e}}.$

d) $f(z)=\dfrac{z}{e^z-1}$; $e^z=1 \Leftrightarrow z_n=2\pi n i,\ n\in\mathbb{Z}.$

(1) $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to 0} z f(z)=\lim_{z\to 0}\dfrac{z}{e^z}=\underline{0}.$ (*)

(2) $\operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z)=\lim_{z\to z_n}\dfrac{z}{e^z}=\dfrac{z_n}{1}=\underline{2\pi n i,\ n\neq 0}.$

Anm. $z=0$ är en hävbar singularitet.

e) $f(z)=\dfrac{1}{z^2\sin z} \Rightarrow z_0=0,0,0,\ z_n=n\pi,\ n\neq 0$, poler.

(1) $z^2\sin z=z^2\left(z-\frac{1}{6}z^3+O(|z|^5)\right)=\dfrac{1}{z^3}\left(1-\dfrac{z^2}{6}+O(|z|^4)\right)$

$\Rightarrow f(z)=\dfrac{1}{z^3}\left(1+\dfrac{z^2}{6}+O(|z|^4)\right)=\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1/6}{z}+O(|z|)$

$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\underline{\dfrac{1}{6}}.$

(2) $n\neq 0 \Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z)=\lim_{z\to z_n}(z-z_n)f(z)=\lim_{z\to z_n}\dfrac{z^{-1}}{\cos z}=$
$=\dfrac{z_n^{-1}}{(-1)^n}=\underline{-\dfrac{1}{n^2\pi^2}}.$

f) $f(z)=\dfrac{1}{(e^z-1)^2} \Rightarrow z=z_n=2\pi n i,\ n\in\mathbb{Z}$, dubbelpoler.

$\forall n\in\mathbb{Z}$: $\operatorname{Res} f(z_n)=\lim_{z\to z_n}\dfrac{d}{dz}(z-z_n)^2 f(z)=/w=z-z_n/=$
$=\lim_{w\to 0}\dfrac{d}{dw}\dfrac{w^2}{(e^w-1)^2}=\lim_{w\to 0}\left(\dfrac{2w}{(e^w-1)^2}-\dfrac{2w^2\cdot e^w}{(e^w-1)^3}\right)=$
$=\lim_{w\to 0}\dfrac{2w(e^w-1)-2w^2e^w}{(e^w-1)^3}=/\text{Hospital}/=$
$=\lim_{w\to 0}\dfrac{2(1-w-w^2)e^w-2}{3e^w(e^w-1)^2}=/\text{Hospital}/=$

$$= \frac{2}{3}\lim_{w\to 0}\frac{(-3w-w^2)e^w}{e^w(e^w-1)(3e^w-1)} = \frac{2}{3}\lim_{w\to 0}\frac{-3w-w^2}{(e^w-1)(3e^w-1)} \stackrel{!}{=}$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{w\to 0}\frac{-3-2w}{e^w(3e^w-1)+3e^w(e^w-1)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{(-3)}{2} = \underline{\underline{-1.}}$$

I $\stackrel{!}{=}$ underförstås L'Hôpitals regel igen.

g) $f(z) = \dfrac{1}{z(1-\cos z)} \Rightarrow z = z_0 = 0,0,0$; $z = z_n = 2n\pi$, poler.

(1) $z(1-\cos z) = z\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + O(|z|^6)\right) = \frac{z^3}{2}\left(1 - \frac{z^2}{12} + O(|z|^4)\right)$

$\Rightarrow f(z) = \frac{2}{z^3}\left(1 + \frac{z^2}{12} + O(|z|^4)\right) = \frac{2}{z^3} + \frac{1/6}{z} + O(|z|)$

$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{6}$.

(2) $z = z_n = 2n\pi i$, $n \neq 0$, är dubbelpoler så att

$$\operatorname{Res} f(z_n) = \lim_{z\to z_n}\frac{d}{dz}(z-z_n)^2 f(z) = /w = z - z_n/ =$$

$$= \lim_{w\to 0}\frac{d}{dw}\frac{1}{w+z_n}\cdot\frac{w^2}{1-\cos w} = /\text{utvecklas}/ =$$

$$= \lim_{w\to 0}\frac{d}{dw}\frac{1}{w+z_n}\cdot 2\left(1 + \frac{1}{6}w^2 + O(|w|^4)\right) =$$

$$= \lim_{w\to 0}\left(-\frac{2}{(w+z_n)^2}\left(1 + \frac{1}{6}w^2 + O(|w|^4)\right) + \frac{w/3 + O(w^3)}{w+z_n}\right)$$

$$= -\frac{2}{z_n^2} = -\frac{1}{2\pi^2 n^2}$$

Anm. Utan substitutioner (lokalt koordinatsystem) blir det väldigt jobbigt.

Integralberäkning

Problem 6.3 (Sid. 9)

Lösning

a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z+1-2i}$; $C: |z| = 2$.

(1) $z^2 + 2z + 1 - 2i = 0 \Leftrightarrow (z+1)^2 = (1+i)^2 \Leftrightarrow z + 1 = \pm(1+i)$

$\Leftrightarrow z_1 = i$, $z_2 = -2-i$; $z_2 \notin \operatorname{Int}(C)$.

(2) $\operatorname{Res} f(i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{1}{2z+2} = \frac{1-i}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_C \frac{dz}{z^2+2z+1-2i} = 2\pi i\,\frac{1-i}{4} = \underline{\frac{1+i}{2}\pi}.$$

Anm. $\operatorname{Int}(C) = \operatorname{Int}(C) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$.

b) $f(z) = \dfrac{\sin z}{\sinh^2 z}$; $C: |z| = 3$.

(1) $\sinh z = 0 \Leftrightarrow z = -in\pi$, $n \neq 0$, (dubbelpoler)

Ingen av dessa ligger i $\operatorname{Int}(C)$ dock!

$z = 0$ är en enkelpol till f; motsvarande residy är 1, ty enligt Hospital fås

$\operatorname{Res} f(0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\sinh z}\cdot\left(\lim_{z\to 0}\frac{\sinh z}{z}\right)^{-1} =$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{\cosh z}\left(\frac{\cosh z}{1}\right)^{-1} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1} \stackrel{!}{=} 1.$$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{\sinh^2 z}\,dz = 2\pi i\cdot 1 = \underline{2\pi i}.$

c) $\underline{f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{1+z+z^2+z^3},\quad C: |z| = 2.}$

(1) $1+z+z^2+z^3 = (z+1)(z+i)(z-i) = 0 \Leftrightarrow z = -1, i, -i$;

$z=-1$ är en hävbar singularitet dock.

$$\operatorname{Res} f(i) = \lim_{z\to i} \frac{\sin \pi z}{(z+i)(z+1)} = \frac{\sin i\pi}{2i(1+i)} = \frac{1-i}{4}\sinh \pi$$

$$\operatorname{Res} f(-i) = \overline{\operatorname{Res} f(i)} = \frac{1+i}{4}\sinh \pi$$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{\sin \pi z}{1+z+z^2+z^3}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{2}\right)\sinh \pi = \underline{(\pi \sinh \pi) i}.$

d) $\underline{f(z) = \dfrac{1}{(e^z-1)^2};\quad C: |z| = 1.}$ (Se Problem 6.2 f))

(1) $e^z - 1 = 0 \Leftrightarrow z_n = 2\pi n i,\ n \in \mathbb{Z}$; $\underline{\text{endast } z_0 \in \operatorname{Int}(C)}$.

(2) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(e^z-1)^2} = 2\pi i\cdot \operatorname{Res} f(0) = 2\pi i(-1) = \underline{-2\pi i}.$

e) $\underline{f(z) = \dfrac{z^3}{z+1}e^{1/z},\quad C: |z| = 5.}$

(1) $z=-1$ enkelpol, $z=0$ väsentlig singularitet

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1} z^3 e^{1/z} = -e^{-1};$$ forts

$$z^3\cdot\frac{1}{1+z}e^{1/z} = z^3(1-z+z^2-z^3+\dots)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{z^{-2}}{2!}+\frac{z^{-3}}{3!}+\dots\right) =$$

$$= (1-z+z^2-z^3+\dots)\left(z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{z^{-1}}{4!}+\dots\right) =$$

$$= \dots + \left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}\dots\right)z^{-1} + \underline{\text{analytisk del}} =$$

$$= \dots + \left(\frac{1}{e}-\frac{8}{3}\right)\frac{1}{z} + \text{analytisk del} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res} f(0) = \frac{1}{e} - \frac{8}{3}$$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{z^3 e^{1/z}}{z+1}\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z) = 2\pi i\left(-\frac{1}{e}+\frac{1}{e}-\frac{8}{3}\right) = \underline{\frac{2\pi}{3i}}.$

f) $\underline{f(z) = 1/\sin\frac{1}{z},\quad C: |z| = 1.}$

(1) $\sin\frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow z_n = \frac{1}{n\pi},\ n\neq 0$; enkelpoler.

$$f(-z) = -f(z) \Rightarrow \operatorname{Res} f(z_n) = -\operatorname{Res} f(z_{-n})$$

$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{\sin w} \Rightarrow \int_C \frac{dz}{\sin z^{-1}} =$$

$$= \int_C \frac{dw}{w^2 \sin w} = \int_C \frac{dw}{w^2\sin w};$$

(2) $\displaystyle w^2\sin w = w^3\left(1-\frac{1}{6}w^2+O(|w|^4)\right) \Rightarrow \frac{1}{w^2\sin w} =$

$$= \frac{1}{w^3}\left(1+\frac{1}{6}w^2+O(|w|^4)\right) = \frac{1}{w^3}+\frac{1/6}{w}+O\left(\frac{1}{|w|^3}\right)$$

(3) $\displaystyle\int_C \frac{1}{\sin(z^{-1})}\,dz = 2\pi i\cdot\frac{1}{6} = \underline{\frac{\pi}{3}i}.$

Den sista integralen är överkurs.

Problem 6.4 (Sid. 10)

Lösning

a) $\Gamma: |z|=\pi/2$; söks $c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma z^{n-1}\frac{dz}{\sin z}$, $n=1,2,3$.

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{dz}{\sin z}=1 \quad \text{(endast polen } z=0)$$

$$c_{-2}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{z}{\sin z}dz=0 \quad (z=0 \text{ hävbar}).$$

$$c_{-3}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{z^2}{\sin z}dz=0 \quad (z=0 \text{ hävbar}).$$

b) $\Gamma: |z|=3\pi/2$; söks $c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma z^{n-1}\frac{dz}{\sin z}$, $n=1,2,3$.

Singulariteter i $\operatorname{Int}(\Gamma)$ är $z=0,\pm\pi$.

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{dz}{\sin z}=-1+1-1=-1.$$

$$c_{-2}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{z}{\sin z}dz=\pi+0-\pi=0$$

$$c_{-3}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{z^2}{\sin z}dz=-\pi^2+0-\pi^2=-2\pi^2.$$

Problem 6.5 (Sid. 10)

Lösning

a) $\Gamma: z=e^{i\theta},\ 0\leq\theta\leq 2\pi$;

$$5+4\sin\theta=5+4\frac{z-\bar z}{2i}=\frac{5iz+2(z^2-1)}{iz}=\frac{2(z^2+5iz/2-1)}{iz}=$$

$$=\frac{2}{iz}(z+2i)(z+\tfrac{i}{2})\ ;\ d\theta=dz/iz \ \text{(bekant)};$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+4\sin\theta}=\frac{1}{2}\oint_\Gamma\frac{(z+2i)^{-1}}{z-1/2i}dz=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{3i/2}=\frac{2\pi}{3}.$$

b) $\cos^3\theta\cos 3\theta=\frac{1}{4}(3\cos\theta+\cos 3\theta)\cos 3\theta=$

$$=\frac{1}{4}(3\cos\theta\cos 3\theta+\cos^2 3\theta)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}(\cos 4\theta+\cos 2\theta)+\frac{1}{2}(1+\cos 6\theta)\right)=$$

$$=\frac{1}{8}(\cos 6\theta+3\cos 4\theta+3\cos 2\theta+1)\Rightarrow$$

$$\int_0^\pi\cos^3\theta\cos 3\theta\, d\theta=\frac{1}{8}(0+0+0+\pi)=\frac{\pi}{8}.$$

Meningen är att man skall använda residykalkyl. Låt oss göra det!

$$\int_0^\pi\cos^3\theta\cos 3\theta\, d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\cos 3\theta\, d\theta=/z=e^{i\theta}/=$$

$$=\frac{1}{2}\oint_\Gamma\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^3\frac{z^3+z^{-3}}{2}\cdot\frac{dz}{iz}=$$

$$=\frac{1}{32i}\oint_\Gamma\left(z^5+3z^3+3z+\frac{2}{z}+\frac{3}{z^3}+\frac{3}{z^5}+\frac{1}{z^7}\right)dz=$$

$$=\frac{1}{32i}\oint_\Gamma\frac{2}{z}dz=\frac{1}{32i}\cdot 2\pi i\cdot 2=\frac{\pi}{8}.$$

c) $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos 2\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos 2\theta}d\theta=/z=e^{i\theta}\Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}/$

$$=\oint_\Gamma\frac{(z^6+1)^2/4z^6}{(-2z^{-2})(z^4-5z^2/2+1)}\frac{dz}{iz}=\frac{i}{8}\oint_\Gamma\frac{(z^6+1)^2\,dz}{z^5(z^4-5z^2/2+1)};$$

(1) $R(z)=\frac{i}{8}\frac{(z^6+1)^2}{z^5(z^4-5z^2/2+1)}$ har den femfaldiga polen $z_1=0$ och enkelpolerna $z_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ innanför $\Gamma: |z|=1$.

$$R(z)=\frac{i}{8}\frac{(z^6+1)^2}{z^9}\cdot\left(1-\frac{5z^2-2}{2z^4}\right)^{-1}=/\text{binomialsatsen}/=$$
$$=\frac{i}{8}\frac{1}{z^9}(z^{12}+2z^6+1)\cdot\left(1+\frac{5z^2-2}{2z^4}+\frac{(5z^2-2)^2}{4z^8}+\frac{(5z^2-2)^3}{8z^{12}}+\ldots\right)$$
$$=\frac{i}{8}\cdot\frac{1}{z^9}(z^{12}+2z^6+1)\left(1+\frac{5/2}{z^2}-\frac{1}{z^4}+\frac{25/4}{z^4}+\text{annat}\right)$$
$$=\frac{i}{8}\frac{1}{z^9}\cdot z^{12}\cdot\left(\frac{25}{4}-1\right)\frac{1}{z^4}+\text{annat ointressant})$$
$$=\frac{i}{8}\cdot\frac{21}{4}\cdot\frac{1}{z}+\text{rest då}\ldots\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=0}R(z)=\frac{21}{32}i$$
$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{27}{64}i=\operatorname{Res}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\sum\operatorname{Res}=\frac{3}{16i};$$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta}d\theta=2\pi i\cdot\frac{3}{16i}=\underline{\frac{3\pi}{8}}.$

d) $$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+\cos\theta}d\theta=$$
$$=/\Gamma: ze^{i\theta}/=\frac{1}{2}\oint_\Gamma\frac{-(z-z^{-1})^2/4}{a+(z+z^{-1})/2}\frac{dz}{iz}=$$
$$=\frac{i}{4}\oint_\Gamma\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2+2az+1)}dz;$$

$z_1=0$ dubbelpol, $z=-a\pm\sqrt{a^2-1}$ enkelpoler.

$\underline{z_1=0}$ och $\underline{z_2=\sqrt{a^2-1}-a}$ ligger i $\operatorname{Int}(\Gamma)$.

(1) $$\frac{z^4-2z^2+1}{(z^2+2az+1)z^2}=\frac{1}{z^4}(z^4-2z^2+1)\cdot\left(1+\frac{1+2az}{z^2}\right)^{-1}=$$
$$=\left(1-\frac{2}{z^2}+\frac{1}{z^4}\right)\left(1-\frac{1+2az}{z^2}+\ldots\right)=-\frac{2a}{z}+\text{annat}\Rightarrow$$
$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{i}{4}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2+2az+1)}\right)=\frac{a}{2i};$$
$$\operatorname*{Res}_{z=z_2}\frac{i}{4}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2+2az+1)}=\frac{i}{4}\frac{(z_2^2-1)^2}{z_2^2(z_2-z_3)}=\frac{\sqrt{a^2-1}}{2}i,\ a>1;$$

(2) $\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+\cos\theta}d\theta=2\pi i\left(\frac{a}{2i}+\frac{\sqrt{a^2-1}}{2i}\right)=\underline{\pi(a+\sqrt{a^2-1})}.$

e) $$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\theta d\theta=/\sin^2(-\theta)=\sin^2\theta/=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^{2n}\theta d\theta;(*)$$
$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\theta d\theta=/\sin^2(\theta\pm\pi)=\sin^2\theta/\overset{(*)}{=}\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin^{2n}\theta d\theta=$$
$$=/z=e^{i\theta}/=\frac{1}{4}\oint_\Gamma\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^{2n}\frac{dz}{iz}=$$
$$=\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}\cdot i\oint_\Gamma\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}z^{2n-k}\left(-\frac{1}{z}\right)^k\frac{dz}{z}=$$
$$=\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}\cdot i\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\oint_\Gamma(-1)^k z^{2(n-k)-1}dz=$$
$$=/n=k/=\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}\cdot i\binom{2n}{n}\cdot(-1)^n\cdot 2\pi i=$$
$$=\frac{2\pi}{4^{n+1}}\binom{2n}{n}\overset{!}{=}\frac{2\pi}{4^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2,\ n=1,2,3,\ldots$$

<u>Problem 6.6</u> (Sid. 10)

<u>Lösning</u>: Se nästföljande sida.

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}\right) x\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_{R}^{0} x\,dx + \lim_{S\to\infty} \int_{0}^{R} x\,dx =$

$= \lim_{R\to-\infty} \left(-\frac{R^2}{2}\right) + \lim_{S\to\infty} \frac{S^2}{2} = -\infty + \infty$; inkonsistent.

(2) $\mathrm{PV} \int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} x\,dx = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-T}^{T} = \lim_{T\to\infty} 0 = 0.$

Problem 6.7 (Sid. 10)

Lösning

Jag börjar med att visa följande: Låt $P_n(z)$ vara ett polynom av grad n och låt $Q_{n+r}(z)$ vara ett polynom av grad $n+r$. Det existerar en konstant K s.a. för ngt $N>0$:

$$\left|\frac{P_n(z)}{Q_{n+r}(z)}\right| < \frac{K}{|z|^r}$$

för $|z|>N$.

Antag att $P_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, med $a_n \neq 0$, och $Q_{n+r}(z) = \sum_{\nu=0}^{n+r} b_\nu z^\nu$, $b_{n+r} \neq 0$.

$$\left|\frac{P_n(z)}{Q_{n+r}(z)}\right| = \left|\frac{a_n}{b_{n+r}}\right| \cdot \frac{1}{|z|^r} \cdot \left|\frac{1+\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{n-\nu}\frac{1}{z^\nu}}{1+\sum_{\nu=1}^{n+r} \beta_{n+r-\nu}\frac{1}{z^\nu}}\right|,$$

där $\alpha_{n-\nu} = \frac{a_{n-\nu}}{a_n}$, $\nu = 1,2,\ldots,n$, och $\beta_{n+r-\nu} = \frac{b_{n+r-\nu}}{b_{n+r}}$, $\nu = 1,2,\ldots,n+r$. Triangelolikheten ger

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \left|1+\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{n-\nu}\frac{1}{z^\nu}\right| \le 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \left|\alpha_{n-\nu}\frac{1}{z^\nu}\right| \\ (2) & \left|1+\sum_{\nu=1}^{n+r} \beta_{n+r-\nu}\frac{1}{z^\nu}\right| \ge \left|1 - \left|\sum_{\nu=1}^{n+r} \beta_{n+r-\nu}\frac{1}{z^\nu}\right|\right| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{P_n(z)}{Q_{n+r}(z)}\right| \le \left|\frac{a_n}{b_{n+r}}\right| \cdot \frac{1}{|z|^r} \cdot \frac{1+\sum_{\nu=1}^{n} \left|\alpha_{n-r}\frac{1}{z^\nu}\right|}{\left|1-\left|\sum_{\nu=1}^{n+r} \beta_{n+r-\nu}\frac{1}{z^\nu}\right|\right|}.$$

Låt $A > \max\{1, |\alpha_{n-\nu}|, |\beta_{n+r-\nu}|\}$; för $|z| > N = 2(n+r)A > 1$ fås

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n+r} \beta_{n+r-\nu}\frac{1}{z^\nu}\right| \le \sum_{\nu=1}^{n+r} \left|\beta_{n+r-\nu}\frac{1}{z^\nu}\right| < A \cdot \sum_{\nu=1}^{n+r} \frac{1}{|z|^\nu} <$$

$$< A \sum_{\nu=1}^{n+r} \frac{1}{|z|} = A \cdot \frac{n+r}{|z|} < \frac{1}{2}.$$

Detta medför att

$$\left|1 - \left|\sum_{\nu=1}^{n+r} \beta_{n+r-\nu}\frac{1}{z^\nu}\right|\right| = 1 - \left|\sum_{\nu=1}^{n+r} \beta_{n+r-\nu}\frac{1}{z^\nu}\right| \ge 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Vidare är

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left|\alpha_{n-\nu}\frac{1}{z^\nu}\right| < A \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|z|^\nu} < A \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|z|} = \frac{nA}{|z|} <$$

$$< \frac{nA}{2(n+r)A} < \frac{1}{2}.$$

vilket i sin tur medför att

$$1+\sum_{\nu=1}^{n}\left|\alpha_{n-\nu}\frac{1}{z^{\nu}}\right|<1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

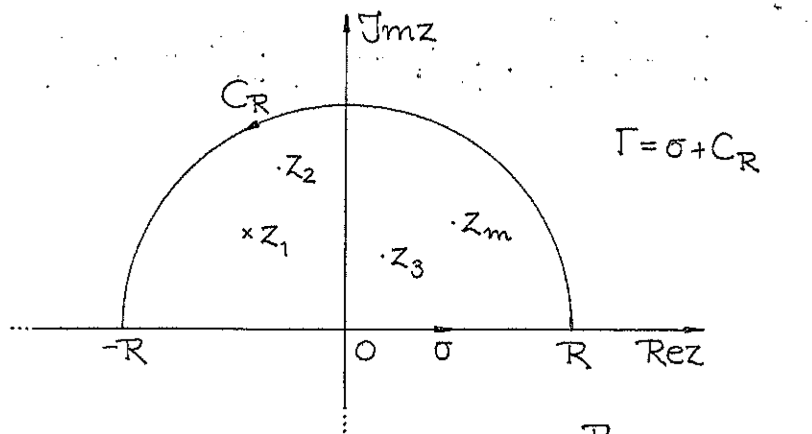
och vi får slutligen

$$\left|\frac{P_n(z)}{Q_{n+r}(z)}\right|<\left|\frac{a_n}{b_{n+r}}\right|\cdot\frac{1}{|z|^r}\cdot\frac{3/2}{1/2}=3\left|\frac{a_n}{b_{n+r}}\right|\cdot\frac{1}{|z|^r},$$

och med $K=3\left|\frac{a_n}{b_{n+r}}\right|$ och $N=2(n+r)A$,

$$\left|\frac{P_n(z)}{Q_{n+r}(z)}\right|<\frac{K}{|z|^r},\ |z|>N.$$

a)



$$\oint_{\Gamma}\frac{P(z)}{q(z)}dz=\int_{C_r}\frac{P(z)}{q(z)}dz+\int_{\sigma}\frac{P(z)}{q(z)}\Leftrightarrow\int_{-R}^{R}\frac{P(x)}{q(x)}dx=$$

$$=2\pi i\sum_{k}\mathrm{Res}\{p(z)/q(z);\,z_k\}-\int_{C}\frac{P(z)}{q(z)}dz\Rightarrow$$

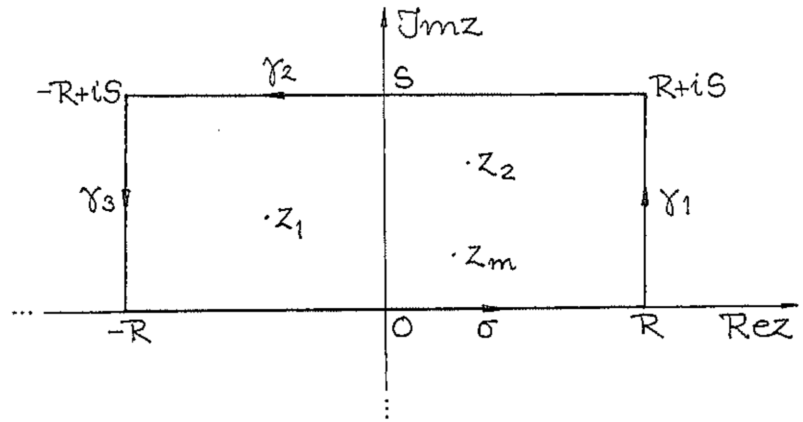
$$\Rightarrow PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{q(x)}dx=2\pi i\sum_{k}\mathrm{Res}\left\{\frac{P(z)}{q(z)},z_k\right\}\quad\text{omm}$$

$$\left|\int_{C_R}\frac{P(z)}{q(z)}dz\right|\leq\int_{0}^{\pi}\frac{K}{R^{\lambda}}r\,d\theta=K\cdot R^{1-\lambda}\cdot 2\pi\xrightarrow[R\to\infty]{(\lambda>2)}0;$$

Anm. Summan sträcker sig över alla poler innanför Γ i övre halvplanet.

b) Här gäller det att bevisa Jordans lemma. Detta görs i nästan alla läroböcker i komplex analys; jag väljer en annan väg...

Betrakta följande rektangulära kontur:



$\Gamma=\sigma+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$

$z_1,z_2,\ldots,z_m$ är polerna till funktionen

$$F(z)=\frac{P(z)}{q(z)}e^{iaz},\ a>0,$$

i det övre halvplanet ($\mathrm{Im}\,z>0$) innanför Γ.

Om R och S tas tillräckligt stora hamnar alla poler med Im-del >0 innanför Γ.

För integralen längs γ_1 får vi, för tillräckligt stort R

$$\left|\int_{\gamma_1}\frac{p(z)}{q(z)}e^{iaz}dz\right|=\left|\int_0^S\frac{p(R+it)}{q(R+it)}e^{iR}e^{-t}i\,dt\right|\leq$$
$$\leq \sup_{z\in\gamma_1}\left|\frac{p(z)}{q(z)}\right|\left|\int_0^S e^{-t}dt\right|;$$

Med $\text{grad}\, q\geq \text{grad}\, p+1$ är emellertid, om R är tillräckligt stort,

$$\left|\frac{p(z)}{q(z)}\right|\leq\frac{M}{|z|}\leq\frac{M}{R},\quad \text{om } |z|>R.$$

Alltså får vi

$$|z|>R\Rightarrow\left|\int_{\gamma_1}\frac{p(z)}{q(z)}e^{iaz}dz\right|\leq\frac{M}{R}(1-e^{-S})<\frac{M}{R}.$$

För den vänstra sidan γ_3 får på exakt samma sätt

$$|z|>R\Rightarrow\left|\int_{\gamma_3}\frac{p(z)}{q(z)}e^{iaz}dz\right|<\frac{M}{R}.$$

För integralen över γ_2 får vi

$$\left|\int_{\gamma_2}\frac{p(z)}{q(z)}e^{iaz}\right|=\left|\int_{-R}^{R}\frac{p(x+iS)}{q(x+iS)}e^{i(x+iS)a}dx\right|\leq$$
$$\leq\sup_{z\in\gamma_2}\left|\frac{p(z)}{q(z)}\right|\cdot e^{-S}\cdot 2R,$$

och eftersom $\left|\frac{p(z)}{q(z)}\right|<\frac{M}{|z|}<\frac{M}{S}$, om $|z|>R$,

$$|z|>R\Rightarrow\left|\int_{\gamma_2}\frac{p(z)}{q(z)}e^{iaz}dz\right|\leq\frac{M}{S}e^{-S}2R$$

Väljer vi nu $S=2R$ erhåller vi

$$\left|\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}\frac{p(z)}{q(z)}e^{iaz}dz\right|\leq M\left(\frac{2}{R}+e^{-2R}\right)\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

$$\Rightarrow \text{pv}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}e^{iax}dx=2\pi i\sum_{\text{Im} z>0}\text{Res}\left\{\frac{p(z)}{q(z)}e^{iaz}\right\}.$$

Problem 6.8 (Sid. 10)

Lösning

a) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+x+1}{x^4+1}dx=\text{pv}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx+\text{pv}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^4+1}dx=$$
$$=\text{pv}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=2\pi i\sum_{\text{Im} z>0}\text{Res}\left(\frac{z^2+1}{z^4+1}\right);$$

$$z^4+1=0\wedge \text{Im} z>0\Leftrightarrow z_1=\frac{1+i}{\sqrt2}\wedge z_2=\frac{-1+i}{\sqrt2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{Res}_{z=z_1}\left(\frac{z^2+1}{z^4+1}\right)+\text{Res}_{z=z_2}\left(\frac{z^2+1}{z^4+1}\right)=2\cdot\frac{\sqrt2}{4i}=\frac{\sqrt2}{2i};$$

Resultat: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+x+1}{x^4+1}=\sqrt2\pi.$

b) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+9)^2}dx=\text{pv}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+9)^2}dx=2\pi i\sum_{\text{Im} z>0}\text{Res}\left(\frac{z^2}{(z^2+9)^2}\right);$$

$$(z^2+9)^2=0 \wedge \operatorname{Im} z>0 \Leftrightarrow z=z_1=z_2=3i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=3i}\frac{z^2}{(z^2+9)^2}=\lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+3i)^2}=\lim_{z\to 3i}\frac{6iz}{(z+3i)^3}=$$

$$=\frac{6i\cdot 3i}{(6i)^3}=\frac{18}{216i}=\frac{1}{12i};$$

Resultat: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+9)^2}dx=\frac{\pi}{6}.$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac12\, pv\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{(x^2+1)^3}dx=\frac12\cdot 2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=i}\left(\frac{1}{(z^2+1)^3}\right)=$

$$=\frac{\pi i}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{(z+i)^3}\Big|_{z=i}=\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{12}{(2i)^5}=\underline{\frac{3\pi}{16}}\text{ (svaret).}$$

Problem 6.9 (Sid. 10)

Lösning

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3+x^2+1}{x^4+1}dx=\underbrace{pv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3}{x^4+1}dx}_{=0}+pv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\pi\sqrt{2}.$$

Problem 6.10 (Sid. 10)

Lösning

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-2i}=pv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-2i}=2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{\operatorname{Im}z>0}\left(\frac{1}{z^2-2i}\right);$$

(1) $z^2-2i=0 \wedge \operatorname{Im}z>0 \Leftrightarrow z=1+i \Leftrightarrow \operatorname{Res}(1+i)=\dfrac{1}{2+2i}$

(2) $J=2\pi i\cdot\dfrac{1}{2(1+i)}=\pi\dfrac{1+i}{2}.$

(3) $\displaystyle pv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-2i}=pv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+2i}{x^4+4}dx=pv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+4}dx+$

$\displaystyle +2i\cdot pv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+4}=/(2)/=\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow$ /Im lika/

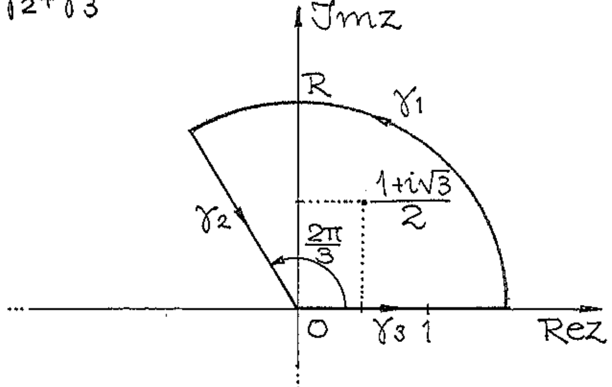
$$\Leftrightarrow 2\cdot pv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+4}=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow pv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+4}=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+4}=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+4}=\frac{\pi}{8}=J.$$

Problem 6.11 (Sid. 10)

Lösning: $t^3=(te^{i\alpha})^3=t^3e^{i3\alpha}\Rightarrow \underline{\alpha=\frac{2\pi}{3}\text{ rad}}.$

$\Gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$



$z^3+1=0 \Leftrightarrow z=-1,\ \frac12\pm i\frac{\sqrt3}{2}$; endast $\frac{1+i\sqrt3}{2}\in \operatorname{Int}(\Gamma)$.

$$\oint_\Gamma\frac{dz}{z^2+1}=2\pi i\cdot\operatorname{Res}\left\{\frac{1}{z^3+1},\frac{1+i\sqrt3}{2}\right\}=2\pi i\cdot\frac{1}{3\left(\frac{1+i\sqrt3}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt3-i}{3}\pi \Leftrightarrow \left(\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}+\int_{\gamma_3}\right)\frac{dz}{z^3+1}=\frac{\pi}{3}(\sqrt3-i)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_0^R\frac{dx}{x^3+1}+\int_0^{2\pi/3}\frac{1}{R^3e^{i3\theta}+1}Re^{i\theta}\,i\,d\theta+$$

$$+\int_R^0 \frac{1}{r^3+1}e^{i2\pi/3}dr = \frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-1) \Rightarrow$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{dx}{x^3+1} + \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi/3} \frac{iRe^{i\theta}}{R^3e^{i3\theta}+1}d\theta - \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{e^{i2\pi/3}}{r^3+1}dr$$

$$= \lim_{R\to\infty}(1-e^{i2\pi/3})\int_0^R \frac{dx}{x^3+1} = \frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-i) = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - i\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

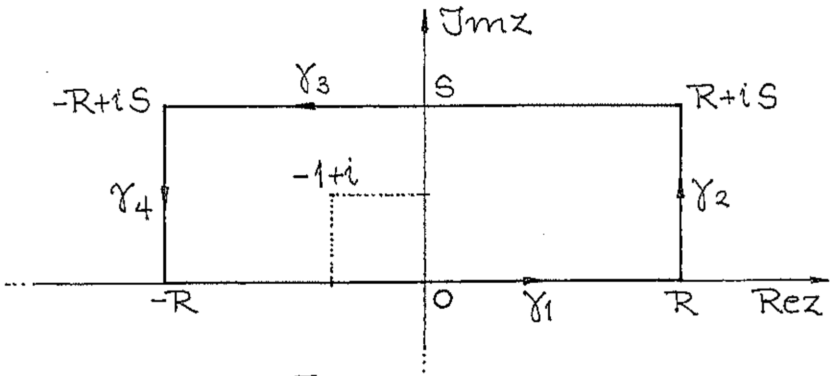
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(3-i\sqrt{3})\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-i)\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-i)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Problem 6.12 (Sid. 10)

Lösning

a) Jag integrerar $f(z) = \dfrac{e^{2iz}}{(z^2+2z+2)^2}$ över Γ:



$$\Gamma = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$$

$z=-1+i$ är en dubbelpol till f innanför $\Gamma \Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\{f(z);-1+i\} = \lim_{z\to -1+i}\frac{d}{dz}\frac{e^{2iz}}{(z+1+i)^2} =$$

$$= \operatorname*{limes}_{z\to -1+i}\left(\frac{2i}{(z+1+i)^2} - \frac{2}{(z+1+i)^3}\right)e^{2iz} =$$

$$= \left(\frac{2i}{(2i)^2} - \frac{2}{(2i)^3}\right)e^{2i(-1+i)} = \frac{3}{4}e^{-2}\cdot\frac{1}{i}e^{-2i} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Res}\left\{\frac{e^{2iz}}{(z^2+2z+2)^2}, -1+i\right\}\cdot 2\pi i = \frac{3\pi}{2e^2}e^{-2i} \Rightarrow$$

$$\operatorname{pv}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+2x+2)^2}dx = \operatorname{Re}\left(\frac{3\pi}{2e^2}e^{-2i}\right) = \frac{3\pi}{2}e^{-2}\cos 2.$$

b) $\dfrac{\cos x}{(x+i)^2} = \dfrac{(x-i)^2}{(x^2+1)^2}\cos x = \dfrac{(x^2-1)\cos x}{(x^2+1)^2} - 2i\dfrac{x\cos x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{pv}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\cos x\,dx = \operatorname{pv}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x+i)^2}dx.$$

Jag integrerar $f(z) = \dfrac{z^2-1}{(z^2+1)^2}e^{iz}$ över Γ i a).

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{z^2-1}{(z+i)^2}e^{iz} = -\frac{1}{2ei} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{pv}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x+i)^2}dx = \operatorname{pv}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\cos x\,dx = 2\pi i\left(\frac{i}{2e}\right) = -\frac{\pi}{e}.$$

c) Jag integrerar $f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{z^2+2z+2}$ över Γ i a)

$$\operatorname*{Res}_{z=-1+i} f(z) = \operatorname*{limes}_{z\to -1+i}\frac{ze^{iz}}{z+1+i} = \frac{-1+i}{2i}e^{-1-i} \Rightarrow$$

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\frac{-1+i}{2i}e^{-1-i} = \frac{\pi}{e}(-1+i)e^{-i} \Leftrightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+2x+2}dx = \operatorname{Im}\frac{\pi}{e}(\sin 1 - \cos 1 + i(\cos 1 + \sin 1))$$

$$= \underline{\frac{\pi}{e}(\sin 1 + \cos 1).}$$

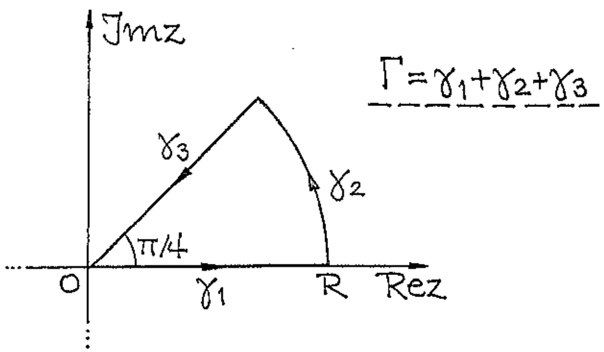
Anm. $\operatorname{pv}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2+2x+2}dx = \frac{\pi}{e}(\sin 1 - \cos 1).$

Problem 6.13 (Sid. 10)

Lösning

Låt oss integrera den helanalytiska funktionen $f(z)=e^{iz^2}$ över följande kontur:

$f(z)=e^{iz^2}$



$$\begin{cases} \gamma_1: z=x, \ 0\le x\le R \\ \gamma_2: z=Re^{i\theta}, \ 0\le\theta\le\pi/4 \\ \gamma_3: z=xe^{i\pi/4}, \ R\to 0 \end{cases}$$

(1) $\oint_\Gamma f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{\gamma_2} f(z)dz+\int_{\gamma_3} f(z)dz=0;$

(2) $\int_{\gamma_1} f(z)dz=\int_0^R e^{ix^2}dx;$

$\int_{\gamma_2} f(z)dz=\int_0^{\pi/4} f(Re^{i\theta})\,iRe^{i\theta}d\theta;$

$\int_{\gamma_3} f(z)dz=\int_R^0 f(xe^{i\pi/4})\,e^{i\pi/4}dx;$

forts

(3) $\int_0^R e^{ix^2}dx=\frac{1+i}{\sqrt2}\int_0^R e^{-x^2}dx-\int_0^{\pi/4} e^{iR^2e^{2i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta$

$\Rightarrow \int_0^\infty e^{ix^2}dx=\frac{1+i}{\sqrt2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx-\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi/4} iRe^{iR^2e^{2i\theta}+i\theta}d\theta$

(4) $\left|\int_0^{\pi/4} e^{iR^2e^{2i\theta}}\cdot iRe^{i\theta}d\theta\right|\le\int_0^{\pi/4} Re^{-R^2\sin 2\theta}d\theta\le$

$\le$ /Jordans lemma/ $\le\int_0^{\pi/4} Re^{-4R^2\theta/\pi}d\theta=$

$=\frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2})\xrightarrow[R\to\infty]{}0.$

(5) $\int_0^\infty e^{ix^2}dx=\int_0^\infty\cos x^2dx+i\int_0^\infty\sin x^2dx=\frac{1+i}{\sqrt2}\cdot\frac{\sqrt\pi}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{\int_0^\infty\cos x^2dx=\int_0^\infty\sin x^2dx=\sqrt{\frac{\pi}{8}}}$

Problem 6.14 (Sid. 10)

Lösning

a) $\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{e^x(1-e^{-x})}=e^{-x}\cdot(1-e^{-x})^{-1}=e^{-x}\sum_{k=0}^\infty(e^{-x})^k=$

$=\sum_{k=0}^\infty e^{-(k+1)x}=/n=k+1/=\sum_{n=1}^\infty e^{-nx}\Rightarrow$

$\int_0^\infty\frac{x}{e^x-1}dx=\int_0^\infty x\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-nx}\right)dx=\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty xe^{-nx}dx=$

$=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}.$

b) $\int_0^\infty\frac{x^3}{e^x-1}dx=\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty x^3e^{-nx}dx=\sum_{n=1}^\infty\frac{3!}{n^4}=6\cdot\frac{\pi^4}{90}=\frac{\pi^4}{15}.$

Problem 6.15 (Sid. 10)

Lösning

(1) Jag börjar med att bestämma integralen

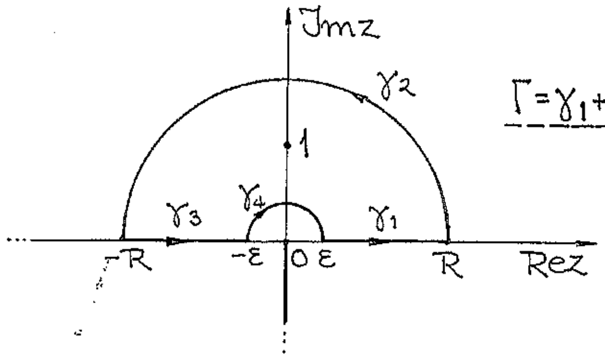
$$\mathcal{J}(a)=\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+1}dx,\ |a|<1.$$

Denna integral återfinns i Problem 6.16.

Låt D vara det komplexa planet uppskuret längs den negativa Im-axeln.

På D definieras $z^a=e^{a\log z}$, $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}$.

Jag integrerar $f(z)=\frac{z^a}{z^2+1}$ över följande kontur:



$\Gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$

f är analytisk i $\mathrm{Im}z>0$ utom vid $z=i$ (pol):

$$\because\ \operatorname*{Res}_{z=i} f(z)=\lim_{z\to i}\frac{z^a}{z+i}=\frac{e^{i\pi a/2}}{2i}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right|\leq \frac{\pi R^{a+1}}{R^2-1}\xrightarrow[R\to\infty]{}0\\ \left|\int_{\gamma_3} f(z)dz\right|\leq \frac{\pi \varepsilon^{a+1}}{1-\varepsilon^2}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0\end{array}\right]\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{\gamma_2} f(z)dz=$$

$$=2\pi i\,\frac{e^{i\pi a/2}}{2i}-\left(\int_{\gamma_2}+\int_{\gamma_4}\right)f(z)dz\Rightarrow /\varepsilon\to 0, R\to\infty/\Rightarrow$$

$$(1+(-1)^a)\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+1}dx=(e^{i\pi a}+1)\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+1}dx=\pi e^{i\pi a/2}$$

$$\Leftrightarrow (e^{i\pi a/2}+e^{-i\pi a/2})\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+1}dx=\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{\pi a}{2}\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+1}dx=\pi \Leftrightarrow \int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+1}dx=\frac{\frac{\pi}{a}}{\cos\frac{\pi a}{2}}.$$

(2) $$\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+1}dx=/x^2=t/=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^{(a-1)/2}}{1+t}dt\Rightarrow /\alpha=\frac{a-1}{2}/\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}dt=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha},\ 0<\alpha<1.$$

(3) $$\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}dt=/t=u^\beta/=\int_0^\infty \frac{u^{\alpha\beta-1}}{1+u^\beta}du=\frac{\frac{\pi}{\beta}}{\sin\frac{\pi}{\beta}},\ 1<\beta<\infty.$$

$$\beta=1/\alpha\Rightarrow \underline{\int_0^\infty \frac{1}{1+x^\alpha}dx=\frac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)},\ 1<\alpha<\infty.}$$

Problem 6.16 (Sid. 10)

Lösning

a) $$(1-e^{2\pi i\alpha})\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}x^\alpha dx=2\pi i\cdot\sum_1^n \mathrm{Res}\left(\frac{P(z)z^\alpha}{Q(z)},a_k\right),$$

där $0<\alpha<1$ och $\mathrm{grad}\,Q\geq \mathrm{grad}\,P+2$.

I vårt fall är $f(z)=\frac{z^{1/2}}{(z+1)^4}$, dvs $\alpha=\frac{1}{2}$ & $a_k=-1$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^{1/2}}{(z+1)^4},-1\right)=\frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}z^{1/2}\Big|_{z=-1}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)z^{-5/2}\Big|_{z=-1}=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot(-1)^{-5/2}=\frac{1}{16}e^{-i5\pi/2}=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot(-i)\quad \text{s.a.}$$

$$(1-(-1))\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^4}dx=2\pi i\cdot\frac{-i}{16}=\frac{\pi}{8}\Leftrightarrow\underline{\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^4}dx=\frac{\pi}{16}}.$$

b) $\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^a}=\frac{\pi/a}{\sin(\pi/a)}$, $a>1$, har härletts i Pr. 15.

Det återstår att visa formeln högst upp på denna sida, dvs

$$\forall a\in]0,1[:\ (1-e^{i2\pi a})\int_0^\infty\frac{x^aP(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum_1^n\operatorname*{Res}_{z=\alpha_k}f(z)$$

där $f(z)=z^a\cdot\frac{P(z)}{Q(z)}$, med $\underline{\operatorname{grad}Q\geq\operatorname{grad}P+2}$.

Det antas att Q saknar reella nollställen.

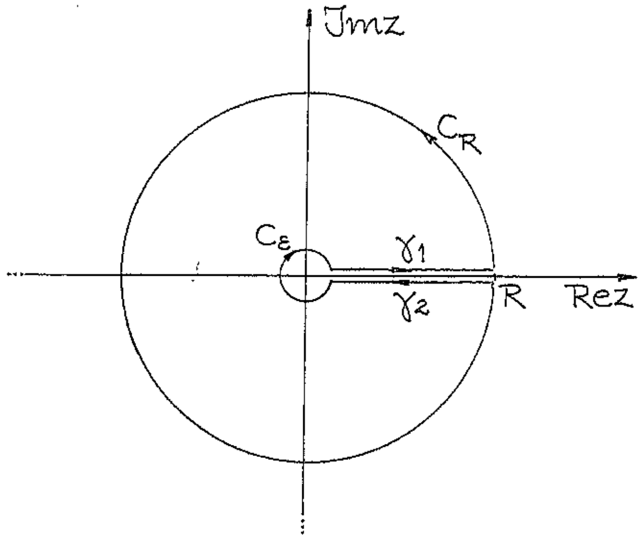
Låt oss integrera funktionen

$$f(z)=\frac{z^aP(z)}{Q(z)}$$

över konturen $\underline{\Gamma=\gamma_1+C_R+\gamma_2+C_\varepsilon}$ (se nästa sida).

$$\underline{z^a=e^{a\log z},\quad 0<\arg z<2\pi.}$$

forts



R väljs tillräckligt stort och ε så litet (så) att samtliga poler till $f(z)$ faller inom $\operatorname{Int}(\Gamma)$.

$$\oint_\Gamma f(z)dz=\left(\int_{\gamma_1}+\int_{C_R}+\int_{\gamma_2}+\int_{C_\varepsilon}\right)f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^n\operatorname{Res}(\alpha_k)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_{\gamma_1}f(z)dz+\int_{\gamma_2}f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^n\operatorname{Res}(\alpha_k)-\left(\int_{C_R}+\int_{C_\varepsilon}\right)f(z)dz$$

(1) $\int_{\gamma_1}f(z)dz=\int_0^R f(x)dx$ (gapet är försumbart).

(2) $\int_{\gamma_2}f(z)dz=\int_R^\varepsilon f(xe^{i2\pi})dx=-e^{i2\pi a}\int_\varepsilon^R f(x)dx$;

(3) $\left|\int_{C_R}f(z)dz\right|\leq\int_{C_R}|f(z)||dz|\leq\int_{C_R}|z|^a\frac{M}{|z|^2}|dz|=$

$$=/z=Re^{i\theta}/=M\int_0^{2\pi}\frac{R^{1+a}}{R^2}d\theta=2\pi MR^{a-1}\xrightarrow[R\to\infty]{}0;$$

(4) $\left|\int_{C_\varepsilon}f(z)dz\right|\leq\int_{C_\varepsilon}|f(z)||dz|\leq 2\pi M\varepsilon^a\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$;

(5) $\varepsilon\to 0 \wedge R\to\infty \Rightarrow (1-e^{2\pi a i})\int_0^\infty f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(a_k)$

Observera att $\frac{P(z)}{Q(z)}$ kan på sin höjd ha en enkelpol $z=0$ så det gäller

$$|z|^a\cdot\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|\le |z|^a\frac{M}{|z|},$$

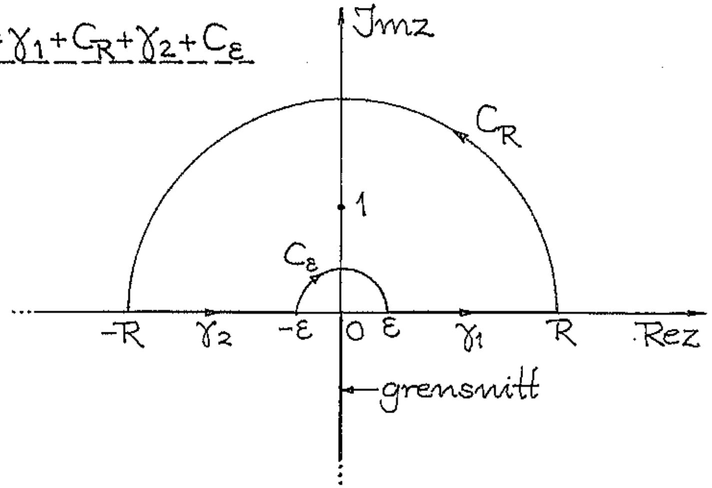
om $|z|<\varepsilon_0$, där $\varepsilon<\varepsilon_0$; integralen i (4) majoreras således av $2\pi\varepsilon M\varepsilon^{a-1}=2\pi M\varepsilon^a$.

Problem 6.17 (Sid. 10)

Lösning

Jag integrerar $f(z)=\frac{(\ln z)^2}{z^2+1}$ över följande kontur

$\Gamma=\gamma_1+C_R+\gamma_2+C_\varepsilon$



$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\frac{\log^2 i}{2i}\,;\quad (\log z = \mathcal{L}_{-\pi/2}(z))$$

$$\int_\varepsilon^R f(x)\,dx+\int_{C_R} f(z)\,dz+\int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz=$$

$$=\int_\varepsilon^R\frac{(\ln x)^2}{1+x^2}dx+\int_\varepsilon^R\frac{(\ln x+i\pi)^2}{x^2+1}dx+$$

$$+\int_{C_R} f(z)\,dz+\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz=-\frac{\pi^3}{4}\Rightarrow /R\to\infty,\ \varepsilon\to 0/\Rightarrow$$

$$2\int_0^\infty\frac{(\ln x)^2}{x^2+1}dx+2\pi i\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+1}dx-\pi^2\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{\pi^3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^\infty\frac{\ln^2 x}{x^2+1}dx+2\pi i\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+1}dx-\pi^2\cdot\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi^3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^\infty\frac{\ln^2 x}{x^2+1}dx+2\pi i\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+1}dx=\frac{\pi^3}{4}\Leftrightarrow$$

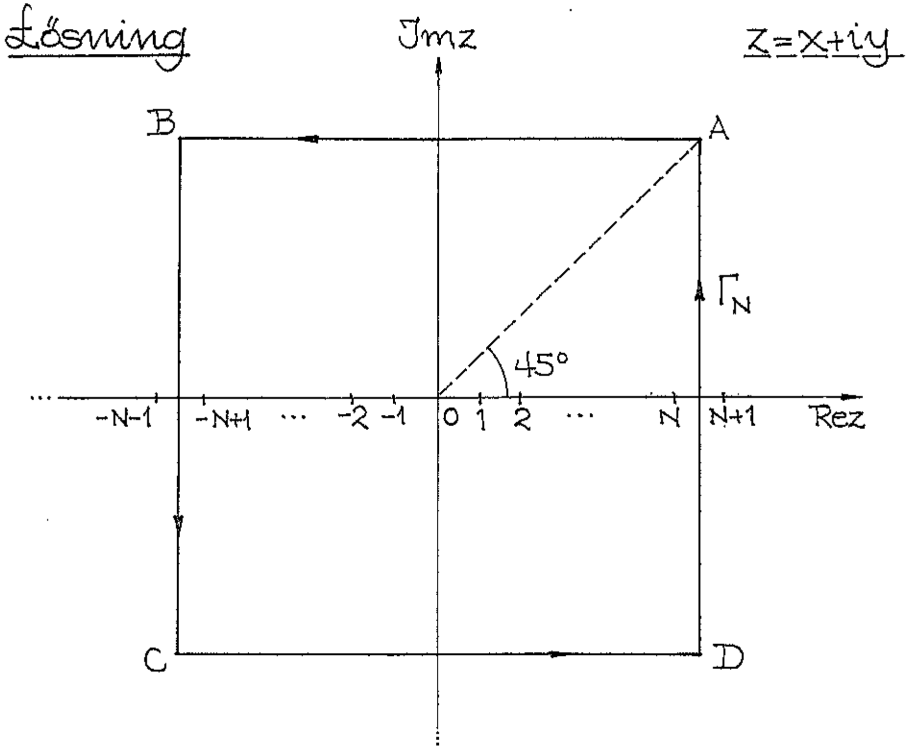
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\int_0^\infty\frac{\ln^2 x}{x^2+1}dx=\frac{\pi^3}{4}\\ 2\pi\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+1}dx=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\int_0^\infty\frac{\ln^2 x}{x^2+1}dx=\frac{\pi^3}{8}.\\ \int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+1}dx=0\end{cases}$$

Svar: a) 0; b) $\frac{\pi^3}{8}$.

Anm. Hur vet man att just $f(z)=\frac{\ln^2 z}{z^2+1}$ leder till de rätta reella integralerna? Det är samma knep som används av alla läroboksförfattare. Man kan inte gissa i sådana sammanhang.

Problem 6.18 (Sid. 10)

Lösning



$A=(N+\frac{1}{2})(1+i)$, $B=(N+\frac{1}{2})(-1+i)$, $C=(N+\frac{1}{2})(-1-i)$,

$D=(N+\frac{1}{2})(1-i)$.

Jag kommer att visa att $\forall z\in\Gamma_N: |\cot\pi z|<K$, K konstant; vi betraktar de delar av Γ s.a

$y>\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}$ resp. $y<-\frac{1}{2}$.

(1) $$y>\frac{1}{2}\Rightarrow|\cot\pi z|=\left|\frac{e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}\right|= \left|\frac{e^{i\pi x-\pi y}+e^{-i\pi x+\pi y}}{e^{i\pi x-\pi y}-e^{-i\pi x+\pi y}}\right| = \frac{|e^{i\pi x-\pi y}+e^{-i\pi x+\pi y}|}{|e^{i\pi x-\pi y}-e^{-i\pi x+\pi y}|}\le$$
$$\le\frac{|e^{i\pi x}\cdot e^{-\pi y}|+|e^{-i\pi x}\cdot e^{\pi y}|}{|e^{-i\pi x}\cdot e^{\pi y}|-|e^{i\pi x}\cdot e^{-\pi y}|}=\frac{e^{\pi y}+e^{-\pi y}}{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}=\frac{1+e^{-2\pi y}}{1-e^{-2\pi y}}\le\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}=C_1.$$

(2) $$y<-\frac{1}{2}\Rightarrow|\cot\pi z|\le\frac{|e^{i\pi x-\pi y}|+|e^{-i\pi x+\pi y}|}{|e^{i\pi x-\pi y}|-|e^{-i\pi x+\pi y}|}=\frac{e^{-\pi y}+e^{\pi y}}{e^{-\pi y}-e^{\pi y}}\le\frac{1+e^{2\pi y}}{1-e^{2\pi y}}\le\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}=C_1.$$

(3) Betrakta härnäst $z=N+\frac{1}{2}+iy$, $-\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}$;

$|\cot\pi z|=|\cot(N+\frac{1}{2}+iy)|=|\tanh\pi y|\le\tanh\frac{\pi}{2}=C_2$.

$z=-N-\frac{1}{2}+iy$, $-\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\Rightarrow|\cot\pi z|\le C_2$.

Anmärkning

Till K kan väljas det största av C_1 och C_2;

$C_1=\coth\frac{\pi}{2}$ och $C_2=\tanh\frac{\pi}{2}$; $\tanh x<\coth x\Rightarrow$

$K=\coth\frac{\pi}{2}$.

$$f(z)=\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}=\frac{\pi}{z^2}\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}=z^{-3}\frac{1+\pi^2z^2/2+O(|z|^4)}{1-\pi^2z^2/6+O(|z|^4)}=$$
$$=z^{-3}\left(1-\frac{\pi^2z^2}{z^2}+O(|z|^4)\right)\cdot\left(1+\frac{\pi^2z^2}{6}+O(|z|^4)\right)=$$
$$=\frac{1}{z^3}\left(1-\frac{\pi^2z^2}{3}+O(|z|^4)\right)=\frac{1}{z^3}-\frac{\pi^2/3}{z}+O(|z|)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=-\frac{\pi^2}{3}.$$

$n=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$ är enkelpoler till $f(z)$ med motsvarande residy $\frac{1}{n^2}$.

$$\oint_{\Gamma_n}f(z)dz=\sum_{n=-N}^{-1}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}-\frac{\pi^2}{3}=2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}-\frac{\pi^2}{3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow /N\to\infty/\Rightarrow 0=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{\pi^2}{3}\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Anm. Det återstår att visa att

$$\lim_{N\to\infty}\oint_{\Gamma_N}\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}dz=0.$$

$$\left|\oint_{\Gamma_n}f(z)dz\right|\leq\pi\frac{K}{N^2}(8N+2)\xrightarrow[N\to\infty]{}0,\text{ ty }|\Gamma_N|=8N+2.$$

Summation av vissa serier kan behandlas både inom komplex analys och framför allt inom fourieranalys. Dubbelsummation och och Cesaro-summation genomgås i reell analys.

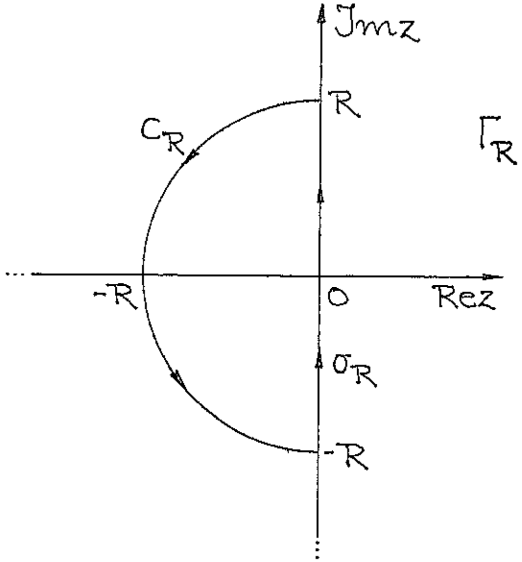
Argumentprincipen. Rouchés sats

Problem 6.19 (Sid. 10)

Lösning

$P(z)=z^4+4z^3+9z^2+9z-1$; D: $\operatorname{Re}z<0$.

Jag tillämpar argumentprincipen på följande kontur:



(1) $P(z)=z^4\left(1-\frac{4}{z}+\frac{9}{z^2}-\frac{9}{z^3}-\frac{1}{z^4}\right)\approx z^4$, för stora $|z|=R$;

$\forall z\in C_R$: $P(z)=P(Re^{i\theta})\approx R^4e^{i4\theta}$, $\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{2}$;

$$\frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}_{C_R}\arg P(z)=\frac{1}{2\pi}\cdot4\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4\pi}{2\pi}=2.$$

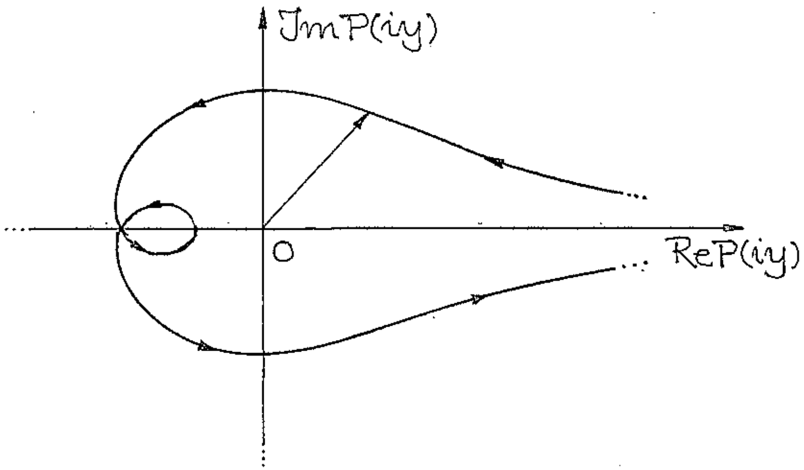
(2) $\forall z \in \sigma_R: P(z) = P(iy) = y^4 - 9y^2 - 1 + i(9y - 4y^3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} P(iy) = \left(y^2 + \frac{\sqrt{85}-9}{2}\right)\cdot\left(y^2 - \frac{9+\sqrt{85}}{2}\right) \\ \operatorname{Im} P(iy) = 9y - 4y^3 = 4y\left(\frac{9}{4} - y^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} P(iy) = \phi(y)\cdot(y-y_1)(y-y_2), \ \phi(y) > 0 \\ \operatorname{Im} P(iy) = 4y\left(\frac{3}{2} + y\right)\left(\frac{3}{2} - y\right) \end{cases}$$

$y_1 \approx -3$, $y_2 \approx 3$, s.a. $R \geq 4$.

...	$-R$	-3	$-1{,}5$	0	$1{,}5$	3	R
$\operatorname{Re} P(iy)$	+ + + 0 − − − − − − − − − − − − 0 + + +						
$\operatorname{Im} P(iy)$	+ + + + + + 0 − − 0 + + 0 − − − − − − −						



$$\frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}_{\sigma_R} \arg P(iy) = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}_{\Gamma_R} \arg P(z) =$$

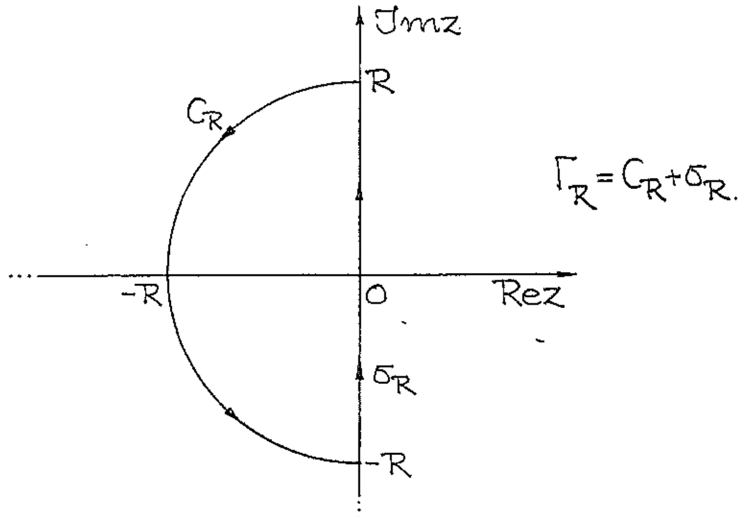
$= 2 + 1 = 3 \Rightarrow$ <u>3st nollställen</u> således.

<u>Problem 6.20</u> (Sid. 10)

<u>*Lösning*</u>

<u>$P(z) = z^4 + 3z^3 + 5z^2 + 6z + A$; $D: \operatorname{Re} z \overset{?}{\geq} 0$.</u>

Att bestämma de reella A för vilka $P(z)$ saknar nollställen i $\operatorname{Re} z \geq 0$, är detsamma som att bestämma de A för vilka samtliga nollställen (dvs alla 4) har negativ realdel. Låt oss studera variationen av argumentet längs/över följande kontur:



(1) $\frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}_{C_R} \arg P(z) = 2$ (jfr P i föreg. problem);

(2) För att samtliga nollställen ska ligga i det vänstra halvplanet krävs det att

$$\frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}_{\sigma_R}\arg P(z)=2.$$

$$P(iy)=y^4-5y^2+A+i\,(6y-3y^3)\,;$$

$$\mathrm{Im}\,P(iy)=0 \Leftrightarrow y=0 \vee y=\pm\sqrt{2}\,;$$

P saknar nollställen på σ_R om $P(0)\neq A\neq 0$ och $P(\pm i\sqrt{2})=-6+A\neq 0$, dvs om $A\neq 0, 6$.

För $\frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}_{\sigma_R}\arg P(z)=2$ krävs det 4 nollställen $(\neq 0,6)$ för $\mathrm{Re}\,P(iy)$; jämför föregående problem.

$$y^4-5y^2+A=0 \Leftrightarrow y^2=\frac{5\pm\sqrt{25-4A}}{2} \underset{\sim}{\Leftrightarrow} /0<A<6/$$

$$\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{25-4A}}{2}}.$$

<u>Svar</u>: Samtliga nollställen ligger i det vänstra halvplanet om $0<A<6$.

<u>Anm.</u> För $A=0$ fås två y-nollställen; för $25-4A>0 \Leftrightarrow A<\frac{25}{4}$; $A\in\,]0,6[\,\cup\,]6,\frac{25}{4}[$ kanske!

<u>Anmärkning</u>: (Routh-Hurwitz villkor).

Antag att $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ är reella tal och sätt $a_j=0$, för $j>n$. Alla rötter till polynomet $p(z)=a_n+a_{n-1}z+\cdots+a_1z^{n-1}+z^n$, har negativ realdel omm för varje $k=1,2,\ldots,n$, är determinanten till $k\times k$-matrisen

$$M_k=\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & a_k \end{bmatrix} \in M_{k\times k}.$$

$$P(z)=A+6z+5z^2+3z^3+z^4\,;$$

$$a_1=3,\ a_2=5\ ,\ a_3=6,\ a_4=A\,.$$

$\det M_1=3$, $\det M_2=9$, $\det M_3=54-9A$, $\det M_4=$ $=9(6A-A^2)>0 \Leftrightarrow \underline{0<A<6}$.

Ovanstående villkor/kriterium bevisas i t.ex. <u>S.D. Fisher, Complex Variables, 2nd Ed. Dover.</u>

Problem 6.21 (Sid. 11)

Lösning

$P(z) = z^3+Az+1 \Rightarrow$ minst ett av nollställena är reellt. Algebrans fundamentalsats och faktorsatsen ger

$$P(z) = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) =$$

$$= z^3-(z_1+z_2+z_3)z+(z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3)z-z_1z_2z_3$$

$$= z^3+Az+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1+z_2+z_3=0 \\ z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=A \\ z_1z_2z_3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=-z_2-z_3 \\ -z_1^2+z_2z_3=A \\ z_1=\dfrac{-1}{z_2z_3} \end{cases}$$

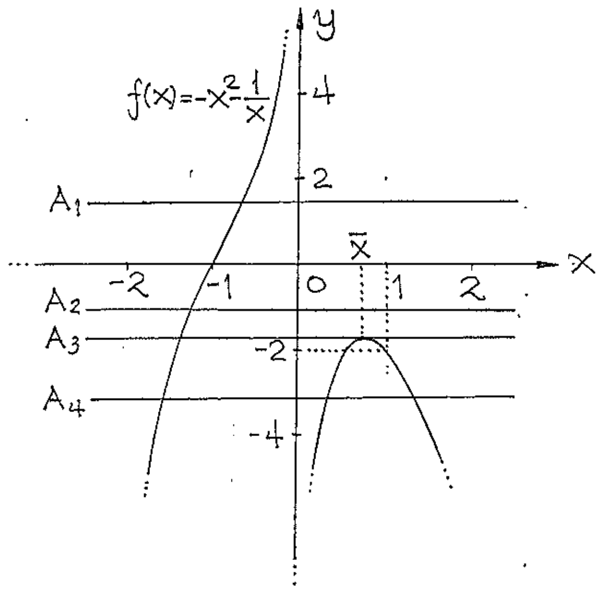
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1=-(z_2+z_3) \\ -z_1^2-\dfrac{1}{z_1}=A \end{cases}$$

Låt oss studera funktionen

$$f(x) = -x^2-\frac{1}{x}, \quad x\neq 0$$

$$f'(x) = -2x+x^{-2} \Rightarrow f''(x) = -2-2x^{-3};$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \bar{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow f''(\bar{x})=-6<0 \Rightarrow f(\bar{x})=\frac{-3}{\sqrt[3]{4}} \text{ max}$$



Jag räknar antalet reella nollställen i intervallet $J=]-1,1[$.

(1) $A>0 \Rightarrow 1$ nollställe (se A_1);

(2) $A=-\frac{3}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow 1$ nollställe (Se A_3);

(3) $A\leqslant -2 \Rightarrow 1$ nollställe (Se A_4);

(4) $-2<A<-\frac{3}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow 2$ nollställen; (alla reella).

(5) $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}<A<0 \Rightarrow 0$ nollställen (Se A_2);

På enhetsskivan är nollställefördelningen den:

2 nollställen för $-2<A<-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ och $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}<A<0$;
1 nollställe för $A>0$, $A\leq -2$ och för $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.
Inga nollställen för $A=0$.

Problem 6.22 (Sid. 11)

Lösning

a) $B=2$ och $A=1$ ger en motsägelse; ej sann implikation således.

b) Alla A är större än eller lika med 5; alla B är mindre än eller lika med 3; Alla A är alltså större än alla B; sann implikation i detta fall.

c) $A=5$ och $B=6$ ger en motsägelse; ej sann implikation.

Problemställningar enligt ovan ingår i predikatlogiken (diskret matematik).

Problem 6.23 (Sid. 11)

Lösning

Rouché-satsen bör man kunna utantill!

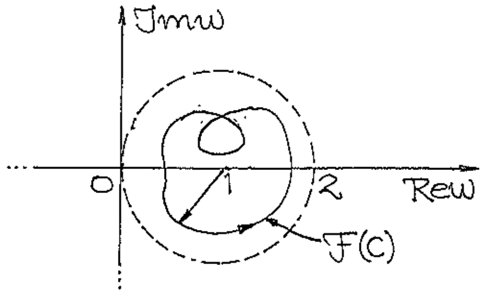
Låt $f(z)$ och $g(z)$ vara analytiska i en domän (öppen och sammanhängande mängd $\subseteq \mathbb{C}$). Om C är en enkel, sluten och styckvis glatt kurva i D som omfattar i sitt inre ($\mathrm{Int}(C)$) endast punkter av D och om $|g(z)|<|f(z)|$ på C, så är summorna av multiplicitetena till nollställena till $f(z)+g(z)$ och $f(z)$ i det inre av C desamma (lika alltså).

Bevis (av Rouché-satsen).

Det faktum att $|g(z)|<|f(z)|$ på C medför att $|f(z)|\neq 0$ och $|f(z)+g(z)|\geq |f(z)|-|g(z)|>0$ på C. Funktionen $F(z)=(f(z)+g(z))/f(z)$ saknar således poler på $\overset{\circ}{C}$. Argumentprincipen ger för $F(z)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\mathcal{F}'(z)}{\mathcal{F}(z)}dz = \mathcal{N}(\mathcal{F}) - \mathcal{P}(\mathcal{F})$$

och varje led kan tolkas som antalet gånger $\mathcal{F}(C) = \{\mathcal{F}(z) : z \in C\}$ omsluter origo $w=0$. Men på C är $|\mathcal{F}(z)-1| = \frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1 \Rightarrow \mathcal{F}(C)$ omsluter inte origo (se figur nedan)



och följaktligen är $\mathcal{N}(\mathcal{F}) = \mathcal{P}(\mathcal{F})$. Men nollställena till $\mathcal{F}$ sammanfaller men nollställena till $f+g$ och polerna till $\mathcal{F}$ sammanfaller med nollställena till f så följer att summan av multiplicéteterna till f och $f+g$ vara densamma. Observera att satsen säger inte att f och $f+g$ har samma nollställen.

a) $\underline{P(z) = z^4 + 5z^3 - 3z - 13;\quad D: |z| < 2.}$

$f(z) = 5z^3 \Rightarrow |f(z)| = 5|z|^3 = 40$, på $|z| = 2$;

$g(z) = z^4 - 3z - 13 \Rightarrow |g(z)| \leq |z|^4 + 3|z| + 13 = 35$ på $|z| = 2$;

$|g(z)| < |f(z)|$ så $P(z)$ och $5z^3$ har samma antal nollställen i $D: |z| < 2$.

b) $\underline{P(z) = z^3 - iz^2 + (2+i)z + (3-4i);\ D: |z| < 1}$

$g(z) = z^3 - iz^2 + (2+i)z \Rightarrow |g(z)| \leq |z|^3 + |z|^2 + \sqrt{5}|z| \Rightarrow$

$\Rightarrow /|z| = 1/ \Rightarrow |g(z)| < 2 + \sqrt{5}$;

$g(z) = 3 + 4i \Rightarrow |g(z)| = 5 \Rightarrow \forall z \in \partial D: |g(z)| < |f(z)|$

$\Rightarrow \underline{\mathcal{N}(f+g) = \mathcal{N}(g) = 0}$, för $|z| < 1$.

c) $\underline{P(z) = z^5 + 10z - 1;\quad D: 1 < |z| < 2}$

(1) $|z| = 1$: $\left.\begin{array}{l} g(z) = z^5 - 1 \Rightarrow |g(z)| \leq |z|^5 + 1 = 2 \\ f(z) = 10z \Rightarrow |f(z)| = 10|z| = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |g(z)| < |f(z)| \Rightarrow \mathcal{N}(f+g) = \mathcal{N}(f) = 1$ i $|z| < 1$;

(2) $|z| = 2$: $g(z) = 10z - 1 \Rightarrow |g(z)| \leq 10|z| + 1 = 21$

$f(z) = |z|^5 = 2^5 = 32 > |g(z)| \Rightarrow \mathcal{N}(f+g) = \mathcal{N}(f) = 5$

i $|z|<2 \Rightarrow P(z)=f(z)+g(z)$ har $5-1=4$ nollställen i ringen D.

d) $\underline{P(z)=z^4+iz^2+3z+1\ ;\ D: |z|>1}$

$$\left.\begin{array}{l} f(z)=3z+1 \Rightarrow /|z|=1/ \Rightarrow |f(z)| \leq 3|z|+1=4 \\ g(z)=z^4+iz^2 \Rightarrow |g(z)| \leq |z|^4+|z|^2=2<|f(z)| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow N(f+g)=N(f)=1$ i $|z|<1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\underline{P(z) \text{ har 3 nollställen i D.}}$

e) $\underline{P(z)=z^4+z^2+3z+1,\ \ D: |z|<1.}$

$$\left.\begin{array}{l} f(z)=3z+1 \Rightarrow /|z|=1/ \Rightarrow |f(z)|<3|z|+1=4 \\ g(z)=z^4+z^2 \Rightarrow /|z|=1/ \Rightarrow |g(z)| \leq |z|^4+|z|^2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |g(z)|<|f(z)|$ för $|z|=1 \Rightarrow N(f+g)=N(g)=1$

i $|z|<1 \Rightarrow P(z)$ har 1 nollställe i D.

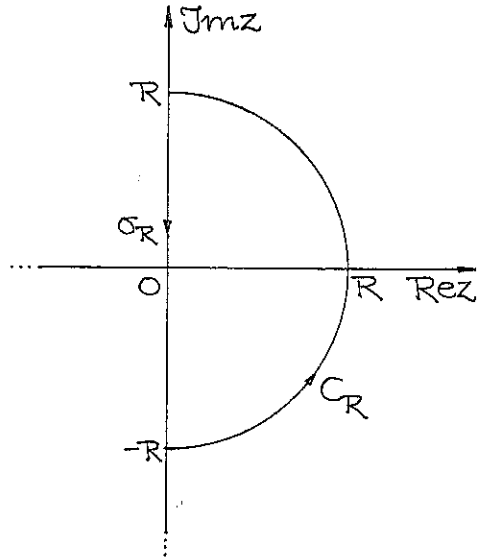
Jämför deluppgiften d) ovan.

Problem 6.24 (Sid. 11)

Lösning

Se nästföljande sida.

a) $\underline{P(z)=z^4-z^3+13z^2-z+36}\ ;\ D: \begin{cases} \operatorname{Re} z>0 \\ \operatorname{Im} z>0 \end{cases}$



För stora R är $P(z) \approx z^4$ s.a. $\frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}_{C_R} \arg P(z)=$

$$=\frac{1}{2\pi} \cdot 4\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{4\pi}{2\pi}=2\ ;$$

$$P(iy)=y^4-13y^2+36+i(y^3-y) \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} P(iy)=y^4-13y^2+36 \\ \operatorname{Im} P(iy)=y^3-y \end{cases} ;$$

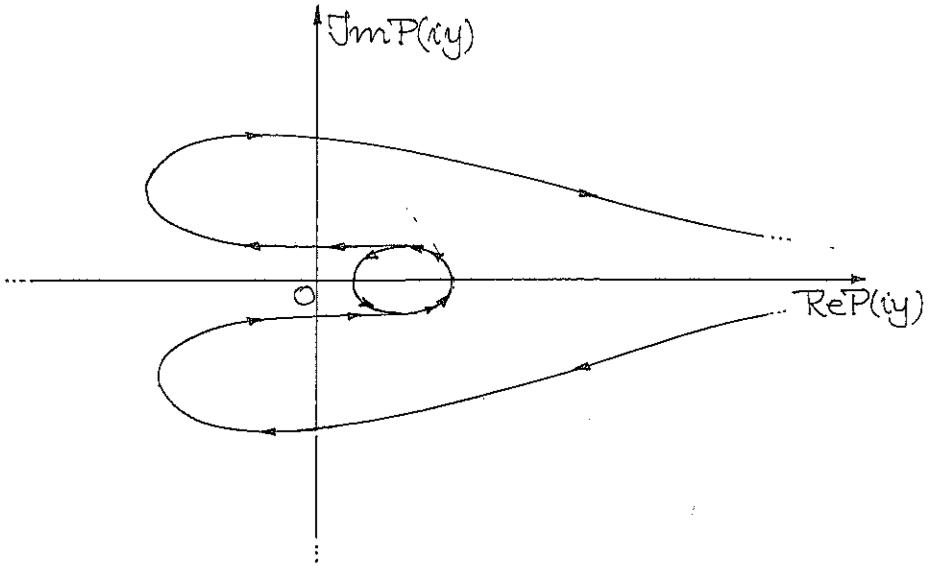
Ekvationen $P(iy)=0$ saknar reella lösningar;

$\operatorname{Re} P(iy)=0 \Rightarrow y^4-13y^2+36=(y^2-4)(y^2-9)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{y=\pm 2, \pm 3}\ ;$

$\operatorname{Im} P(iy)=0 \Leftrightarrow y^3-y=0 \Leftrightarrow \underline{y=0, \pm 1}$; forts.

		-3		-2		-1		0		1		2		3	
$\mathrm{Re}\,P(iy)$	+	0	−	0	+	+	+	+	+	+	+	0	−	0	+
$\mathrm{Im}\,P(iy)$	−	−	−	−	−	0	+	0	−	0	+	+	+	+	+



$\frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}_{\sigma_R} \arg P(z) = 0$, ty konturen omsluter ej origo, och vi får slutligen

$$\frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}_{\Gamma_R} \arg P(z) = 2$$

dvs P har två nollställen i det högra halvplanet, ett i varje kvadrant, ty koefficienterna är reella. Svaret är 1.

<u>Anm.</u> Se Övning 1.2:17 (sid. 13) i boken.

7. Konform avbildning

<u>Problem 7.1</u> (Sid. 11)

<u>Lösning</u>

(1) Antag att f inte är konstant och att den är analytisk i $z=z_0$. Om $f'(z_0)=0$ kallas z_0 en kritisk punkt till transformationen $w=f(z)$.

$$f(z) = 5z^8 - 8iz^5 \Rightarrow f'(z) = 40z^7 - 40iz^4 = 40z^4(z^3 - i) =$$

$$= 40z^4(z^3 + i^3) = 40z^4(z+i)(z^2 - iz - 1) =$$

$$= 40z^4(z+i)\left(z - \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(z + \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right);$$

Kritiska är $z = 0, -i, \frac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$;

(2) Det kan visas att om $z=z_0$ är en kritisk punkt av en avbildning $w=f(z)$, dvs om $f'(z_0)=0$, så existerar ett heltal $m \geq 2$ s.a. vinkeln mellan två glatta kurvor genom z_0 multipliceras med m under transfor-

mationen. Heltalem m är det minsta positiva heltalet s.a. $f^{(m)}(z_0)\neq 0$.

$$f(z)=5z^8-8iz^5;$$
$$f'(z)=40z^7-40iz^4;$$
$$f''(z)=280z^6-160iz^3;$$
$$f'''(z)=1680z^5-480iz^2;$$
$$f^{(4)}(z)=8400z^4-960iz;$$
$$f^{(5)}(z)=33600z^3-960i; \quad \text{osv.}$$

$f''(0)=f'''(0)=f^{(4)}(0)=0,\ f^{(5)}(0)\neq 0$;

$f''(-i)=280(-i)^6+160(-i)^3=-280+160i$;

$f''(\frac{\sqrt{3}+i}{2})=f''(\frac{\pi}{6})=-280-160i\cdot i=-280+160=-120$;

$f''(\frac{-\sqrt{3}+i}{2})=280(e^{i5\pi/6})^6-160i(e^{i5\pi/6})^3=$

$$=280e^{i5\pi}-160ie^{i5\pi/2}=-280+160=-120.$$

Resultat: Kritiska är punkterna $0, \frac{\pm\sqrt{3}+i}{2}, -i$

0 femdubblar vinkeln; $\frac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$ och $-i$ fördubblar vinkeln; f.ö. se ovan.

Problem 7.2 (Sid. 11)

Lösning

Låt C vara en cirkel i $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Två p:kr z och z^* säges vara konjugerade map C om, för någon avbildning T, som avbildar C på reella axeln, gäller $\overline{Tz}=Tz^*$. Med Tz menas $T(z)$ (jfr $f(z)$).

Om Γ är en cirkel genom ∞, alltså en linje, fås z^* genom en vanlig spegling i Γ. Låt nämligen a och b, $a\neq b$, vara godtyckliga på linjen. Genom $Tz=\frac{z-a}{z-b}$ avbildas Γ på den reella axeln, varför z och z^* är konjugerade map Γ om och endast om

$$\frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{z}-\bar{b}}=\frac{z^*-a}{z^*-b}.$$

Härav ser vi, att $|z-a|=|z^*-a|$, och eftersom a var en godtycklig punkt på Γ ligger z

och z^* symmetriskt i förhållandet till linjen, dvs z^* är spegelbilden av z i linjen

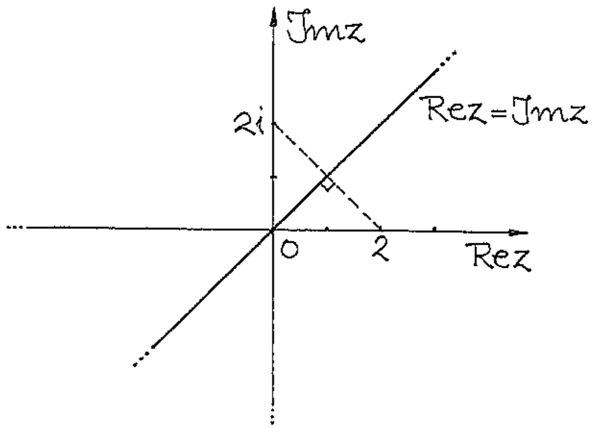
a) $\underline{\mathrm{Re}z = \mathrm{Im}z} \Leftrightarrow y = x \wedge z = x+iy$;

$Tz = e^{-i\pi/4}z$ avbilda linjen $\mathrm{Re}z = \mathrm{Im}z$ på x-axeln (Re-axeln), dvs.

$$\overline{Tz} = Tz^* \Rightarrow \overline{e^{-i\pi/4}\cdot 2i} = e^{-i\pi/4}z^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{i\pi/4}(-2i) = e^{-i\pi/4}z^* \Leftrightarrow z^* = e^{i\pi/2}(-2i)$$

$$\Leftrightarrow z^* = i\cdot(-2i) = 2$$ (Se figuren nedan).



Anm. Jag kommer här att visa ett sätt att finna den konjugerade till z map en cirkel C. Antag att C är cirkeln $|z-a| = r$.

Transformationen $w = z-a$ överför C på cirkeln $|w| = r$. z och z^* är konjugerade (el. spegelbilder) map Γ om och endast om w och w^* är konjugerade map. $C': |w| = r$. Avbildningen $Tw = i\,\frac{w-r}{w+r}$ överför C' på den reella axeln. w och w^* är konjugerade med avseende på C' om $\overline{Tw} = Tw^*$, dvs om

$$\overline{w}w^* = r^2 \Leftrightarrow (\bar{z}-\bar{a})(z^*-a) = r^2$$

b) $\mathrm{Re}z = 0 \Rightarrow Tz = \frac{z-3i}{z+i} \Rightarrow \overline{\left(\frac{2i-3i}{2i+i}\right)} = \frac{z^*-3i}{z^*+i} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} = \frac{z^*-3i}{z^*+i} \Leftrightarrow -(z^*+i) = 3(z^*-3i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -z^*-i = 3z^*-9i \Leftrightarrow 4z^* = 8i \Leftrightarrow z^* = \underline{2i}.$$

c) $|z| = 1 \Rightarrow \overline{2i}\cdot z^* = 1 \Leftrightarrow -2iz^* = 1 \Leftrightarrow 2z^* = i \Leftrightarrow z^* = \underline{\frac{i}{2}}$.

d) $|z| = 2 \Rightarrow \overline{2i}\,z^* = 4 = \overline{2i}\cdot 2i \Leftrightarrow z^* = \underline{2i}$.

e) $|z| = 6 \Rightarrow \overline{2i}\,z^* = 36 = 3\cdot\overline{2i}\cdot 6i \Leftrightarrow z^* = \underline{18i}$.

f) $|z-2i| = 1 \Rightarrow \overline{(2i-2i)}(z^*-2i) = 1 \Leftrightarrow \underbrace{0\cdot(z^*-2i) = 1}_{z^*\in\hat{\mathbb{C}}} \Leftrightarrow z^* = \underline{\infty}$.

g) $|z-1|=1 \Rightarrow \overline{(2i-1)}(z^*-1)=1 \Leftrightarrow -(1+2i)(z^*-1)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1+2i)(1-2i)(z^*-1)=-1+2i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5(z^*-1)=-1+2i \Leftrightarrow z^*-1=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^*=\underline{\frac{4}{5}+\frac{2}{5}i}.$

Problem 7.3 (Sid. 11)

Lösning

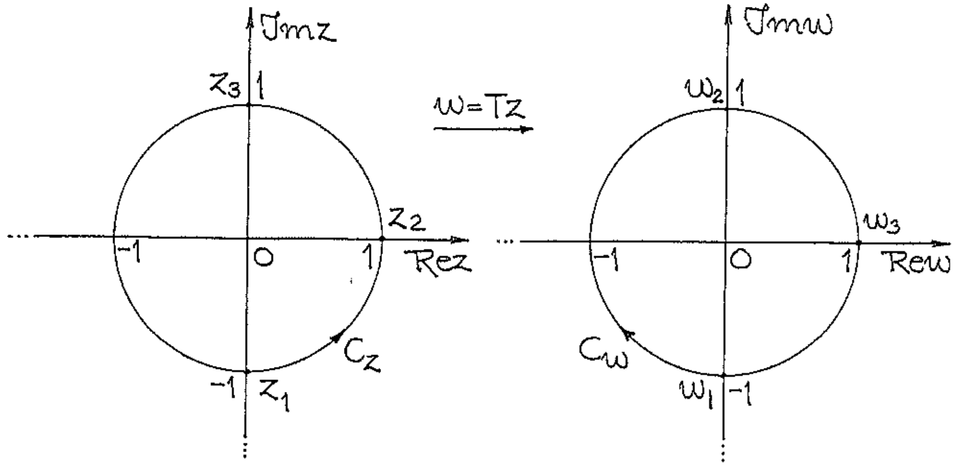
$\underline{z_1=-i,\ z_2=1,\ z_3=i}$; $\underline{w_1=-i,\ w_2=i,\ w_3=1.}$

a) $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1 \Rightarrow z_1, z_2, z_3$ ligger på C_z;

$|w_1|=|w_2|=|w_3|=1 \Rightarrow w_1, w_2, w_3$ ligger på C_w;

Om (z_1,z_2,z_3) och (w_1,w_2,w_3) är två godtyckliga tripplar av skilda punkter i $\hat{C}$, så finns en och endast en Möbiustransformation T som överför z_k på w_k, dvs $Tz_k=w_k$, $k=1,2,3$. Man skriver här symboliskt $T(C_z)=C_w$.

b) Bättre att tillgripa geometriska medel:



C_w genomlöps moturs, enligt figuren ovan.

c) $|z|<1 \Leftrightarrow |w|>1$. Läs sid. 398-399 i boken.

Problem 7.4 (Sid. 11)

Lösning

$w=\frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow w(z+1)=z-1 \Leftrightarrow wz+w=z-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z(w-1)=-(1+w) \Leftrightarrow z=\frac{1+w}{1-w}$;

a) $z=x \Rightarrow w=\frac{x-1}{x-1}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$ Re-axeln avbildas på Re-axeln.

b) Den imaginära axeln avbildas ortogonalt mot Re-axeln, dvs på en cirkel;

z rent imaginärt $\Leftrightarrow |z-1|=|z+1| \Leftrightarrow \underline{|w|=1}.$

c) $|z|=1 \Leftrightarrow |1-w|=|1+w| \Leftrightarrow |w-1|=|w+1| \Leftrightarrow \underline{\operatorname{Re} w=0}.$

d) $\underline{|z|=2} \Leftrightarrow \left|\frac{1+w}{1-w}\right|=2 \Leftrightarrow |1+w|=2|1-w| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overline{(w+1)}(w+1)=4\overline{(w-1)}(w-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\overline{w}+1)(w+1)=4(\overline{w}-1)(w-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w\overline{w}+w+\overline{w}+1=4(w\overline{w}-w-\overline{w}+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3w\overline{w}-5(w+\overline{w})=-3 \Leftrightarrow w\overline{w}-\frac{5}{3}(w+\overline{w})=-1$$

$$\Leftrightarrow (\overline{w}-\tfrac{5}{3})(w-\tfrac{5}{3})=-1+\frac{25}{9}=\frac{16}{9}=(\tfrac{4}{3})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{(w-\tfrac{5}{3})}(w-\tfrac{5}{3})=|w-\tfrac{5}{3}|^2=(\tfrac{4}{3})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{|w-\tfrac{5}{3}|=\tfrac{4}{3}}.$$

e) $z=\frac{1+w}{1-w} \Rightarrow z-i=\frac{1+w}{1-w}-i=\frac{1-i+(1+i)w}{1-w} \Rightarrow |z-i|=$

$$=\left|\frac{(1+i)(-i+w)}{1-w}\right|=\sqrt{2}\left|\frac{w-i}{w-1}\right| \overset{!}{=} 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |w-1|=\sqrt{2}|w-i| \Leftrightarrow |w-1|^2=2|w-i|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{(w-1)}(w-1)=2\overline{(w-i)}(w-i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\overline{w}-1)(w-1)=2(\overline{w}+i)(w-i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{w}w-\overline{w}-w+1=2(\overline{w}w+iw-i\overline{w}+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{w}w+(1+2i)w+(1-2i)\overline{w}+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\overline{w}+1+2i)(w+1-2i)+5=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{(w+1-2i)}(w+1-2i)=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |w+1-2i|^2=4 \Leftrightarrow \underline{|w+1-2i|=2}.$$

Problem 7.5 (Sid. 11)

Lösning

$$\underline{(z,z_1,z_2,z_3)=(w,w_1,w_2,w_3)}$$

a) $\underline{z_1=-1,\ z_2=1,\ z_3=2}$; $\underline{w_1=0,\ w_2=-1,\ w_3=-3}$

$$(z,-1,1,2)=(w,0,-1,-3) \Leftrightarrow \frac{(z+1)(1-2)}{(z-2)(1+1)}=\frac{(w-0)(-1+3)}{(w+3)(-1-0)}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\frac{z+1}{z-2}=-2\frac{w}{w+3} \Leftrightarrow \frac{w+3}{w}=4\frac{z-2}{z+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{3}{w}=\frac{4z-8}{z+1} \Leftrightarrow \frac{3}{w}=\frac{4z-8}{z+1}-1=\frac{3z-9}{z+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{w}=\frac{z-3}{z+1} \Leftrightarrow w=\underline{f(z)=\frac{z+1}{z-3}}.$$

b) $\underline{z_1=i,\ z_2=0,\ z_3=-1}$; $\underline{w_1=-i,\ w_2=0,\ w_3=+\infty}.$

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d};\ f(0)=0 \Rightarrow \frac{b}{d}=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow f(z)=\frac{az}{cz+d};$$

$$f(-1)=\infty \Rightarrow c=d \Rightarrow f(z)=\frac{az}{c(z+1)};\ f(i)=-i \Rightarrow \frac{a}{c}\frac{1}{1+i}=-1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{c} = -(1+i) \Rightarrow \underline{f(z) = -(1+i)\frac{z}{z+1}}.$$

<u>Annan lösning</u>

$$(z,i,0,-1)=(w,-i,0,\infty) \Leftrightarrow \frac{(z-i)(0+1)}{(z+1)(0-i)} = \frac{(w+i)(0-\cancel{\infty})}{(w-\cancel{\infty})(0+i)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{w+i}{w} = i\,\frac{z-i}{z+1} \Leftrightarrow \underline{w = -(1+i)\frac{z}{z+1}}.$$

c) i och $-i$ är spegelpunkter i Re-axeln; 2 och $-\frac{1}{2}$ är inte spegelbilder i enhetscirkeln; det finns således ingen Möbiustransformation som överför realaxeln till enhetscirkeln. (Se Sats 6 på sidan 400).

d) 0 och ∞ är spegelpunkter i $|z|=1$ så $f(0)=$ $=2+2i \Rightarrow f(\infty)=2-2i$, ty $2\pm 2i$ speglar i Re-axeln i w planet.

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow \frac{b}{d} = 2+2i \wedge \frac{a}{c} = 2-2i \Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{(2-2i)cz+(2+2i)d}{cz+d};$$

$$f(i)=\lambda \Rightarrow \frac{(2-2i)ic+(2+2i)d}{ci+d} = (2+2i)\frac{c+d}{ci+d} = \lambda$$

$$\Leftrightarrow (2+2i)\frac{(c/d)+1}{(c/d)i+1} = \lambda \Leftrightarrow /c/d = x/ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2+2i)(x+1) = \lambda(ix+1) \Leftrightarrow /\lambda\in\mathbb{R}/ \Leftrightarrow$$

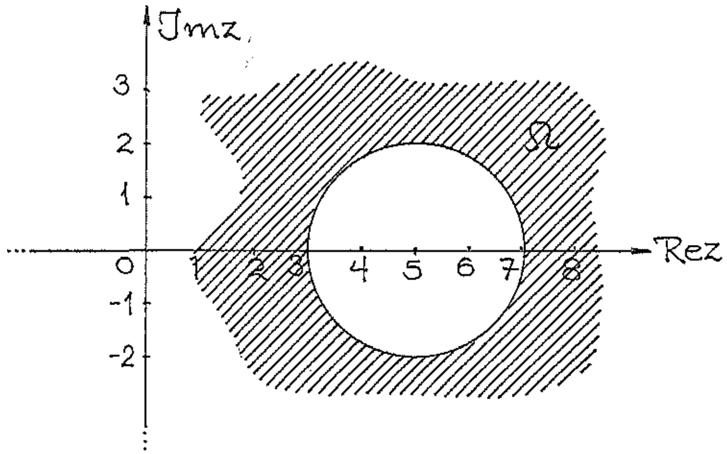
$$\Leftrightarrow (2+2i-i\lambda)x = \lambda-2-2i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\lambda-2-2i}{2+i(2-\lambda)} \Rightarrow /\lambda=2/ \Rightarrow d=ic \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{(2-2i)cz+(2+2i)ic}{cz+ic} = \frac{(2-2i)z-2+2i}{z+i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{f(z) = (2-2i)\frac{z-1}{z+i}}.$$

e)



Avbildningen $\zeta = k\frac{z-7}{z-4}$, $k>0$, överför Ω på det högra halvplanet $\mathrm{Re}\,\zeta \geq 0$; avbildningen $w = l\frac{\zeta-1}{\zeta+1}$, $|l|=1$, överför detta område till det inre av enhetscirkeln $|w|<1$, enligt följande:

$$w = f(z) = l \cdot \frac{k(z-7)-(z-3)}{k(z-7)+(z-3)} = l \cdot \frac{(k-1)z+3-7k}{(k+1)z-3-7k};$$

$$f(1)=0 \Rightarrow l \cdot \frac{-6k+2}{-6k-2} = 0 \Leftrightarrow -6k+2=0 \Leftrightarrow k=\frac{1}{3};$$

$$f(z) = l \cdot \frac{-2z+2}{4z-16} = -\frac{l}{2}\,\frac{z-1}{z-4};\quad 3 \mapsto \lambda \text{ ger alla.}$$

Problem 7.6 (Sid. 11)

Lösning

$$f(z) = -(1+i)\frac{z}{z+1}$$

(1) $$w = -(1+i)\frac{z}{z+1} \Leftrightarrow \frac{z+1}{z} = -\frac{1+i}{w} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{z} = -\frac{1+i}{w} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{z} = -\frac{1+i}{w} - 1 = -\frac{w+1+i}{w} \Leftrightarrow z = -\frac{w}{w+1+i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+iy = -\frac{u+iv}{u+1+i(v+1)} = -\frac{(u+iv)(u+1-i(v+1))}{(u+1)^2+(v+1)^2} =$$

$$= -\frac{u(u+1)+v(v+1)+i(v(u+1)-u(v+1))}{(u+1)^2+(v+1)^2} =$$

$$= -\frac{u(u+1)+v(v+1)}{(u+1)^2+(v+1)^2} - i\,\frac{v-u}{(u+1)^2+(v+1)^2};$$

(2) $$|z|<2 \Leftrightarrow \left|\frac{w}{w+1+i}\right| < 2 \Leftrightarrow |w| < 2|w+1+i| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |w|^2 < 4|w+1+i|^2 \Leftrightarrow w\bar{w} < 4(\overline{w+1+i})(w+1+i)$$

$$\Leftrightarrow \bar{w}w < 4(\bar{w}+1-i)(w+1+i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{w}w < 4(\bar{w}w+(1-i)w+(1+i)\bar{w}+2) \Leftrightarrow$$

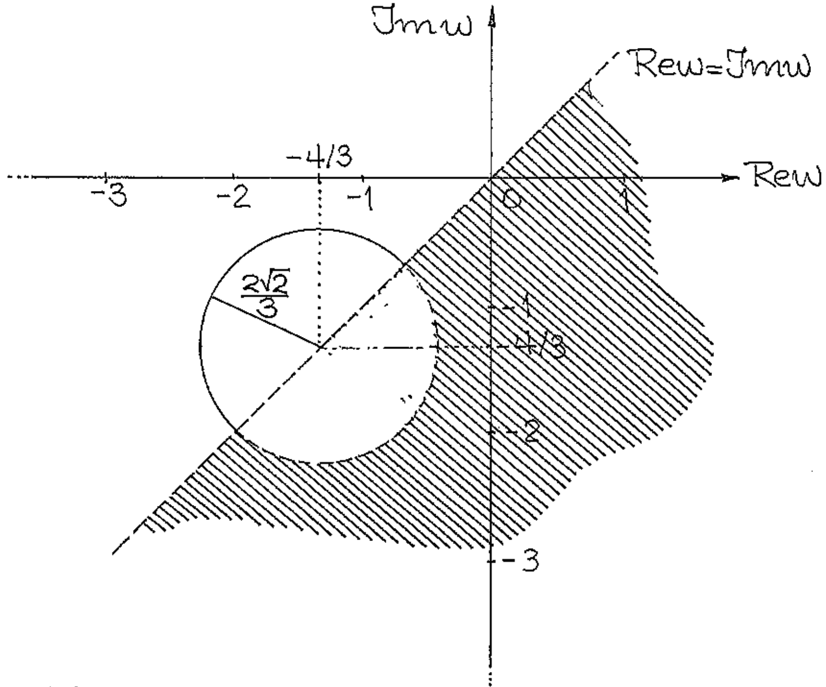
$$\Leftrightarrow 3\bar{w}w + 4(1-i)w + 4(1+i)\bar{w} + 8 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{w}w + \frac{4}{3}(1-i)w + \frac{4}{3}(1+i)\bar{w} + \frac{8}{3} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\bar{w}+\frac{4}{3}(1-i)\right)\left(w+\frac{4}{3}(1+i)\right) > \frac{32}{9} - \frac{8}{3} = \frac{8}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|w+\frac{4}{3}(1+i)\right|^2 > \frac{8}{9} \Leftrightarrow \left|w+\frac{4}{3}(1+i)\right| > \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

(3) $\operatorname{Im} z > 0 \Leftrightarrow x>0 \Leftrightarrow v-u<0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} w < \operatorname{Re} w.$



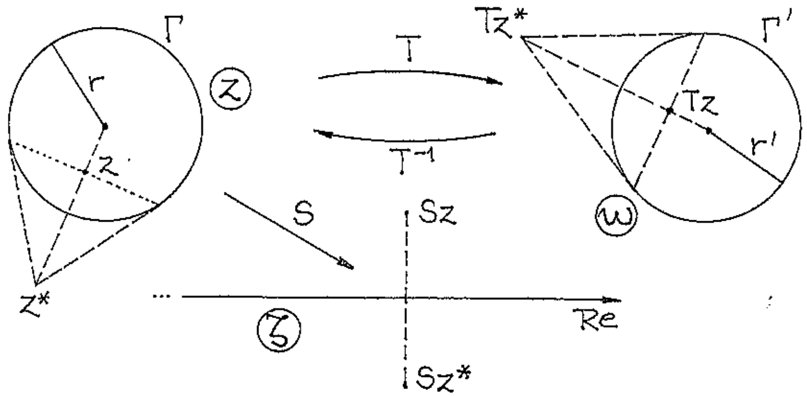
Problem 7.7 (Sid. 11)

Lösning

Jag börjar med några förberedelser:

(1) Låt T vara en Möbiustransformation, som överför cirkeln Γ i $\hat{\mathbb{C}}$ på cirkeln Γ' i $\hat{\mathbb{C}}$. Punkterna z och z^* är då konjugerade map Γ om och endast om deras bilder är konjugerade map Γ'!

Det räcker att bevisa påståendet i ena riktningen; omvändningen följer då om man betraktar T^{-1} isf T. Antag alltså att z och z^* är konjugerade map Γ.



Detta innebär att det finns Möbiusavbildning S, som överför Γ på reella axeln och för vilken $\overline{Sz} = Sz^*$. Men T förutsättes avbilda cirkeln Γ på cirkeln Γ', och alltså måste den sammansatta avbildningen $\mathcal{U} = ST^{-1}$ avbilda Γ' på reella axeln. Vidare är

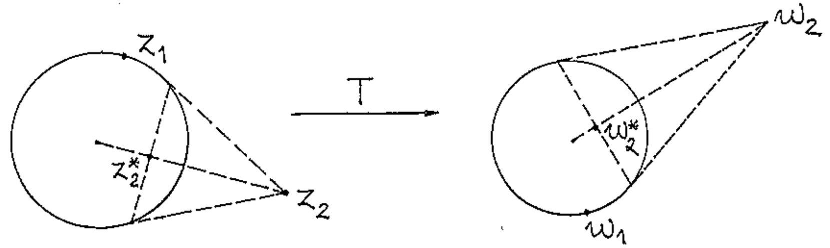
$$\overline{\mathcal{U}(Tz)} = \overline{ST^{-1}(Tz)} = \overline{Sz} \overset{!}{=} Sz^* = ST^{-1}(Tz^*) = \mathcal{U}(Tz^*)$$

Alltså är Tz och Tz^* konjugerade map Γ', varav påståendet följer.

(2) Låt z_1, z_2 och z_3 vara skilda punkter i $\hat{\mathbb{C}}$. Då finns precis en cirkel Γ i $\hat{\mathbb{C}}$ som går gm z_1 och som är sådan, att z_2 och z_3 är konjugerade med avseende på Γ. (Bevis följer). Betrakta den entydigt bestämda Möbiusavbildning T, som överför z_2, z_1 och z_3 (i denna ordning!) på $0, 1$ och ∞ och betrakta enhetscirkeln $|w| = 1$. Punkten Tz_1 tillhör denna cirkel, och punkterna $Tz_2 = 0$, $Tz_3 = \infty$

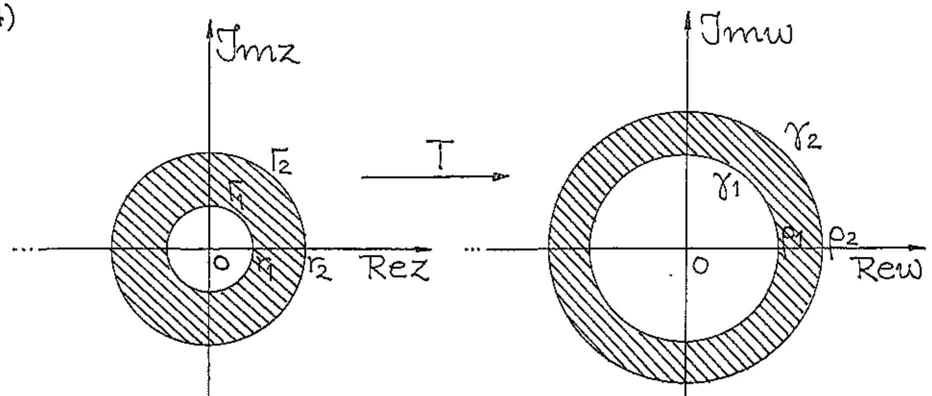
konjugerade map den. Härav följer påståendet, ty varje cirkel som uppfyller kraven i påståendet ovan, måste av T avbildas på $|w|=1$ och är därmed entydigt bestämd. Att precis en sådan cirkeln verkligen existerar ser vi omvänt därigenom, att urbilden under T till $|w|=1$ enligt (1) uppfyller de ställda kraven.

(3) Låt Γ och γ vara två cirklar i $\hat{\mathbb{C}}$, z_1 och w_1 punkter på Γ resp. γ samt z_2 och w_2 punkter utanför Γ resp. γ. Då finns precis en Möbiustransformation, som avbildar Γ på γ, z_1 på w_1 och z_2 på w_2.



Låt z_2^* och w_2^* vara de konjugerade punkterna till z_2 och w_2 map Γ resp. γ. Enligt (1) måste z_2^* avbildas på w_2^*. De tre skilda punkterna z_1, z_2 och z_2^* och deras bilder bestämmer precis en Möbiustransformation T. Denna överför Γ på någon cirkel, och föregående lemma visar att det endast finns <u>en</u> med dessa egenskaper. Alltså avbildas Γ på γ.

(4)



$$Tz = \frac{az+b}{cz+d} = w$$

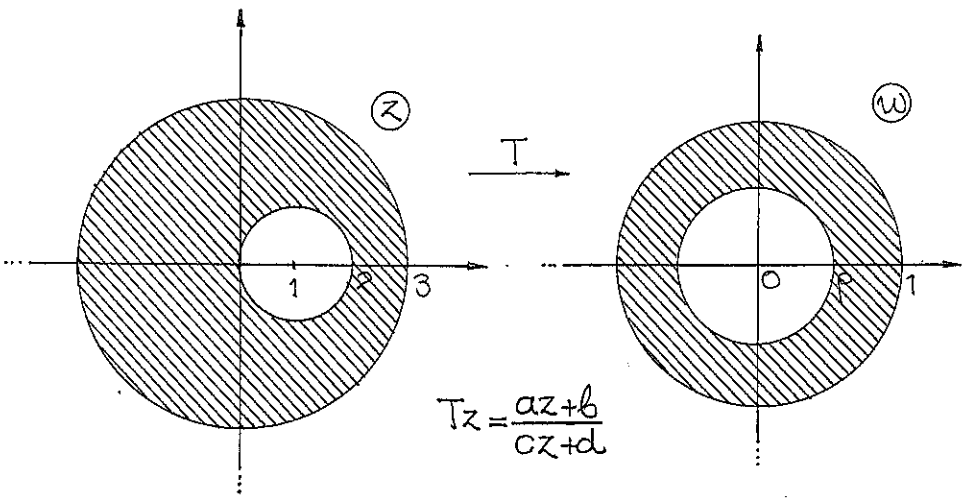
$$T(0)=0 \Leftrightarrow \frac{b}{d}=0 \Leftrightarrow b=0;\quad T(\infty)=\infty \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\infty \Leftrightarrow c=0;$$

Avbildningen är är alltså $Tz = \frac{a}{c}z$, s.a.

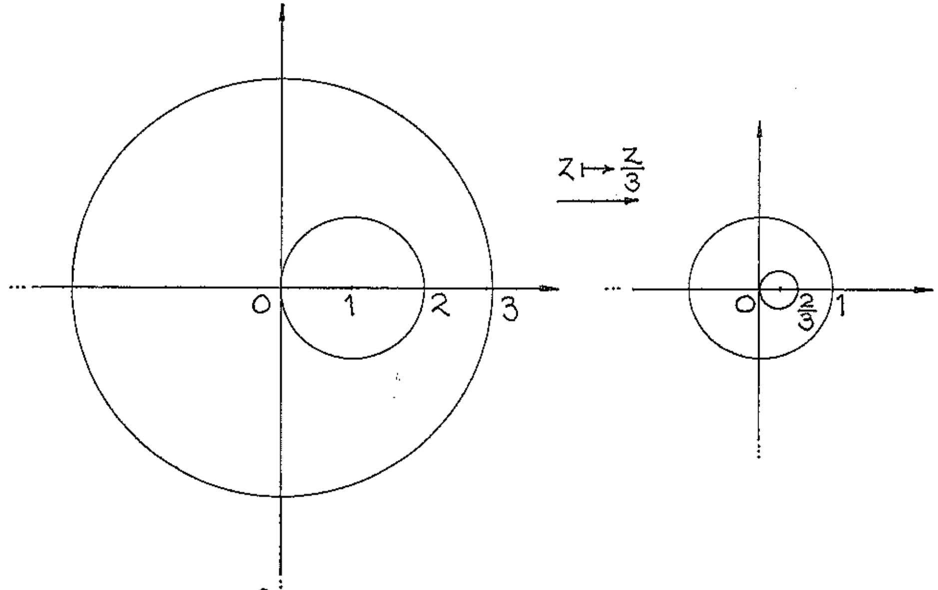
$$\begin{cases} Tr_1 = \rho_1 \\ Tr_2 = \rho_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{c}r_1 = \rho_1 \\ \frac{a}{c}r_2 = \rho_2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\frac{a}{c}r_2}{\frac{a}{c}r_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \Leftrightarrow \underline{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{r_2}{r_1}}.$$

Problem 7.8 (Sid. 11)

Lösning



Att bestämma T genom teknikerna som ges i boken blir det svårt; man skall söka sig till referenserna på sidorna 443-444. Bättre blir det dock att söka sig till App. B, och till sidan A.21, närmare bestämt. Avbildningen $z \mapsto \frac{z}{3}$ leder till följande:

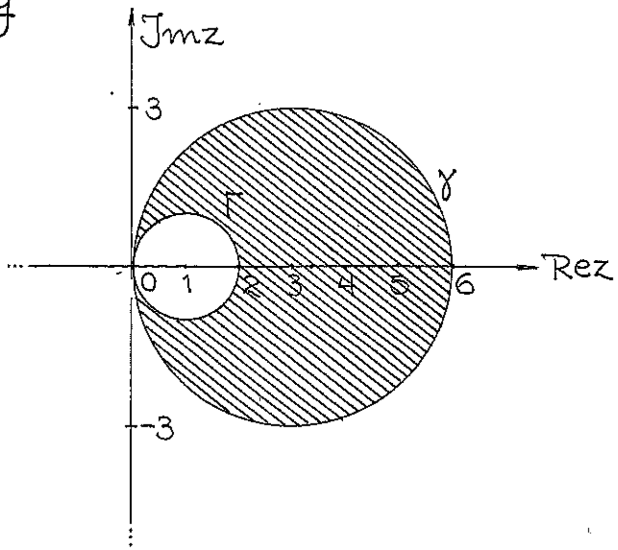


$$\rho = \frac{\frac{2}{3} - 0}{1 - 0\cdot\frac{2}{3} + \sqrt{(1-0^2)(1-4/9)}} = \frac{2/3}{1+\sqrt{5}/3} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \lambda.$$

Att använda handböcker i en tentamen borde det vara tillåtet. Handboken BETA är ett bra val. Alla ingenjörer borde skaffa sig det. Jag vill inte göra reklam för boken. den är bra, enligt min mening.

Problem 7.9 (Sid. 12)

Lösning



Avbildningen $w = f(z) = k\frac{z-2}{z}$ avbildar/överför cirkeln Γ på $\mathrm{Re}\,w = u = 0$ och cirkeln γ på $\mathrm{Re}\,w = u = \frac{2}{3}k$; $0 < \mathrm{Re}\,w < 1 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$.

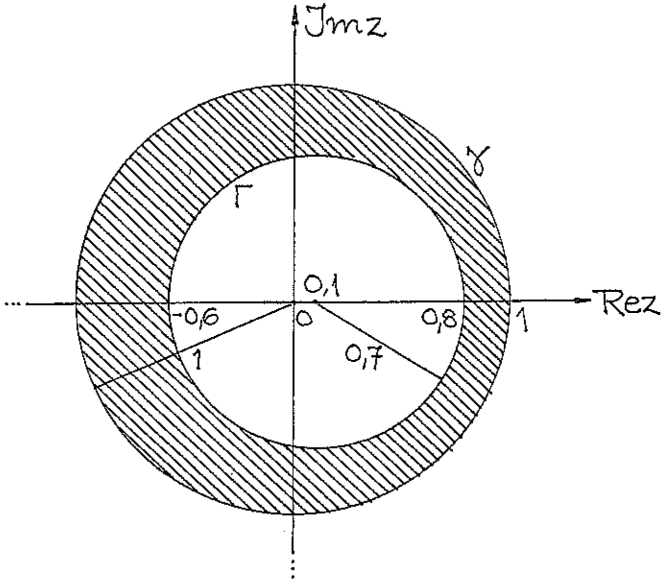
$\mathrm{Re}\,w = u = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{2x}{x^2+y^2}\right)$ är den entydiga lösningen på vårt problem.

Problem 7.10 (Sid. 12)

Lösning

Se nästa sida.

$|10z-1| = 7 \Leftrightarrow 10\left|z - \frac{1}{10}\right| = 7 \Leftrightarrow \left|z - \frac{1}{10}\right| = \frac{7}{10}$;



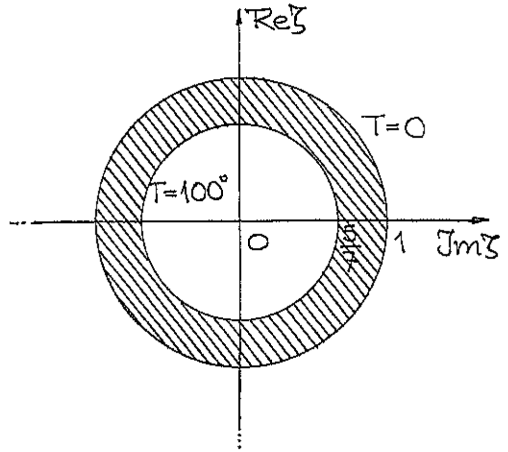
Från sidan 346 i BETA fås Möbiustransformationen $\zeta = Tz = \frac{z-a}{1-az}$, där

$$\begin{cases} a = \frac{1+bc-\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}}{b+c} \\ b = 0{,}8, \quad c = -0{,}6 \end{cases}$$

$$a = \frac{1-0{,}48-0{,}48}{0{,}8-0{,}6} = \frac{0{,}04}{0{,}20} = \frac{1}{5} \Rightarrow Tz = \frac{5z-1}{5-z} = \zeta$$

Det skuggade området ovan avbildas på en origosymmetrisk ring $r_i < |w| < 1$, där

$$r_i = \frac{1-bc-\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}}{b-c} = \frac{1+0{,}48-0{,}48}{0{,}8+0{,}6} = \frac{5}{7}.$$



$\Delta f(r)=0 \Leftrightarrow \underline{f(r)=A\ln|r|+B}$, A,B konstanter.

Med $r=|\zeta|$ fås randvärdena $f(\frac{5}{7})=100$, $f(1)=0$.

$$f(r)=\frac{100}{\ln 5/7}\ln r.$$

Resultat: $T(x,y)=\frac{100}{\ln(5/7)}\ln\left|\frac{5z-1}{z-5}\right|$, $z=x+iy$.

Anm. I planpolära koordinater fås

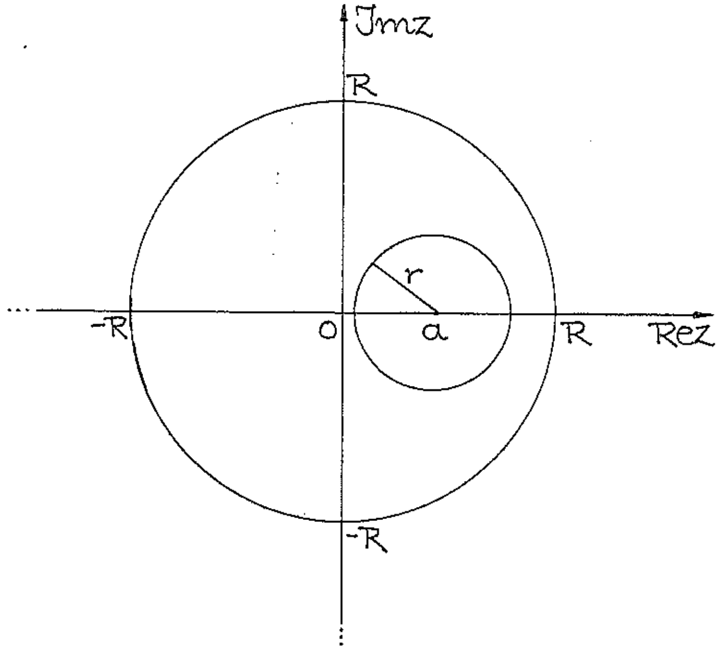
$$\Delta f=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}=0 \quad \text{(Laplace-ekv.)}$$

$$f(r,\theta)=g(r) \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dg}{dr}\right)=0 \Leftrightarrow r\frac{dg}{dr}=A \Leftrightarrow$$

$$\frac{dg}{dr}=\frac{A}{r} \Leftrightarrow \underline{g(r)=A\ln r+B,\ A,B\in\mathbb{R}}.$$

Jag kommer att härleda Möbiusavbildningen som överför en excentrisk ring till origosymmetrisk sådan. Antag att den excentriska ringen är begränsad av cirklarna

$$\underline{|z|=R,\ |z-a|=r;\ a>0,\ a+r<R.}$$



och att den koncentriska cirkelringen är begränsad av cirklarna

$$\underline{|w|=R',\ |w|=r';\ r'<R'.}$$

En viss punkt z_0 inom den inre cirkeln ska övergå till $w=0$. Om man bortser från en vridning i w-planet, kan den linjära transformationen skrivas dels under formen

$$\frac{w}{R'}=\frac{\frac{z}{R}-\frac{z_0}{R}}{1-\frac{\bar{z}_0 z}{R^2}}$$

eller

$$w=RR'\frac{z-z_0}{R^2-\bar{z}_0 z}$$

dels under formen

$$w=rr'e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{r^2-(\bar{z}_0-a)(z-a)}.$$

För att dessa båda transformationer ska vara identiska är nödvändigt och tillräckligt dels att

$$\frac{R^2}{\bar{z}_0}=\frac{r^2}{\bar{z}_0-a}+a$$

varav

$$2a\bar{z}_0=R^2-r^2+a^2\pm\sqrt{(R^2-r^2+a^2)^2-4a^2R^2}=$$

$$=R^2-r^2+a^2\pm\sqrt{(R^2-(r+a)^2)(R^2-(r-a)^2)}=$$

dels att

$$\frac{RR'}{\bar{z}_0}=\frac{rr'e^{i\alpha}}{\bar{z}_0-a}.$$

forts

Som $0<a<r$, $r+a<R$, följer att z_0 är ett reellt tal b och att $\alpha=0$ eller π. Vidare blir

$$2a(b-a-r)=R^2-(a+r)^2\pm\sqrt{(R^2-(r+a)^2)(R^2-(r-a)^2)}$$

och som $b-a$ måste vara $<r$ duger ej det övre tecknet (plustecknet). För det undre tecknet blir $b-a<r$, såsom man finner genom en enkel räkning. Vidare finner man $b-a>0$, alltså $\alpha=0$ och

$$\frac{R'}{R}=\frac{r}{R}\frac{b}{b-a}.$$

Man kan välja till exempel r' godtyckligt, varefter R' blir bestämt. Om man sätter $a+r=Rx_1$ och $a-r=Rx_2$, blir

$$(x_1+x_2)\frac{b}{R}=1+x_1x_2-\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)},$$

$$(x_1-x_2)\frac{R'}{r'}=1-x_1x_2+\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}.$$

Transformationen är

$$w=RR'\frac{z-b}{R^2-bz}.$$

Problem 7.11 (Sid. 12)

Lösning

(1) $\zeta = \frac{1}{1-z} \Leftrightarrow 1-z = \frac{1}{\zeta} \Leftrightarrow z = 1-\frac{1}{\zeta} = \frac{\zeta-1}{\zeta}$;

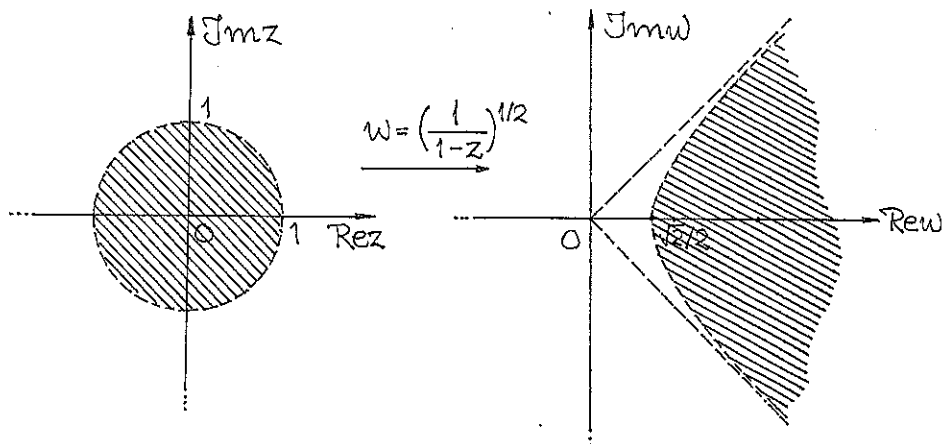
(2) $|z|<1 \Leftrightarrow \left|\frac{\zeta-1}{\zeta}\right|<1 \Leftrightarrow |\zeta-1|<|\zeta| \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,\zeta>\frac{1}{2}$;

(3) $w=\left(\frac{1}{1-z}\right)^{1/2} \wedge |z|<1 \Rightarrow \mathrm{Re}\,w>0$;

(4) $w=\left(\frac{1}{1-z}\right)^{1/2} \Leftrightarrow \frac{1}{1-z}=w^2 \Leftrightarrow 1-z=\frac{1}{w^2} \Leftrightarrow z=1-\frac{1}{w^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow /|z|<1/ \Rightarrow |w^2-1|<|w^2| \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,w^2>\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{u^2-v^2>\frac{1}{2} \wedge u>0}$.



Randen ingår inte i mängderna; deras riktning är den motsatta.

Problem 7.12 (Sid. 12)

Lösning

a) $z \mapsto -\frac{1-z}{1+z}$ avbildar den första kvadranten på den övre halva av enhetsskivan.

$z \mapsto \frac{1}{i}z$ avbildar den övre halva av enhetsskivan på den högra halvan av enhetsskivan.

$z \mapsto \frac{1}{i}\left(-\frac{1-z}{1+z}\right) = i\frac{1-z}{1+z}$ avbildar den första kvadranten på den högra halvan av enhetsskivan.

Anm. Avbildningen $w = i\frac{1-z}{1+z}$ är inte den enda som överför den första kvadranten på den högra halvan av enhetsskivan.

$f_1(z)=z^2$ överför första kvadranten på det övre halvplanet;

$f_2(z)=\frac{z-i}{z+i}$ överför i sin tur det övre halvplanet på det inre av enhetsskivan;

$f_3(z)=z^{1/2}$ avbildar enhetsskivan $|z|<1$ på den högra halvan av densamma:

$$z \mapsto z^2 \longmapsto \frac{z^2-i}{z^2+i} \longmapsto \left(\frac{z^2-i}{z^2+i}\right)^{1/2}, \text{(principalgren)}.$$

b) $z \mapsto -\frac{1-z}{1+z}$ överför den första kvadranten på den övre halvan av enhetsskivan.

$z \longmapsto z^{1/2}$ överför den övre halvan av enhetsskivan på kvarten av densamma i första kvadranten.

$z \longmapsto \frac{z-1}{z+1} \longmapsto \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2}$ överför den första kvadranten på den del av enhetsskivan som ligger i den första kvadranten.

Problem 7.13 (Sid. 12)

Lösning

Se nästföljande sida.

Problem 7.13 (Sid. 12)

Lösning

$z \longmapsto \pi z$ avbildar området (bandet) $0<\operatorname{Re} z<1$ på området $0<\operatorname{Re} z<\pi$.

$z \longmapsto iz$ avbildar området $0<\operatorname{Re} z<\pi$ på området $0<\operatorname{Im} z<\pi$.

$z \mapsto e^z$ avbildar bandet $0<\operatorname{Im} z<\pi$ på det övre halvplanet.

$z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$ avbildar det övre halvplanet på det inre av enhetsskivan.

$z \mapsto \pi z \longmapsto i\pi z \longmapsto e^{i\pi z} \longmapsto \frac{e^{i\pi z}-i}{e^{i\pi z}+i}=w$ överför "bandet" $0<\operatorname{Re} z<1$ på det inre av enhetsskivan; $\frac{1}{2} \mapsto 0$ som sig bör.

Problem 7.14 (Sid. 12)

Lösning

$g(z)=\mathcal{L}_0(z)=\ln|z|+i\arg z,\ 0\leq \arg z<2\pi.$

$$w=f(z)=\frac{1}{2i}\log\frac{i-z}{i+z}=\frac{i}{2}\log\frac{i+z}{i-z}.$$

$$z=x+iy \Rightarrow \frac{i+z}{i-z}=\frac{x+i(y+1)}{-x-i(y-1)}=-\frac{x+i(y+1)}{x+i(y-1)}=$$

$$=\frac{-(x+i(y+1))(x-i(y-1))}{(x+i(y-1))(x-i(y-1))}$$

$$=-\frac{x^2+(y+1)(y-1)+i(x(y+1)-x(y-1))}{x^2+(y-1)^2}=$$

$$=-\frac{x^2+y^2-1+i2x}{x^2+(y-1)^2};$$

(1) $\operatorname{Im}\frac{i+z}{i-z}=0 \Leftrightarrow x=0;$

(2) $\operatorname{Re}\frac{i+z}{i-z}\geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-1\leq 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} y^2\leq 1 \Leftrightarrow \underline{-1\leq y\leq 1.}$

$$f(z)=\frac{1}{2i}\mathcal{L}_0\left(\frac{i+z}{i-z}\right)-\frac{\pi}{2}.$$

(3) $\operatorname*{limes}_{z\to ib^-} f(z)=\lim_{\varepsilon\to 0} f(-\varepsilon^2+ib)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2i}\mathcal{L}_0\left(\frac{-\varepsilon^2+i(1+b)}{-\varepsilon^2+i(1-b)}\right)-\frac{\pi}{2}=$

$$=\frac{1}{2i}\mathcal{L}_0\left(\frac{1+b}{1-b}\right)-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2i}\left(\ln\frac{1+b}{1-b}+i2\pi\right)-\frac{\pi}{2}=$$

$$=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+b}{1-b}+\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+b}{1-b}+\frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname*{limes}_{z\to ib^+} f(z)=\lim_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon^2+ib)=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+b}{1-b}-\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(f(\varepsilon^2+ib)-f(-\varepsilon^2+ib)\right)=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\pi.$$

(4) $f(x)=\frac{1}{2i}\mathcal{L}_0\left(\frac{i+x}{i-x}\right)-\frac{\pi}{2} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x^2+1} \Rightarrow f(x)-f(1)=$

$$=\int_1^x\frac{d\tau}{\tau^2+1} \Leftrightarrow f(x)-\frac{\pi}{4}=\arctan x-\frac{\pi}{4} \Rightarrow f(x)=\arctan x.$$

T. **Något om transformer**

Problem T.1 (Sid. 23)

Lösning

a) $f(n)=a^n e^{in\alpha}=(ae^{i\alpha})^n \Rightarrow \mathcal{F}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{i\alpha})^n z^{-n}=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{ae^{i\alpha}}{z}\right)^n=/\left|\frac{ae^{i\alpha}}{z}\right|<1/=\frac{1}{1-e^{\alpha i}a/z}\Leftrightarrow$$

$$\mathcal{F}(z)=\frac{z}{z-ae^{i\alpha}},\ |z|>|a|.$$

b) $a^n\cos n\alpha=a^n\frac{e^{in\alpha}+e^{-in\alpha}}{2}=\frac{1}{2}(ae^{i\alpha})^n+\frac{1}{2}(ae^{i\alpha})^n$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-ae^{i\alpha}}+\frac{z}{z-ae^{-i\alpha}}\right)=$$

$$=\frac{z}{2}\,\frac{z-ae^{-i\alpha}+z-ae^{i\alpha}}{(z-ae^{i\alpha})(z-ae^{-i\alpha})}=$$

$$=\frac{z}{2}\,\frac{2z-a(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})}{z^2-az(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})+a^2}=$$

$$=\frac{z(z-a\cos\alpha)}{z^2-2az\cos\alpha+a^2},\ |z|>|a|.$$

c) $a_n\sin n\alpha=a^n\frac{e^{in\alpha}-e^{-in\alpha}}{2i}=\frac{1}{2i}\left((ae^{i\alpha})^n-(ae^{-i\alpha})^n\right)$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z-ae^{i\alpha}}-\frac{z}{z-ae^{-i\alpha}}\right)=$$

$$=\frac{z}{2i}\,\frac{z-ae^{-i\alpha}-z+ae^{i\alpha}}{(z-ae^{i\alpha})(z-ae^{-i\alpha})}=$$

$$= \frac{z\sin\alpha}{z^2-2az\cos\alpha+a^2},\ |z|>|a|.$$

Problem T.2 (Sid. 23)

Lösning

$$\mathcal{F}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} nf(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\cdot(-nz^{-n-1})(-z)$$

$$=-z\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\frac{d}{dz}z^{-n} = -z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n} = \underline{-z\mathcal{F}'(z)}.$$

a) $f(n)=a^n \Rightarrow \mathcal{F}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n = /\,\left|\frac{a}{z}\right|<1\,/ =$

$$= \frac{1}{1-a/z} \Leftrightarrow \underline{\mathcal{F}(z)=\frac{z}{z-a},\ |z|>|a|}.$$

b) $g(n)=n\cdot a^n \Leftrightarrow G(z) = -z\frac{d}{dz}\frac{z}{z-a} = \underline{\frac{az}{(z-a)^2},\ |z|>|a|}.$

c) $h(n)=n^2a^n \Leftrightarrow H(z) = -z\frac{d}{dz}\frac{az}{(z-a)^2} = \underline{\frac{az^2+a^2z}{(z-a)^3},\ |z|>|a|}$

d) $k(n)=n^3a^n = n(n^2a^n) = nh(n) \Leftrightarrow K(z) = -z\frac{d}{dz}H(z) =$

$$= -z\frac{d}{dz}\frac{az^2+a^2z}{(z-a)^3} \Leftrightarrow \underline{K(z)=\frac{az^3+4a^2z^2+a^3z}{(z-a)^4},\ \left|\frac{z}{a}\right|>1}$$

Problem T.3 (Sid. 23)

Lösning: $\quad \forall n\geq 0:\ f(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \mathcal{F}(z)z^{n-1}dz.$

a) Som C används cirkeln $|z|=2$; forts.

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^{-1}}{z-1}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\right)dz = 1-1=0.$$

Anm. $f^{(k)}(\zeta)=\frac{k!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{n+1}}dz,\ n=1,2,3,\ldots$

$\forall n\geq 1:\ f(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^{n-1}}{z-1}dz = 1^{n-1}=1;$

$\underline{(f(n))_{n=0}^{\infty} = 0,1,1,1,1,\ldots}$

b) $f(0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^{-1}}{z(z+1)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}\right)dz =$

$$= /\,C: |z|=2\,/ = 0-1+1=0;$$

$f(1)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{z(z+1)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}\right)dz = 1-1=0;$

$\forall n\geq 2:\ f(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^{n-2}}{z+1}dz = (-1)^{n-2} = (-1)^n\cdot(-1)^2 = (-1)^n;$

$\underline{(f(n))_{n=0}^{\infty} = 0,0,1,-1,1,-1,\ldots}$

c) $C: |z|=3$ är en lämplig integrationskontur.

$\forall n\geq 0:\ f(n)=\frac{1!}{2\pi i}\oint_C \frac{z^2}{(z+2)^2}z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^{n+1}}{(z+2)^2}dz =$

$$= \lim_{z\to -2}\frac{d}{dz}z^{n+1} = \underline{(n+1)(-2)^n}.$$

d) $\mathcal{F}(z)=\frac{z^2}{(z-2)(z-1)^3} = z\cdot\frac{z}{(z-2)(z-1)^3} = z\left(\frac{2}{z-2}-\frac{2}{z-1}-\frac{2}{(z-1)^2}-\frac{1}{(z-1)^3}\right)$

$$= 2\cdot\frac{z}{z-2} - 2\frac{z}{z-1} - \frac{2z}{(z-1)^2} - \frac{z}{(z-1)^3} \Leftrightarrow$$

$$f(n) = 2\cdot 2^n - 2\cdot 1^n - \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=3}\frac{2z^n}{(z-1)^2}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=3}\frac{z^n dz}{(z-1)^3}$$

$$= 2^{n+1} - 2 - 2n - \frac{1}{2}n(n-1) =$$

$$= 2^{n+1} - \frac{1}{2}(n^2 - n + 4n + 4) =$$

$$= \underline{2^{n+1} - \frac{1}{2}(n^2+3n+4)}, \quad \underline{n = 0, 1, 2, 3, \ldots}$$

e) $\lim\limits_{z\to\infty} \mathcal{F}(z) = \infty \Rightarrow$ det existerar ingen (puls-) sekvens $f(n)$ med $\mathcal{F}(z)$ till z-transform.

f) $$\mathcal{F}(z) = \frac{e^{1/z}}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n-1} = /k=n+1/ =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}z^{-k} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}$$

$$\Leftrightarrow \underline{f(0)=0} \wedge \underline{\forall n \geq 1 : f(n) = \frac{1}{(n-1)!}}.$$

g) $$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}\frac{z^{-1}}{z^3+1}dz = \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3} = \frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1z_2z_3} = 0, \text{ ty}$$

$$z^3+1 = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) = /\text{utvecklas}/ =$$

$$= z^3 - (z_1+z_2+z_3)z^2 + (z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)z - z_1z_2z_3;$$

$$z_1 = -1, \; z_2 = e^{i\pi/3} \text{ o } z_3 = e^{-i\pi/3}; \quad C: |z| = 2$$

$$\forall n \geq 1: \; f(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}\frac{z^{n-1}}{z^3+1}dz = /\text{residusatsen}/ =$$

$$= \frac{z_1^n}{3z_1^3} + \frac{z_2^n}{3z_2^3} + \frac{z_3^n}{3z_3^3} = \frac{(-1)^n}{-3} + \frac{e^{in\pi/3}}{-3} + \frac{e^{-in\pi/3}}{-3} =$$

$$= \frac{1}{3}\left((-1)^{n-1} - (e^{in\pi/3} + e^{-in\pi/3})\right) = \underline{\frac{(-1)^{n-1} - 2\cos n\pi/3}{3}}.$$

h) $$\mathcal{F}(z) = \operatorname{Log}\frac{z}{z-1} \Rightarrow \mathcal{F}'(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \Rightarrow -z\mathcal{F}'(z) = -1 + \frac{z}{z-1} =$$

$$= \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \cdots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(0) = 0 \wedge nf(n) = 1, n \geq 1 \Leftrightarrow f(n) = H(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \underline{f(0) = 0} \wedge \underline{\forall n \geq 1 : f(n) = \frac{1}{n}}.$$

i) $$\mathcal{F}(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)^{1/2} = \left(1-\frac{1}{z}\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{z^n}$$

$$\Rightarrow \underline{f(n) = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 4^{-n}\binom{2n}{n}, \; n \geq 0.}$$

<u>Anm.</u> $(2n-1)!! = 1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$

$(2n)!! = 2\cdot4\cdot6\cdots2n$

Dessa utläses $2n$-semifakultet resp. $2n-1$-semifakultet.

$(2n)!! = 2^n \cdot n!$ och $(2n-1)!! = \dfrac{(2n)!}{(2n)!!} = \dfrac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$;

$0!! = (-1)!! = 1$, enligt definition.

<u>Problem T.4</u> (Sid. 23)

<u>Lösning</u>

a) $\underline{f(n+2) - f(n+1) - 2f(n) = 0}$; $\underline{f(0) = 0, \, f(1) = 1}.$

$f(n+2)=f(n+1)+2f(n)$; $\quad f(0)=0 \wedge f(1)=1 \Rightarrow f(2)=1$;

$$f(n+k)=z^k\mathcal{F}(z)-f(0)z^k-f(1)z^{k-1}-\dots-f(k-1)z.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(n)\supset \mathcal{F}(z) \\ f(n+1)\supset z\mathcal{F}(z)-1 \\ f(n+2)\supset z^2\mathcal{F}(z)-z \end{array}\right\} \Rightarrow z^2\mathcal{F}(z)-z-(z\mathcal{F}(z)-1)-$$

$$-2\mathcal{F}(z)=0 \Leftrightarrow (z^2-z-2)\mathcal{F}(z)=z-1 \Leftrightarrow \mathcal{F}(z)=$$

$$=\frac{z-1}{(z+1)(z-2)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-2}=\frac{(A+B)z+(B-2A)}{(z+1)(z-2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A+B=1 \wedge -2A+B=-1 \Leftrightarrow A=\frac{2}{3} \wedge B=\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{F}(z)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{z+1}+\frac{1}{z-2}\right)\subset\frac{1}{3}(2\cdot(-1)^{n-1}+2^{n-1}),\ n\geq 1$$

$$\Leftrightarrow \underline{f(n)=\frac{2}{3}(-1)^{n-1}+\frac{1}{3}\cdot 2^{n-1},\ n=1,2,3,\dots;\ f(0)=0.}$$

Anm. Teorin (den komplexa analysen) är av akademiskt intresse; en ingenjör skall använda handboken.

b) $f(n)=f(n-1)+n^2$, $n\in\mathbb{N}$; $f(n)=0$, för $n\leq -1$.

$f(-1)=0 \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow f(1)=1 \Rightarrow f(2)=5$ osv

$f(n+1)-f(n)=(n+1)^2$; $f(0)=0$ forts

$$f(n)\supset\mathcal{F}(z) \Rightarrow f(n+1)\supset z\mathcal{F}(z)$$

$$n^2\supset\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \Rightarrow (n+1)^2\supset\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}+2\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}$$

$$f(n+1)-f(n)\supset z\mathcal{F}(z)-\mathcal{F}(z)=(z-1)\mathcal{F}(z)=\frac{z(z^2+z)}{(z-1)^3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\mathcal{F}(z)}{z}=\frac{z^2+z}{(z-1)^4}\Leftrightarrow\mathcal{F}(z)=\frac{z^3+z^2}{(z-1)^4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}\mathcal{F}(z)z^{n-1}dz=\frac{1}{3!}\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{z^{n+2}+z^{n+1}}{(z-1)^4}=$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}(z^{n+2}+z^{n+1})=\underline{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=$$

$$=\underline{\sum_{k=1}^{n}k^2}\quad\text{(visas med t.ex. induktion).}$$

c) $\underline{f(n)-3f(n-1)+2f(n-2)=1,\ n\geq 0;\ f(-1)=f(-2)=\dots=0.}$

$f(0)=1$, $f(1)=4$, $f(2)=11$ osv, s.a.

$\underline{f(n+2)-3f(n+1)+2f(n)=1;\ f(0)=1,\ f(1)=4;}$

$$f(n)\supset\mathcal{F}(z)\Rightarrow f(n+1)\supset z\mathcal{F}(z)-z\Rightarrow f(n+2)\supset z^2\mathcal{F}(z)-$$

$$-z^2-4z\Rightarrow VL=f(n+2)-3f(n+1)+2f(n)\supset$$

$$\supset z^2\mathcal{F}(z)-z^2-4z-3(z\mathcal{F}(z)-z)+2\mathcal{F}(z)=$$

$$=(z^2-3z+2)\mathcal{F}(z)-z^2-z=\frac{z}{z-1}\subset 1=HL\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(z-1)(z-2)\mathcal{F}(z)=z(z+1)+z\cdot\frac{1}{z-1}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\mathcal{F}(z)}{z}=\frac{z+1}{(z-1)(z-2)}+\frac{1}{(z-1)^2(z-2)}=-\frac{2}{z-1}+\frac{3}{z-2}-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-2)^2}+$$

$$+\frac{1}{z-2}=4\cdot\frac{1}{z-2}-\frac{1}{(z-1)^2}-3\cdot\frac{1}{z-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{F}(z)=4\frac{z}{z-2}-\frac{z}{(z-1)^2}-3\frac{z}{z-1}\subset 4\cdot 2^n-n-3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{f(n)=2^{n+2}-n-3,\ n=0,1,2,3,\dots}$$

d) $$\begin{cases} f(n+1)=8f(n)-6g(n) \\ g(n+1)=3f(n)-g(n)\end{cases} \supset \begin{cases} z\cdot\mathcal{F}(z)-z=8\mathcal{F}(z)-6\mathcal{G}(z) \\ z\cdot\mathcal{G}(z)=3\mathcal{F}(z)-\mathcal{G}(z)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(z-8)\mathcal{F}(z)+6\mathcal{G}(z)=z \\ 3\mathcal{F}(z)+(z-1)\mathcal{G}(z)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix} z-8 & 6 \\ 3 & z-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathcal{F}(z)\\ \mathcal{G}(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z \\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\mathcal{F}(z)\\ \mathcal{G}(z)\end{bmatrix}=\frac{1}{z^2-9z-10}\begin{bmatrix} z-1 & -6 \\ -3 & z-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} z^2-z \\ -3z\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\mathcal{F}(z)}{z}=\dfrac{z-1}{(z+1)(z-10)}=\dfrac{1}{11}\left(\dfrac{2}{z+1}+\dfrac{9}{z-10}\right) \\ \dfrac{\mathcal{G}(z)}{z}=\dfrac{-3}{(z+1)(z-10)}=\dfrac{3}{11}\left(\dfrac{1}{z+1}-\dfrac{1}{z-10}\right)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\mathcal{F}(z)=\dfrac{2}{11}\dfrac{z}{z+1}+\dfrac{9}{11}\dfrac{z}{z-10} \\ \mathcal{G}(z)=\dfrac{3}{11}\dfrac{z}{z+1}-\dfrac{3}{11}\dfrac{z}{z-10}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(n)=\dfrac{2\cdot(-1)^n+9\cdot 10^n}{11} \\ g(n)=\dfrac{3(-1)^n-3\cdot 10^n}{11}\end{cases}$$

Problem T.5 (Sid. 23)

Lösning: $\underline{4f(n)+2f(n-1)-f(n-3)=\delta(n).}$

$$\left.\begin{array}{l} 4f(0)+2f(-1)-f(-3)=1 \Leftrightarrow f(0)=\frac{1}{4} \\ 4f(1)+2f(0)-f(-2)=0 \Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{8} \\ 4f(2)+2f(1)-f(-1)=0 \Leftrightarrow f(2)=\frac{1}{16} \\ 4f(3)+2f(2)-f(0)=0 \Leftrightarrow f(3)=+\frac{1}{32}\end{array}\right\}\Rightarrow |f(n)|\leq\frac{1}{4}.$$

Problem T.6 (Sid. 23)

Lösning

$$f(n)=f(n-1)+n^3\Leftrightarrow f(n+1)=f(n)+(n+1)^3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(n+1)-f(n)=n^3+3n^2+3n+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\mathcal{F}(z)-\mathcal{F}(z)=\frac{z^3+4z^2+z}{(z-1)^4}+\frac{3z^2+3z}{(z-1)^3}+\frac{3z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}=$$

$$=\frac{1}{(z-1)^4}\left(z^3+4z^2+z+3z^3-3z+3z^3-6z^2+3z+(z-1)^3z\right)$$

$$=\frac{1}{(z-1)^4}\left(7z^3-2z^2+z+z^4-3z^3+3z^2-z\right)=$$

$$=\frac{1}{(z-1)^4}\left(z^4+4z^3+z^2\right)\Leftrightarrow\mathcal{F}(z)=\frac{z^4+4z^3+z^2}{(z-1)^5}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(n)=\frac{1}{4!}\frac{d^4}{dz^4}\left(z^{n+3}+4z^{n+2}+z^{n+1}\right)\Big|_{z=1}=$$

$$=\frac{1}{4!}\big((n+3)(n+2)(n+1)n+4(n+2)(n+1)n(n-1)+$$

$$+(n+1)(n)(n-1)(n-2)\big)=$$

$$=\frac{1}{4!}(n+1)n\cdot\big((n+2)(n+3)+4(n+2)(n-1)+(n-1)(n-2)\big)$$

$$=\frac{1}{4!}n(n+1)\left(n^2+5n+6+4n^2+4n-8+n^2-3n+2\right)=$$

$$=\frac{1}{4!}n(n+1)(6n^2+6n)=\underline{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$$

Anm. $f(n)=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=(1+2+3+\cdots+n)^2$ (induktivt).

Problem T.7 (Sid. 23)

Lösning

$$h(n)=f(n)g(n)\Rightarrow H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)g(n)z^{-n}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_C f(n)\,G(w)w^n z^{-n}\frac{dw}{w}=$$

$$=/\text{ty } g(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_C G(w)w^n\frac{dw}{w}/=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left(\sum_{n=0}^{\infty}f(n)\left(\frac{z}{w}\right)^{-n}\right)G(w)\frac{dw}{w}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\mathcal{F}\left(\frac{z}{w}\right)G(w)\frac{dw}{w};\quad C:|w|=\rho(z)$$

Anm. $f(n)\supset\mathcal{F}(z)\Leftrightarrow f(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\mathcal{F}(z)z^{n-1}dz.$

Problem T.8 (Sid. 27)

Lösning

a) $1\supset\int_0^{\infty}1e^{-st}dt=\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^R=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\lim_{R\to\infty}e^{-Rs}=\frac{1}{s}$

$\Rightarrow s>0;\ (\sigma_f=0)$

b) Jag bevisar påståendet med induktion.

(1) $n=0\Rightarrow t^0=1\supset\frac{1}{s}$, $\mathrm{Re}(s)>0$; se under a).

(2) Antag att påståendet gäller för $n=\nu$, dvs antag att $t^{\nu}\supset\frac{\nu!}{s^{\nu+1}}$, $\mathrm{Re}(s)>0$, och $\nu\in\mathbb{N}$, fixt.

(3) $t^{\nu+1}\supset\int_0^{\infty}t^{\nu+1}e^{-st}dt=\lim_{R\to\infty}\left[t^{\nu+1}\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}\right]_0^R+$

$+\frac{\nu+1}{s}\int_0^{\infty}t^{\nu}e^{-st}dt=/2/=\frac{\nu+1}{s}\cdot\frac{\nu!}{s^{\nu+1}}=\frac{(\nu+1)!}{s^{\nu+2}}.$

Induktionen är därmed genomförd.

Problem T.9 (Sid. 27)

Lösning

$$\underline{f(t)=\sum\mathrm{Res}\left(\mathcal{F}(s)e^{st}\right)}$$

a) $\frac{1}{s(s+1)}\subset\mathrm{Res}_{s=0}\left(\frac{e^{st}}{s(s+1)}\right)+\mathrm{Res}_{s=-1}\left(\frac{e^{st}}{s(s+1)}\right)=\lim_{s\to0}\frac{e^{st}}{s+1}+\lim_{s\to-1}\frac{e^{st}}{s}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{s(s+1)}\subset(1-e^{-t})\cdot H(t)$ (kausal)

b) $s^2+4=0 \Leftrightarrow s=\pm 2i \Rightarrow \frac{s+8}{s^2+4} \subset \operatorname{Res}_{s=2i} \frac{(s+8)}{s^2+4}e^{st} + \operatorname{Res}_{s\to -2i} \frac{s+8}{s^2+4}e^{st}$

$$= \lim_{s\to 2i} \frac{s+8}{2s}e^{st} + \lim_{s\to -2i} \frac{s+8}{2s}e^{st} = \frac{8+2i}{4i}e^{2it} + \frac{8-2i}{-4i}e^{-2it} = 4\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i} + \frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2} =$$

$$= \underline{4\sin 2t + \cos 2t,\ t \geq 0.}$$

c) $\frac{s}{(s-3)^5} \subset \operatorname{Res}_{s=3} \frac{se^{st}}{(s-3)^5} = \frac{1}{4!}\frac{d^4}{ds^4}se^{st}\Big|_{s=3} = /\text{Leibniz}/ =$

$$= \frac{1}{4!}(st^4+4t^3)e^{st}\Big|_{s=3} = \underline{\frac{3t^4+4t^3}{24}e^{3t},\ t\geq 0.}$$

Anm. $(f\cdot g)^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(t)\cdot g^{(k)}(t)$

Detta är Leibniz's formel.

d) $(s+1)(s^2+4)=0 \Leftrightarrow s+1=0 \vee s^2+4=0 \Leftrightarrow \underline{s=-1} \vee \underline{s=\pm 2i}.$

$$\operatorname{Res}_{s=-1} \frac{e^{st}}{(s+1)(s^2+4)} = \lim_{s\to -1} \frac{e^{st}}{s^2+4} = \frac{e^{-t}}{5}$$

$$\operatorname{Res}_{s=2i} \frac{e^{st}}{(s+1)(s^2+4)} = \lim_{s\to 2i} \frac{e^{st}}{(s+1)(s+2i)} = \frac{e^{2it}}{4i(1+2i)} = \frac{1-2i}{20i}e^{2it};$$

$$\operatorname{Res}_{s=-2i} \frac{e^{st}}{(s+1)(s^2+4)} = \frac{1+2i}{-20i}e^{-2it} = \overline{\left(\frac{1+2i}{20i}e^{2it}\right)};$$

$$\frac{1}{(1+s)(s^2+4)} \subset \frac{e^{-t}}{5} + 2\operatorname{Re}\left\{\frac{\operatorname{cis} 2t}{4(-2+i)}\right\} = \frac{e^{-t}}{5} - \frac{1}{10}\operatorname{Re}(2+i)e^{2it}$$

$$= \underline{\frac{e^{-t}}{5} - \frac{1}{10}(2\cos 2t - \sin 2t).}$$

e) $(s^2+1)^2=0 \Leftrightarrow s^2+1=0 \Leftrightarrow s=\pm i$ (dubbelpoler)

$$\operatorname{Res}_{s=i} \frac{e^{st}}{(s^2+1)^2} = \lim_{s\to i} \frac{d}{ds}\frac{e^{st}}{(s+i)^2} =$$

$$= \lim_{s\to i}\left(\frac{t}{(s+i)^2} - \frac{2}{(s+i)^3}\right)e^{st} =$$

$$= \left(\frac{t}{(2i)^2} + \frac{1}{4i}\right)e^{it}$$

$$= \left(-\frac{t}{4} - \frac{i}{4}\right)e^{it} = -\frac{1}{4}(t+i)e^{it} =$$

$$= -\frac{1}{4}(t\cos t - \sin t + i(t\sin t + \cos t))$$

$$\operatorname{Res}_{s=-i} \frac{e^{st}}{(s^2+1)^2} = \overline{\left(\operatorname{Res}_{s=i} \frac{e^{st}}{(s^2+1)^2}\right)} = -\frac{1}{4}(t-i)e^{-it};$$

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} \subset 2\cdot\operatorname{Re}\left\{\operatorname{Res}_{s=i} \frac{e^{st}}{(s^2+1)^2}\right\} = 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)(t\cos t - \sin t)$$

$$= \underline{\frac{1}{2}(\sin t - t\cos t),\ t\geq 0.}$$

Problem T.10 (Sid. 27)

Lösning

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st}\,dt = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{(s-1)^2}\right] = \operatorname{Res}_{s=1} \frac{e^{(t-1)s}}{(s-1)^2} =$$

$$= \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds}e^{(t-1)s} = \underline{(t-1)e^{t-1},\ t\geq 1.}$$

Anm. Med Heavisides språngfunktion fås

$$\frac{e^{-s}}{(s-1)^2} \subset (t-1)e^{t-1}H(t-1).$$

Problem T.11 (Sid. 27)

Lösning

$$(s^2\mathcal{F}(s) - \tfrac{1}{2}s - 1) + 3s\mathcal{F}(s) - \tfrac{3}{2} + 2\mathcal{F}(s) = \frac{1}{(s+1)^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (s^2+3s+2)\mathcal{F}(s) - \tfrac{1}{2}s - \tfrac{5}{2} = \frac{1}{s^2+2s+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (s^2+3s+2)\mathcal{F}(s) = \tfrac{1}{2}(s+5) + \frac{1}{s^2+2s+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{F}(s) = \frac{1}{2}\,\frac{s+5}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{(s+1)(s+2)(s^2+2s+2)}$$

(1) $\operatorname*{Res}_{s=-1} \frac{1}{2}\frac{(s+5)e^{st}}{(s+1)(s+2)} = \lim_{s\to -1} \frac{(s+5)e^{st}}{2(s+2)} = 2e^{-t}$;

(2) $\operatorname*{Res}_{s=-2} \frac{1}{2}\frac{(s+5)e^{st}}{(s+1)(s+2)} = \lim_{s\to -2} \frac{(s+5)e^{st}}{2(s+1)} = -\frac{3}{2}e^{-2t}$;

(3) $\operatorname*{Res}_{s=-1} \frac{e^{st}}{(s+1)(s+2)(s^2+2s+2)} = \lim_{s\to -1} \frac{e^{st}}{(s+2)(s^2+2s+2)} = e^{-t}$;

(4) $\operatorname*{Res}_{s=-2} \frac{e^{st}}{(s+1)(s+2)(s^2+2s+2)} = \lim_{s\to -2} \frac{e^{st}}{(s+1)(s^2+2s+2)} = -\frac{e^{-2t}}{2}$;

(3) $\operatorname*{Res}_{s=-1+i} \frac{e^{st}}{(s+1)(s+2)(s^2+2s+2)} = \frac{e^{st}}{(s+1)(s+2)\cdot 2(s+1)}\Big|_{s=-1+i} =$

$$= \frac{e^{(-1+i)t}}{i(1+i)2i} = -\frac{1}{4}(1-i)e^{-t}e^{it} = -\frac{1}{4}e^{-t}(1-i)e^{it} =$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-t}(\cos t + \sin t + i(\sin t - \cos t))$$

(4) $\operatorname*{Res}_{s=-1-i} \frac{e^{st}}{(s+1)(s+2)(s^2+2s+2)} = -\frac{1}{4}e^{-t}(1+i)e^{-it}$, så att

$$f(t) = 2e^{-t} - \tfrac{3}{2}e^{-2t} - \tfrac{1}{2}e^{2t} + e^{-t} - \tfrac{1}{2}e^{-t}(\cos t + \sin t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{f(t) = 3e^{-t} - 2e^{-2t} - \tfrac{1}{2}e^{-t}(\cos t + \sin t).}$$

Problem T.12 (Sid. 27)

Lösning

a) $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\cos\omega t\,dt = 2\int_0^{\infty} e^{-t}\cos\omega t\,dt =$

$$= 2\cdot \mathrm{Re}\int_0^{\infty} e^{(-1+i\omega)t}dt = 2\mathrm{Re}\left[\frac{1}{-1+i\omega}e^{(-1+i\omega)t}\right]_0^{\infty} =$$

$$= 2\mathrm{Re}\,\frac{-1}{-1+i\omega} = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{1+i\omega}{1+\omega^2} = \underline{\frac{2}{1+\omega^2}}.$$

b) $f(t) = \frac{2}{t^2+1} \Rightarrow \mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^{-i\omega t}}{1+t^2}dt$ /residukalkyl/;

Låt $f(z) = \frac{2e^{-i\omega z}}{z^2+1}$ med $z = \sigma + i\tau$.

$$|f(z)| \leq \frac{e^{\omega\tau}}{|z|^2-1} \leq \frac{1}{|z|^2-1},\ \underline{|z|\text{ stort}}\text{ och }\underline{\omega\tau\leq 0}.$$

Nödvändigheten att $\omega\tau \leq 0$ kräver att vi betraktar två fall; om $\omega<0$ integrerar vi över konturen som visas i figur 1 nedan; om $\omega>0$ integrerar vi över konturen i fig. 2.

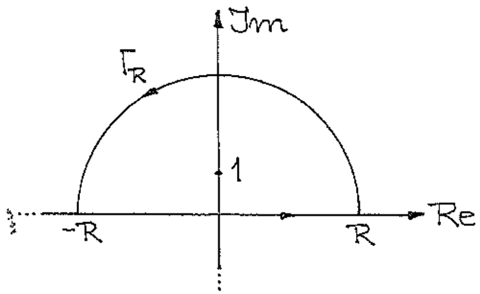
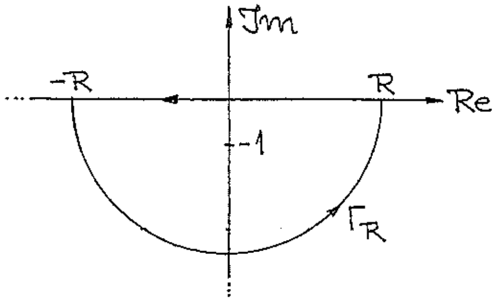


Fig. 1



Residusatsen (alt. Cauchys formel) kan nu användas: $\pm i$ är enkelpoler till f s.a.

$$\omega \le 0 \Rightarrow i \in \mathrm{Int}(\Gamma_R) \Rightarrow \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi e^{\omega};$$

$$\omega \ge 0 \Rightarrow -i \in \mathrm{Int}(\Gamma_R) \Rightarrow \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi e^{-\omega};$$

Då $R \to \infty$ går integralen över halvcirkeln mot 0 och vi finner att

$$\mathcal{F}(\omega) = \begin{cases} 2\pi e^{\omega}, & \omega \le 0 \\ 2\pi e^{-\omega}, & \omega \ge 0 \end{cases} = 2\pi e^{-|\omega|}.$$

Observera att ω är reellt; komplexa ω ingår inte i denna teori.

c) $$g(t) = \frac{2\cos bt}{t^2+1} = \frac{1}{t^2+1}e^{ibt} + \frac{1}{t^2+1}e^{-ibt} \Rightarrow G(\omega) = /b/ =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1} e^{-i(\omega-b)t}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1} e^{-i(\omega+b)t}\,dt =$$

$$= \underline{\pi e^{-|\omega-b|} + \pi e^{-|\omega+b|}}.$$

Problem T.13 (Sid. 27)

Lösning

a) $\hat{f}(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ har dubbelpolerna $z = \pm i$ och detsamma gäller för funktionen

$$g(z,t) := \frac{1}{2\pi}\hat{f}(z)e^{itz}.$$

$$t<0 \Rightarrow \mathrm{Im}\, z < 0 \Rightarrow f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z,t)\,dz = /z_1 = -i/ =$$

$$= -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-i} g(z,t) = -i \lim_{z\to -i} \frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{izt}}{(z-i)^2} =$$

$$= -i \cdot \lim_{z\to -i}\left(\frac{it}{(z-i)^2} - \frac{2}{(z-i)^3}\right)e^{izt} = -i\left(\frac{it}{-4} - \frac{i}{4}\right)e^{t} =$$

$$= \frac{1}{4}(1-t)e^{t};$$

$$t>0 \Rightarrow \mathrm{Im}\, z > 0 \Rightarrow f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z,t)\,dt = /z_2 = i/ =$$

$$= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} g(z,t) = i \cdot \lim_{z\to i} \frac{e^{izt}}{(z+i)^2} = \frac{1}{4}(1+t)e^{-t};$$

$$f(t) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} \mathcal{F}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \underline{\frac{1}{4}(1+|t|)e^{-|t|}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) $\hat{f}(z) = \frac{z}{z^2+1}$ har enkelpolerna $z = \pm i$, och detsamma gäller för funktionen

$$g(z,t) = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(z)e^{izt}.$$

$$t<0 \Rightarrow \operatorname{Im} z<0 \Rightarrow f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(z,t)\,dz = /z_1=-i/ =$$
$$=-2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=-i} g(z,t) = -i \lim_{z\to -i} \frac{ze^{izt}}{z-i} = -\frac{i}{2}e^{t};$$
$$t>0 \Rightarrow \operatorname{Im} z>0 \Rightarrow f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(z,t)\,dz = /z_2=i/ =$$
$$= 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=i} g(z,t) = i \lim_{z\to i} \frac{ze^{izt}}{2z} = \frac{i}{2}e^{-t};$$
$$f(t)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} \mathcal{F}(\omega)e^{i\omega t}\,dt = \underline{\frac{i}{2}(\operatorname{sgn} t)e^{-|t|}}.$$

Anm. I såväl a) som b) underförstås integration över konturen i T.12; $t<0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \operatorname{Im} z<0$ innebär att integrationen sker i nedre halvplanet (fig. 2); fallet $t>0 \Rightarrow$ $\operatorname{Im} z>0$ (fig. 1).

c) $$f(t) = H(t+1)-H(t-1) = \begin{cases} 1, & -1<t<1 \\ 0, & t>1 \text{ och } t<-1 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-1}^{1} 1\cdot \cos\omega t\,dt =$$
$$= 2\int_0^1 \cos\omega t\,dt = \underline{2\cdot\frac{\sin\omega}{\omega}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g(t) \overset{!}{=} \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} 2\frac{\sin\omega}{\omega}e^{it\omega}\,d\omega =$$
$$= 2\cdot\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{\sin\omega}{\omega}e^{it\omega}\,d\omega = \begin{cases} 1, & |t|<1 \\ 1/2, & |t|=1 \\ 0, & |t|>1 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sin\omega}{\omega} \subset \begin{cases} 1/2, & |t|<1 \\ 1/4, & |t|=1 \\ 0, & |t|>1 \end{cases}$$

Problem T.14 (Sid. 27)

Lösning

$$(i\omega)^2\mathcal{F}(\omega) - i\omega\mathcal{F}(\omega) - 2\mathcal{F}(\omega) = ((i\omega)^2 - i\omega - 2)\mathcal{F}(\omega) =$$
$$= (i\omega+1)(i\omega-2)\mathcal{F}(\omega) = \frac{2}{\omega^2+1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{F}(\omega) = \frac{2}{(i\omega+1)(i\omega-2)(\omega^2+1)}.$$

$$\mathcal{F}(z) = \frac{2}{(iz+1)^2(1-iz)(iz-2)} = \frac{-2}{(z-i)^2(z+i)(z+2i)}$$ har en dubbelpol i $z=i$ och enkelpoler i $-i$ och $-2i$.

$g(z,t) = \mathcal{F}(z)e^{izt}$ integreras över konturen i Problem T.12, med $R>2$.

$$t<0 \Rightarrow \operatorname{Im} z<0 \Rightarrow f(t) = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} g(z,t)\,dz =$$
$$= -2\pi i\cdot\left(\operatorname*{Res}_{z=-i} g(z,t) + \operatorname*{Res}_{z=-2i} g(z,t)\right) =$$
$$= -2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-2e^{t}}{(-4)(+i)} + \frac{-2e^{2t}}{(-9)(-i)}\right) = -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{2}{9}e^{2t};$$

$$t>0 \Rightarrow \operatorname{Im} z>0 \Rightarrow f(t)=2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi}\lim_{z\to i}\frac{\partial}{\partial z}\frac{-2e^{izt}}{(z+i)(z+2i)}$$

$$=i\lim_{z\to i}\frac{-2e^{izt}}{z^2+3iz-2}=i\lim_{z\to i}\left(\frac{-2ite^{izt}}{z^2+3iz-2}+\frac{2(2z+3i)e^{izt}}{(z^2+3zi-2)^2}\right)$$

$$=i\left(\frac{-2ite^{-t}}{-6}+\frac{5ie^{-t}}{36}\right)=-\frac{1}{3}te^{-t}-\frac{5}{36}e^{-t}=-\frac{1}{3}te^{-t}-\frac{5}{18}e^{-t}$$

$$f(t)=\begin{cases}-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{2}{9}e^{2t}, & t<0\\ -\frac{5}{18}e^{-t}-\frac{1}{3}te^{-t}, & t\geq 0\end{cases}$$

Problem T.15 (Sid. 27)

Lösning

$$f(t)=e^{-t^2/2}\Rightarrow \mathcal{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}e^{-i\omega t}\,dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(t+i\omega)^2/2}\cdot e^{-\omega^2/2}\,dt=$$

$$=e^{-\omega^2/4}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(t+i\omega)^2/2}\,dt\,;$$

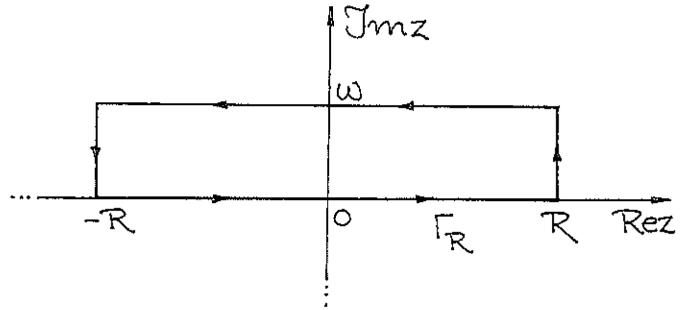
Integralen kan evalueras (dvs uträknas) med komplex analys. Låt R vara ett stort positivt tal;

$$\int_{-R}^{R}e^{-(t+i\omega)^2/2}\,dt\xrightarrow[R\to\infty]{}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(t+i\omega)^2/2}\,dt.$$

Denna integral är i sin tur integralen från $-R+i\omega$ till $R+i\omega$ i det komplexa z-planet:

$$\Rightarrow \int_{C_R}e^{-z^2/2}\,dz,\quad z=t+i\omega,\ |t|\leq R.$$

Betrakta nu följande rektangel i z-planet:



$e^{-z^2/2}$ är helanalytisk så Cauchys sats ger

$$\oint_{\Gamma_R}e^{-z^2/2}\,dz=0$$

På de vertikala sidorna av Γ_R har vi

$$|f(z)|=|e^{-z^2/2}|\leq e^{-(R^2+s^2)},\quad 0\leq s\leq\omega$$

så integralen över kortsidorna är mycket liten vid stora R. Integralen över $-R\leq x\leq R$, $x=\operatorname{Re} z$, kan inte bestämmas exakt men

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}e^{-x^2/2}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}\,dx=\sqrt{2\pi}.$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(\omega)=\sqrt{2\pi}\,e^{-\omega^2/2}=\sqrt{2\pi}\,f(\omega).$$