Sammanfattning TATA60 Komplex Analys

Detta är en sammanfattning av föreläsningsanteckningar i kursen Komplex Analys från höstterminen 2010. Använd den gärna, sprid den gärna och om du hittar några fel får du gärna uppdatera dokumentet.

2012-12-26 Tobias Magnusson tobma696@gmail.com Första upplagan

SATS Triangelolikheter

i) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, och likhet råder $\iff$ z_1 och z_2, som vektorer, är lika riktade.

ii) $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$, och likhet råder $\iff$ z_1 och z_2, som vektorer, är motsatt riktade.

Cachy-Riemanns ekvationer (C-R)

Låt $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ och $c = a + ib$. Om $f'(c)$ existerar, så existerar u'_x, u'_y, v'_x och u'_y i punkten (a, b) och

$$\begin{cases} u'_x & = & v'_y \\ u'_y & = & -v'_x \end{cases}$$

där. Omvänt, om $u, v \in \mathrm{C}^1$ och C-R gäller i (a, b), så existerar $f'(c)$. Om $f'(c)$ existerar, så gäller $f' = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y$.

Anmärkning

Om $u, v \in \mathrm{C}^1$ så gäller

$$f'\text{existerar} \iff \text{C-R uppfyllda}$$

Analytiska funktioner

Låt $\Omega \in \mathbb{C}$ vara öppen. Vi säger att $f : \Omega \to \mathbb{C}$ är analytisk i Ω om $f'(z)$ existerar $\forall z \in \Omega$. Vi skriver då $f \in A(\Omega)$. Om $f \in \mathrm{A}(\mathbb{C})$ säger vi att f är hel.

SATS Regularitet

$f \in \mathrm{A}(\Omega) \Rightarrow f \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$

SATS Entydlighet

Om $f, g \in \mathrm{A}(\mathbb{C})$ och $f = g$ på hela $\mathbb{R}$, så är $f = g$ i hela $\mathbb{C}$.

Harmoniska funktioner

$h \in \mathrm{C}^2(\Omega)$ sägs vara harmonisk i Ω om

$$\triangle h \overset{def}{=} h''_{xx} + h''_{yy} = 0$$

i hela Ω. Vi har alltså att

$$f \in \mathrm{A}(\Omega) \Rightarrow \operatorname{Re} f \text{ och } \operatorname{Im} f \text{ harmoniska.}$$

Elementära funktioner

Exponentialfunktionen

- Definiton
  $\exp z = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)$, där $z = x + iy$
- Räkneregler
  $\mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2}$
  $(\mathrm{e}^z)^n = \mathrm{e}^{nz}, n \in \mathbb{Z}$
  $\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2} \iff z_1 = z_2 + i2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- Derivata
  $\frac{d}{dz}(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^z$ så exp är hel analytisk

Logaritmfunktionen

- Definition
  $\log(z) = \ln|z| + i\arg z, z \neq 0$, log är en flervärd funktion
- Räkneregler
  $\log(z_1 \cdot z_2) = \log z_1 + \log z_2$
  $\log(z_1/z_2) = \log z_1 - \log z_2$
  $\log z^n \neq n \cdot \log z$
  Reglerna ska tolkas som likhet mellan mängder
- Derivata
  För att kunna derivera $\log z$ måste man välja en gren av $\log z$, till exempel, $\mathrm{Log} z$. Då är $\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{z}$.

Potensfunktionen

- Definition
  $z^\alpha = \exp(\alpha \cdot \log z)$ då $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbb{C}$. Potensfunktionen är i regel flervärd.

- Hur många olika värden antar funktionen?

$$z^\alpha \text{ antar, för fixt } z \neq 0 \begin{cases} \text{ett enda värde,} & \alpha \in \mathbb{C} \\ \text{ändliga många värden,} & \alpha \in \mathbb{Q} \\ \text{oändliga värden,} & \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

- Derivata
  $\frac{d}{dz}(z^\alpha) = \frac{a}{z} z^\alpha$ där z^α är av samma gren på båda sidorna.

Komplexa integraler

Integralen av en komplexvärd funktion $f = u + iv$, där $u = \operatorname{Re} f$ och $v = \operatorname{Im} f$, definieras som

$$\mathrm{I}(f) = \mathrm{I}(u) + \mathrm{I}(v)$$

där I är $\mathbb{C}$-linjär. Vi har också att

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \mathrm{I}(f) = \mathrm{I}(u) = \mathrm{I}(\mathrm{Re}) f \\ \operatorname{Im} \mathrm{I}(f) = \mathrm{I}(v) = \mathrm{I}(\mathrm{Im}) f \end{cases}$$

SATS Olikhet för belopp

$$\left| \int_a^b f(t) \mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t, \quad a \leq b$$

Integration längs kurva i $\mathbb{C}$

C sägs vara en kurva C^1-kurva i $\mathbb{C}$, om C beskrivs av $z(t), t : a \to b$ där $z'(t)$ är kontinuerlig och $\neq 0$. C sägs vara styckvis C^1 om den är sammansatt av ändligt många C^1-kurvor. Då ges den komplexa kurvintegralen av

$$\int\limits_C f(z) \mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t)) z'(t) \mathrm{d}t$$

SATS ML-uppskattning

Om $f \in \mathrm{C}(\Omega)$ och C är en styckvis C^1-kurva i Ω så gäller

$$\left| \int\limits_C f(z) \mathrm{d}z \right| \leq M \cdot L$$

där $M = \max |f(z)|, z \in \mathbb{C}$, och $L =$ längden av C.

SATS Om primitiv finns

Antag att $f \in \mathrm{C}(\Omega)$ och att det finns F sådan att $\mathrm{d}F/\mathrm{d}z = \mathrm{f}$ i hela Ω. Då gäller

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = F(\text{slutpunkt}) - F(\text{startpunkt})$$

för alla styckvis C^1-kurvor i Ω.

SATS Cauchys integralsats

Låt ω vara en öppen begränsad mängd med randen $\partial\omega$ och $\omega \cup \partial\omega \subset \Omega$ och $\partial\omega$ består av ändligt många enkla slutna styckvis C^1-kurvor med positiv orientering. Då har vi att om $f \in A(\Omega) \cap \mathrm{C}^1(\Omega)$ så är

$$\int_{\partial\omega} f\mathrm{d}z = 0$$

Av detta följer att

(1) om f är analytisk på och innanför C (enkel och sluten) så är $\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0$

(2) om f är analytisk på och mellan C_1 och C_2 så är $\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$

SATS Cauchys integralformel

Om $f \in A(\Omega) \cap \mathrm{C}^1(\Omega)$ så gäller

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\omega} \frac{f(s)}{s-z}\mathrm{d}s$$

då $z \in \omega$.

SATS Cauchys integralformel för derivator

Om $f \in A(\Omega) \cap \mathrm{C}^1(\Omega)$ så existerar alla komplexa derivator $f', f'', \ldots$ i Ω och ges av

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\omega} \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}\mathrm{d}s$$

då $z \in \omega$.

SATS Maximumprincipen

Om Ω begränsad (så att $\bar{\Omega}$ är kompakt) och $f \in A(\Omega) \cap \mathrm{C}^1(\bar{\Omega})$ så antar $|f|$ sitt max på randen $\partial\Omega$.

Komplexa numeriska serier

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

där $a_n \in \mathbb{C}$

Divergenstestet

Om a_n inte går mot 0 då $n \to \infty$ så är serien divergent.

Absolutkonvergens

Om $\sum |a_n|$ är konvergent så är $\sum a_n$ konvergent och $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$.

Potensserier

Låt $c_o, c_1, c_2, \dots \in \mathbb{C}$ vara givna konstanter (så kallade koefficienter) och bilda serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_o + c_1 z + c_2 z^2 + \dots, z \in \mathbb{C}$$

som är en potensserie (i z). För varje värde på z får vi en (komplex) numerisk serie med $a_n = c_n z^n$.

Den viktigaste potensserien

Den geometriska serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

är konvergent då $|z| < 1$.

Jämförelse med geometrisk serie

Om

$$Q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \text{ (rotkriteriet)}$$

eller

$$Q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \text{ (kvotkriteriet)}$$

existerar, $0 \leq Q \leq \infty$, så är den numeriska serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{absolutkonvergent} & \text{om } Q < 1 \\ \text{divergent} & \text{om } Q > 1 \end{cases}$$

Existens av konvergensradie

Till varje potensserie finns ett entydligt bestämt $R, 0 \leq R \leq \infty$, som kallas konvergensradie sådant att

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \begin{cases} \text{absolutkonvergent} & \text{om } |z| < R \\ \text{divergent} & \text{om } |z| > R \end{cases}$$

SATS Derivata och primitiv till potensserie

Sätt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ för $|z| < R$, där $R > 0$ är potensseriens konvergensradie. Då är $f(z)$ analytisk i $|z| < R$,

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n-1}, |z| < R$$

och $f(z)$ har en primitiv $F(z)$ i $|z| < R$,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}, |z| < R$$

Vi kan alltså derivera och integrera termvis i konvergensskivan $|z| < R$ (som för polynom).

SATS Entydlighet hos koefficienter

Om $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ för $|z| < R$, där R är potensseriens konvergensradie ($R > 0$) så har $f(z)$ komplexa derivator av alla ordningar i $|z| < R$ och

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, n = 0, 1, 2 \ldots$$

Maclaurin- och Taylorserier

SATS

Om $f(z)$ är analytisk (åtminstone) i $|z| < r$, där $r > 0$, så är $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ i området $|z| < r$, där

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{f(s)}{s^{n+1}} \mathrm{d}s$$

där $0 < \rho < r, n \in \mathbb{N}$, och potensseriens konvergensradie $R \geq r$. Serien $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ kallas Maclaurinserien får $f(z)$.

Taylor-serier

Utvecklig i z_0 - byt variabel $w = z - z_0$ och Maclaurinutveckla.

Laurentserier

SATS

Om $f(z)$ är analytisk i $r_1 < |z| < r_2$ där $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$, så är

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad r_1 < |z| < r_2$$

och

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{f(s)}{s^{n+1}} \mathrm{d}s, r_1 < \rho < r_2, n \in \mathbb{Z}$$

Nollställens multiplicitet

$f(z)$ sägs ha nollställe av multiplicitet av N, N = 1,2,3 . . . , i en punkt z_0 om

$$f(z) = (z - z_0)^N \cdot g(z)$$

för någon $g(z)$ som är analytisk i z_0 och $g(z_0) \neq 0$.

Olika typer av singulåriteter

Antag att z_0 är en isolerad singularitet till $f(z)$. $f(z)$ är analytisk i $0 < |z - z_0| < \delta$ för något $\delta > 0$. Då har f(z) Laurentserien

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

Vi säger då att singulariteten är

- hävbar om
$$c_{-1} = c_{-2} = c_{-3} = \cdots = 0$$
så att
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$
Hävbar $\iff$ $f(z)$ analytisk i $|z - z_0| < \delta$ om vi bara sätter $f(z_0) = c_0$, ty då är
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$
i $|z - z_0| < \delta$

- en pol av ordning N, N$\geq$ 1, om
$$c_{-N-1} = c_{-N-2} = \cdots = 0$$
men $c_{-N} \neq 0$ så att
$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \frac{1}{(z - z_0)^N} \sum_{k=0}^{\infty} c_{k-N} (z - z_0)^k$$
Pol av ordning N $\iff$ $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^N}$ för en funktion $g(z)$ som är analytisk i z_0 och $c_N = g(z_0) \neq 0$.

Residyteori

Antag att z_0 är en isolerad singularitet för f så att

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

där

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}s, \quad 0 < r < \delta, n \in \mathbb{Z}$$

Specialfallet $n = -1$ ges alltså

$$\int\limits_{C_r} f(s)\mathrm{d}s = 2\pi i c_{-1}, \quad 0 < r < \delta$$

Residyn i en punkt $z = z_0$ definieras som

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$$

alltså koefficienten för $\frac{1}{z-z_0}$ i Laurentserien för $f(z)$ i $0 < |z - z_0| < \delta$

Residysatsen

Om $f(z)$ är analytisk på och innanför $\partial\omega$ utom i de ändligt många punkterna $z_1, z_2, \ldots, z_N \in \omega$ så gäller

$$\int\limits_{\partial\omega} f(z) = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z)$$

Jordans lemma

$$\int\limits_{C_{R+}} \left|e^{iaz}\right| \cdot |\mathrm{d}z| \leq \frac{\pi}{a}, \quad \text{om } a > 0 \text{ och } R > 0.$$

SATS Argumentprincipen

Om $f(z)$ är analytisk på och innanför C, en enkel, sluten kurva med positiv orientering, förutom möjligen i ändligt många poler innanför C och dessutom är $f(z) \neq 0 \forall z \in$ C, så gäller

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \Delta_C \arg(f(z)) = \text{antalet nollställen - antalet poler innanför C}$$

SATS Rouchés sats

Om f och g är analytiska på och innanför C, och $|f(z)| > |g(z)| \forall z \in$ C, så har f och $f + g$ samma antal nollställen innanför C.

Konforma avbildningar

Antag att $f(z)$ är analytisk i en omgivning av z_0 och att $f'(z) \neq 0$ och att $w = f(z)$ är en avildning från z till w. Kedjeregeln ger $w'(t) = f'(z(t)) \cdot z'(t)$ och speciellt $w'(0) = f'(z_0) \cdot z'(0)$. Detta ger att

$$\arg w'(0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(0)$$

Vinklarnas storlek och orientering bevaras, vi säger att avildningen är konform i z_0.

Allmänt

Om $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m g(z), g \text{analytisk i} z_0, g(z_0) \neq 0, \text{dvs} f'(z_0) = 0, f''(z_0), \ldots, f^{m-1}(z_0) = 0, f^m(z_0) \neq 0$, så m-falldigas vinklar.

Möbiusavildningar

Låt

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ där } ad - bc \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

- Om $c = 0$ definierar vi $T(\infty) = \infty$
- Om $c \neq 0$ sätter vi $T(\infty) = a/c$ och $T(-d/c) = \infty$

Då blir $T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, där $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ enligt Riemann-sfären, kontinuerlig och vi kallar T en Möbiusavildning. T är konform.

SATS

(a) S,T Möbius $\Rightarrow$ S $\cdot$ T Möbius

(b) T Möbius $\Rightarrow$ T^{-1} Möbius

(c) Om $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$, olika, w_1, w_2, w_3, olika så finns precis en Möbius T : $T(z_k) = w_k, \quad k = 1, 2, 3$

SATS

En Möbius-avbildning avbildar $\hat{\mathbb{C}}$-cirklar på $\hat{\mathbb{C}}$-cirklar. Med en $\hat{\mathbb{C}}$ menas

- en vanlig $\mathbb{C}$-cirkel med $|z - c| = r$, $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$

eller

- en vanlig $\mathbb{C}$-linje inklusive ∞

Spegelpunkter med avseende på $\hat{\mathbb{C}}$-cirklar

Vid spegling i linjen L är L mittpunktsnormal till sträckan $[z, z^*]$ där z och z^* är spegelpunkter. Dessutom är ∞ spegelpunkt till sig själv. Vid spegling i cirkeln $|z-c| = r$ ligger z och z^* på samma stråle utgående från cirkelns mittpunkt c och $|z-c| \cdot |z^* - c| = r^2$. Dessutom är c och ∞ spegelpunkter.

SATS

Om z och z^* är spegelpunkter map $\hat{\mathbb{C}}$-cirkeln Γ, så är $T(z)$ och $T(z^*)$ spegelpunkter map $\hat{\mathbb{C}}$-cirkeln $T(\Gamma)$, om T är Möbius.

SATS

Om Γ_1 och Γ_2 är givna $\hat{\mathbb{C}}$-cirklar, $\alpha_1 \neq \alpha_1^*$ spegelpunkter map Γ_1, β_1 punkt på Γ_1, $\alpha_2 \neq \alpha_2^*$ spegelpunkter map Γ_2, β_2 punkt på Γ_2 och T är den Möbius som avbildar $(\alpha_1, \alpha_1^*, \beta_1)$ på $(\alpha_2, \alpha_2^*, \beta_2)$ så avbildar T Γ_1 på Γ_2.

SATS

Om $w = f(z)$ är analytisk och avbildar $z(x, y)$ på $w(u, v)$ samt $h(w)$ är harmonisk och avbildar $w(u, v)$ på en tallinje så är $\Psi(x, y) = h(f(z))$ harmonisk.

z-transformer

Låt $f(n), n \in \mathbb{N}$ vara en talföljd $f(0), f(1), f(2), \ldots$ och bilda potensserien

$$\tilde{F}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) w^n = f(0) + f(1)w + f(2)w^2 + \ldots$$

Denna är analytisk i sin konvergensskiva $|w| < R_w$ Därefter sätter man w = 1/z och får den så kallade z-transformen av f:

$$(*) F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \ldots$$

F är analytisk då

$$\left|\frac{1}{z}\right| < R_w, \text{ dvs då } |z| > \frac{1}{R_w} = R \text{ och } \lim_{|z| \to \infty} F(z) = f(0)$$

Utvecklingen i (*) är alltså F:s Laurent-serie i $|z| > R$.

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k = \sum_{n=-\infty}^{0} f(-k) z^k \quad (n = -k \text{ i } (*))$$

det vill säga

$$c_k = \begin{cases} 0, & k = 1, 2, \dots \\ f(-k), & k = 0, -1, -2 \dots \end{cases}$$

Eftersom

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{F(z)}{z^{k+1}} \mathrm{d}z$$

där $\rho > R, k \in \mathbb{Z}$ så får vi den så kallade inversionsformeln

$$f(n) = c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} F(z) z^{n-1} \mathrm{d}z$$

där $\rho > R, n \in \mathbb{N}$