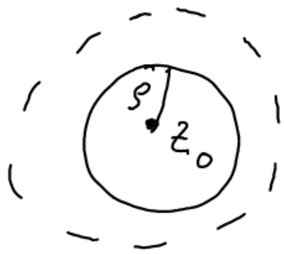
Föreläsning 10, komplex analys

f har isolerad singularitet i z_0



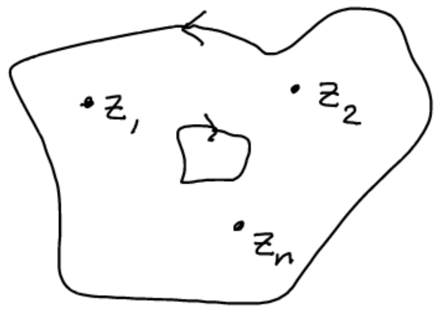
$$\Rightarrow f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

$$0 < |z-z_0| < \delta$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$$

$$\int_{C_\rho} f(z)\,dz = 2\pi i\, c_{-1}$$

SATS (Residysatsen):

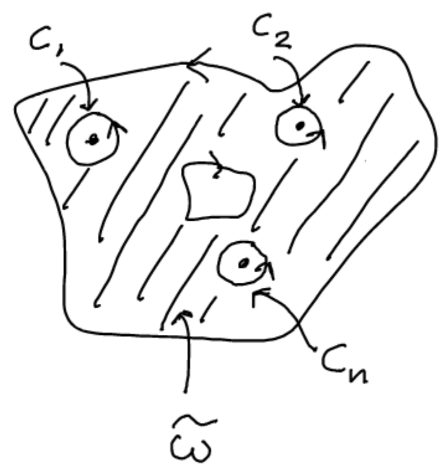


Om f är analytisk i ω
och på $\partial\omega$, förrutom (möjligen)
i de ändligt många punkterna
$z_1, z_2, \dots, z_n \in \omega$, så

$$\int_{\partial\omega} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

Bevis:

Följer av cauchys integralsats på



$$\tilde{\omega}: \int_{\partial\omega} f(z)\,dz = 0$$

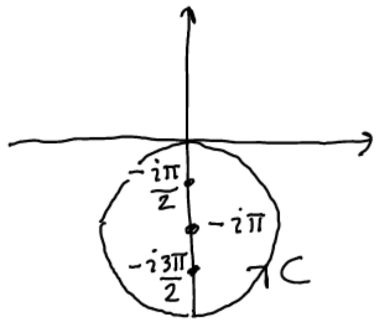
men $\partial \tilde{\omega} = \partial \omega - (C_1 + C_2 + \ldots + C_n)$

så $$\int_{\partial \omega} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\,dz$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$ $\blacksquare$

<u>Ex</u>: $I = \displaystyle\int_C \frac{z}{(e^{2z}+1)^3}\,dz$, där $C: |z + i\pi| = \pi$

ett varv moturs.



Lösning:

$f(z) = \dfrac{z}{(e^{2z}+1)^3}$. Singulariteter där

$e^{2z} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2z = \log(-1) = i\pi + in2\pi$

$\Leftrightarrow z = \frac{i\pi}{2} + in\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ två singulariteter innanför $(n = -1, -2)$.

Residyberäkning:

Sätt $w = z - \frac{i\pi}{2} - in\pi$, då är $e^{2z} = e^{2w} \cdot \underbrace{e^{i\pi}}_{-1} \cdot \underbrace{e^{i2n\pi}}_{1} = -e^{2w}$

, så $f(z) = \dfrac{w + i\frac{\pi}{2} + in\pi}{(-e^{2w}+1)^3} = -\left(w + \frac{i\pi}{2} + in\pi\right)\underbrace{\left(e^{2w} - 1\right)^{-3}}_{*}$

$* = (e^{2w} - 1)^{-3} \xrightarrow{\text{Maclaurin-utveckling}} = \left(2w + 2w^2 + \frac{4}{3}w^3 + \mathcal{O}(w^4)\right)^{-3}$

$$= (2w)^{-3}\Big(\overbrace{1 + w + \tfrac{2}{3}w^2 + \mathcal{O}(w^3)}^{s}\Big)^{-3} = \left[\begin{array}{l} (1+s)^{-3} \underset{\uparrow\ \text{standard}}{=} 1 + \binom{-3}{1}s + \binom{-3}{2}s^2 + \mathcal{O}(s^3) \end{array}\right.$$

$$= 1 - 3s + 6s^2 + \mathcal{O}(s^3) = \left\{\begin{array}{l} s^2 = w^2 + \mathcal{O}(w^3) \\ \mathcal{O}(s^3) = \mathcal{O}(w^3) \end{array}\right\} \Bigg] = \frac{1}{8w^3}\left(1 - 3w + 4w^2 + \mathcal{O}(w^3)\right)$$

$$\therefore\ f(z) = \ldots = \underbrace{-\frac{w + i\frac{\pi}{2} + i\pi n}{8w^3}\left(1 - 3w + 4w^2 + \mathcal{O}(w^3)\right)}_{(**)}$$

Så $\operatorname*{Res}_{z = i\frac{\pi}{2} + i\pi n} f(z) =$ koefficienten för $\dfrac{1}{z - \frac{i\pi}{2} - in\pi}$

i L-serien = koefficienten för $\dfrac{1}{w}$ i $(**)$

$$= \frac{-1}{8}\left(-3 + i2\pi + i4\pi n\right) = \begin{cases} \frac{1}{8}(3 + i2\pi) & \text{då} \quad n = -1 \\ \frac{1}{8}(3 + i6\pi) & \text{då} \quad n = -2 \end{cases}$$

$$\therefore\ I = 2\pi i\left(\frac{1}{8}(3 + i2\pi) + \frac{1}{8}(3 + i6\pi)\right) = \underline{-2\pi^2 + \frac{3}{2}\pi i}$$

Alt: Ansats $\dfrac{w + i\frac{\pi}{2} + in\pi}{(-e^{2w} + 1)^3} = \dfrac{a}{w^3} + \dfrac{b}{w^2} + \dfrac{c}{w} + \mathcal{O}(1)$

residyn

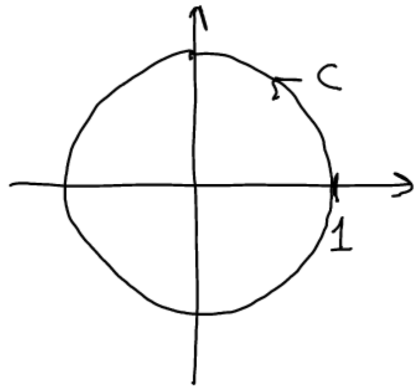
Trippelpol

Multiplicera ihop, identifiera koefficienter.

Jämför med 5.29.

Ex: Trigonometrisk integral över en hel period

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\sin\theta} \quad , -1<a<1$$



med $z = e^{i\theta}$, $\theta: 0 \to 2\pi$

får vi: $dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta$

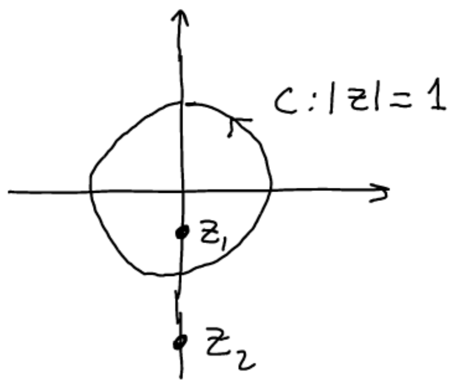
och $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \dfrac{z-\frac{1}{z}}{2i}$.

$$\therefore \quad I = \int_C \frac{dz/iz}{1+a\left(z-\frac{1}{z}\right)/2i} = \frac{2}{a}\int_C \frac{dz}{z^2+\frac{2iz}{a}-1}$$

$a \neq 0$. OBS:
om $a=0 \Rightarrow I = 2\pi$

Eftersom $z^2 + \frac{2i}{a}z - 1 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = \frac{i}{a}\left(-1 \pm \sqrt{1-a^2}\right)$

där $|z_2|>1$ och därför $|z_1|<1$ ty $z^2+\frac{2i}{a}z-1$
$=(z-z_1)(z-z_2)$ ger $-1 = z_1 \cdot z_2$.



$\therefore$ Endast z_1 innanför C, så residysatsen ger:

$$I = 2\pi i \cdot \frac{2}{a} \operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{1}{z^2+\frac{2i}{a}z-1}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{\left.\frac{d}{dz}\left(z^2+\frac{2i}{a}z-1\right)\right|_{z=z_1}}$$

z_1 enkelt nollställe till nämnaren

$\frac{p(z)}{q(z)}$

$$= 2\pi i \, \frac{2}{a} \cdot \left. \frac{1}{2z+\frac{2i}{a}} \right|_{z=\frac{i}{a}\left(-1+\sqrt{1-a^2}\right)} = \ldots = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}, \quad -1<a<1, \; a\neq 0.$$

$\therefore \; I(a) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$, $-1<a<1$ (ty $I(0)=2\pi$).

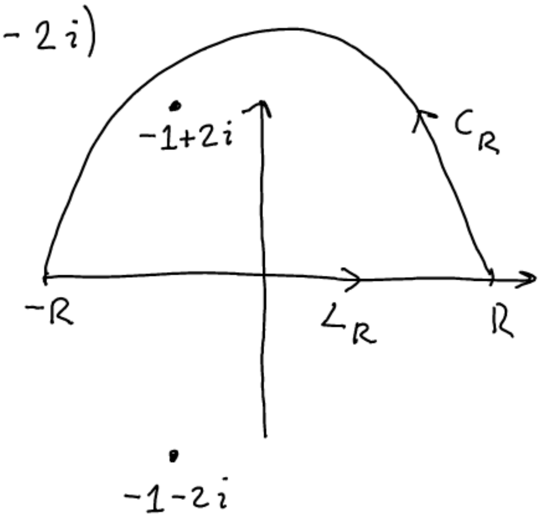
Integraler av rationella funktioner.

Ex: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+5)^4}$

Lösning: $f(z) = \frac{1}{(z^2+2z+5)^4}$

OBS! $z^2+2z+5 = (z+1)^2+4 = (z+1+2i)(z+1-2i)$

så f är singulär i $z=-1\pm 2i$



Om R är stor nog $(R>\sqrt{5})$ ger residysatsen

$$(*) \quad \int_{L_R+C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1+2i} f(z).$$

OBS att $f(z) = \dfrac{(z+1+2i)^{-4}}{(z-(-1+2i))^4} = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^N}$

där $g(z) = (z+1+2i)^{-4}$ är analytisk i $z=-1+2i$, $z_0 = -1+2i$, $N=4$.

så $\operatorname*{Res}_{z=-1+2i} f(z) = \left.\dfrac{g^{(3)}(z)}{3!}\right|_{z=-1+2i} =$

$= \left.\dfrac{(-4)(-5)(-6)(z+1+2i)^{-7}}{3!}\right|_{z=-1+2i}$

Så $\displaystyle\int_{L_R+C_R} f(z)\,dz = \ldots = \frac{5\pi}{2048}$, för stora R.

Men

$$\int_{L_R} f(z)\,dz = \begin{bmatrix} z=t, & t:-R \longrightarrow R \\ dz=dt & \end{bmatrix} = \int_{-R}^{R} \frac{dt}{(t^2+2t+5)^4} \longrightarrow I \text{ då } R\to\infty$$

och

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \begin{bmatrix} |z^2+2z+5| \geq \big||z^2|-|2z+5|\big| \\ \geq |z|^2-2|z|-5 \\ = R^2-2R-5 \\ >0 \text{ om } R \text{ stort.} \end{bmatrix}$$

$$\leq \frac{1}{(R^2-2R-5)^4} \cdot \underbrace{\pi R}_{\text{längd}} \longrightarrow 0 \text{ då } R\to\infty$$

$\uparrow$

ML
uppskattning

$\therefore$ Låt $R \to \infty$ i ⊛ : $I + 0 = \frac{5\pi}{2048}$, dvs $I = \frac{5\pi}{2048}$

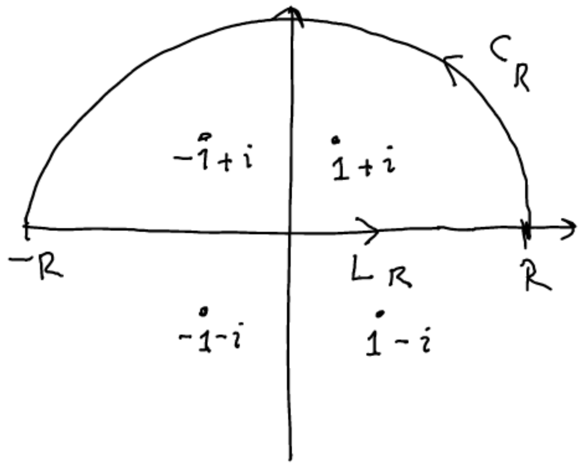
Ex:

$$J = \int_0^\infty \frac{dx}{x^4+4}.$$

sätt $f(z) = \frac{1}{z^4+4}$. singulariteter där $z^4 = -4$

(binomisk ekvation)

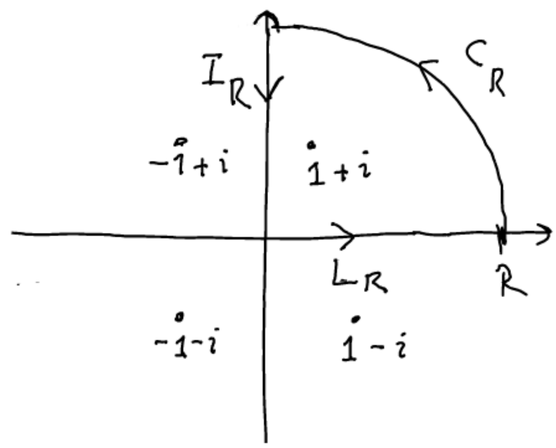
$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow z = \pm 1 \pm i$ (fyra tal)



Alt 1: Integralen är jämn, så

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+4}.$$ Gör som i förra exemplet.

Alt 2:



$$⊛ \int_{L_R + C_R + I_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1+i} f(z)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{enkelpol} \\ p/q}}{=} 2\pi i \cdot \frac{1}{\frac{d}{dz}(z^4+4)\Big|_{z=1+i}} =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=1+i} = 2\pi i \cdot \frac{z}{4 \cdot \underbrace{z^4}_{-4}} = 2\pi i \cdot \frac{1+i}{4\cdot(-4)}$$

vidare: $\int_{L_R} f(z)\,dz = \left[\begin{matrix} z=t & , t: 0 \to R \\ dz = dt & \end{matrix}\right] = \int_0^R \frac{dt}{t^4+4}$

$\int_{I_R} f(z)\,dz = \left[\begin{matrix} z=it & , t: R \to 0 \\ dz = i\,dt & , z^4 = (it)^4 = t^4 \end{matrix}\right] = \int_R^0 \frac{i\,dt}{t^4+4}$

$= -i \int_0^R \frac{dt}{t^4+4}$

och $\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| \le \left[\begin{matrix} |z^4+4| \ge |z^4| - 4 = R^4 - 4 > 0 \\ \text{längd}(C_R) = \frac{\pi}{2} R \quad \text{om } R \text{ stort nog} \end{matrix}\right]$

$\underset{\substack{\uparrow \\ ML}}{\le} \frac{1}{R^4 - 4} \frac{\pi}{2} R \to 0$ då $R \to \infty$

Låt $R \to \infty$ i ⊛ : $J + 0 - iJ = 2\pi i \frac{1+i}{4(-4)}$

så $J = \ldots = \frac{\pi}{8}$