Komplex analys, föreläsning 3.

Elementära funktioner, del 1.

* Exponentialfunktionen, exp.

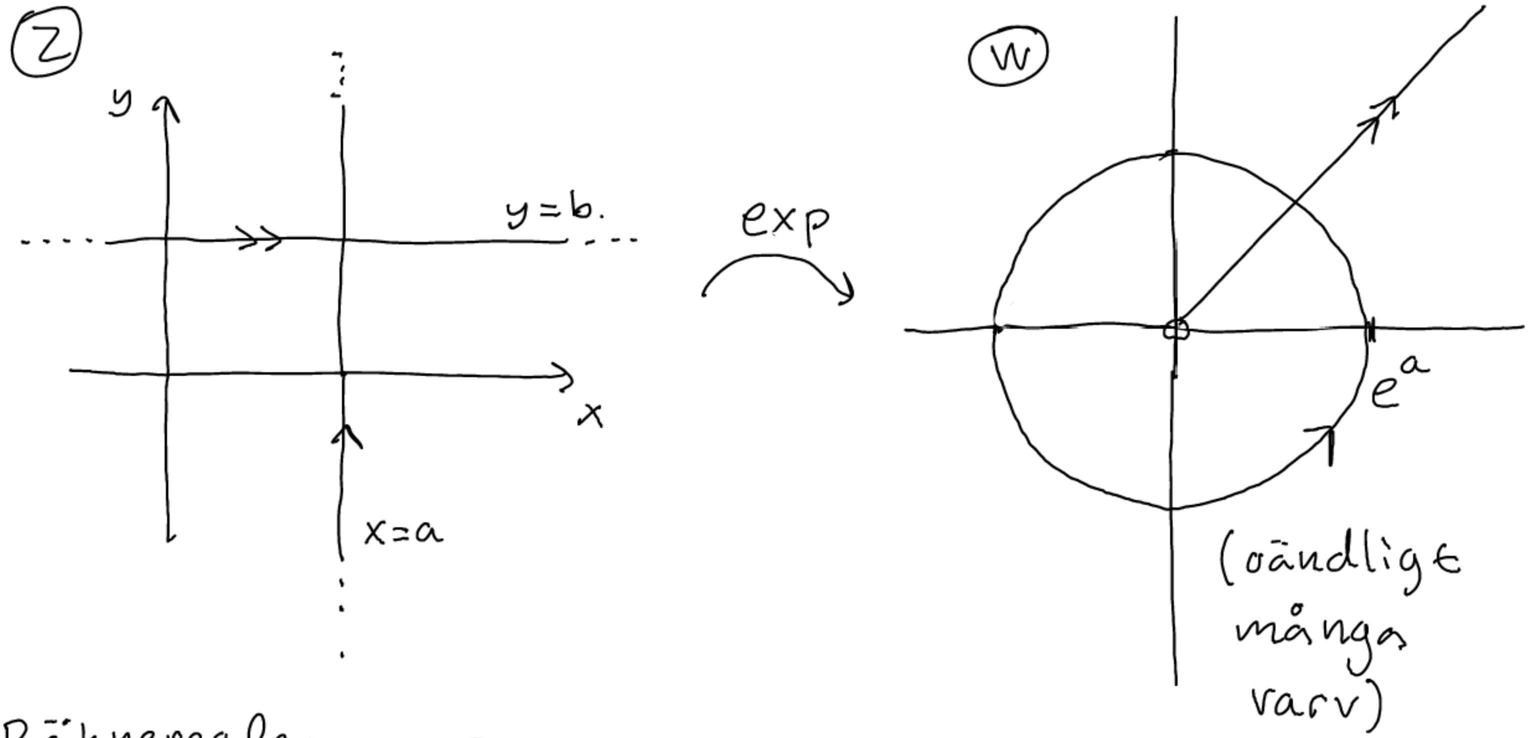
Def: $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x+iy \in \mathbb{C}$.

Helt enkelt $e^z = e^x \cdot e^{iy}$ som förut.

OBS att $|e^{iy}| = 1$ $\forall y \in \mathbb{R}$ och att $e^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

så $|e^z| = e^x$.

Vidare: $\arg e^z = y + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$



Räkneregler:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

$$(e^z)^n = e^{zn}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Vidare,

$$\boxed{e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 = z_2 + 2\pi n i, \quad n \in \mathbb{Z}}$$

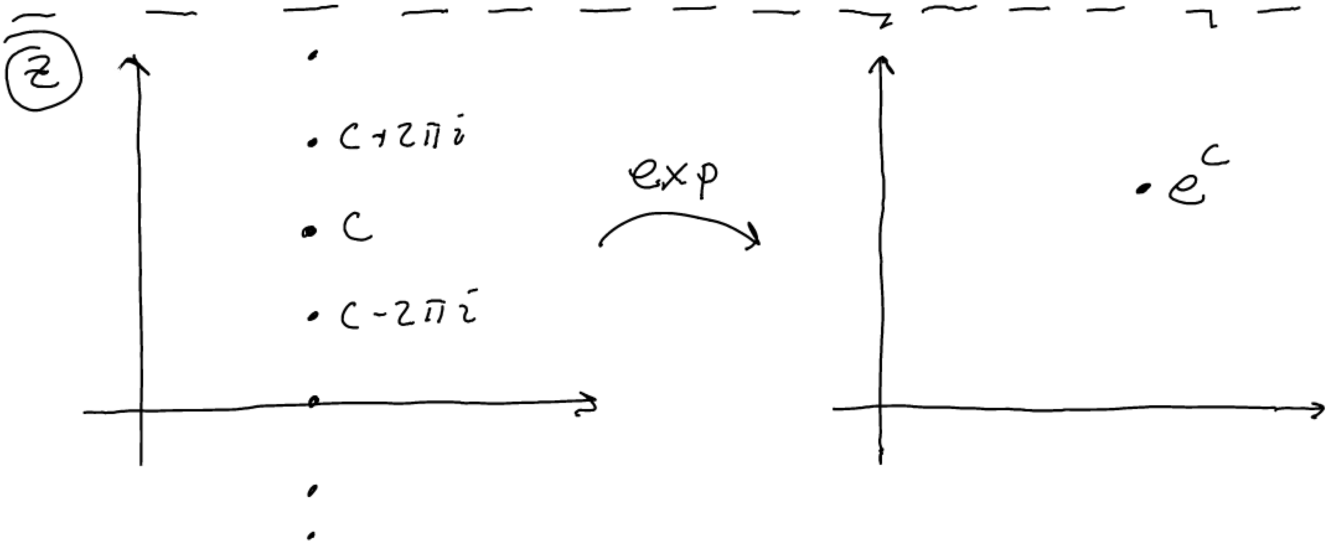
Bevis:

$$\left.\begin{array}{l} e^{z_1} = e^{x_1} \cdot e^{iy_1} \\ e^{z_2} = e^{x_2} \cdot e^{iy_2} \end{array}\right\} \text{lika} \iff \left\{\begin{array}{ll} e^{x_1} = e^{x_2} & (\text{belopp}) \\ y_1 + 2n\pi & (\arg) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} x_1 = x_2 & (\text{ty } x_1, x_2 \in \mathbb{R}) \\ y_1 = y_2 + 2\pi n \end{array}\right. \iff z_1 = x_1 + iy_1 = x_2 + i(y_2 + 2\pi n) \iff$$

$$\iff z_1 = x_1 + iy_1 = x_2 + i(y_2 + 2\pi n) = z_2 + i2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$\blacksquare$



Vi vet redan $\boxed{\frac{d}{dz}(e^z) = e^z}$

Logaritmfunktionen, log.

I reell analys är exp och ln varandras inverser:

$e^y = x \iff y = \ln x.$

I komplex analys är inte exp injektiv, utan

$$e^w = z \iff e^u \cdot e^{iv} = re^{i\theta} \quad (\text{polär form}) \iff$$

$w = u + iv$

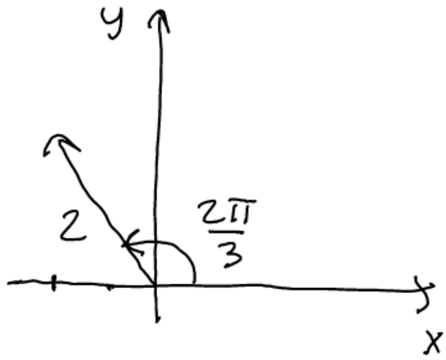
$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^u = r \Leftrightarrow u = \ln r \\ v = \theta + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow w = u + iv = \ln r + i(\theta + 2\pi n)$$

$$= \ln|z| + i \arg z \quad , z \neq 0.$$

Def: $\log z = \ln|z| + i\arg z, \quad z \neq 0.$

Ex $\log(-1+i\sqrt{3}) = \left[-1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right]$

$= \ln 2 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right), \; n \in \mathbb{Z}$



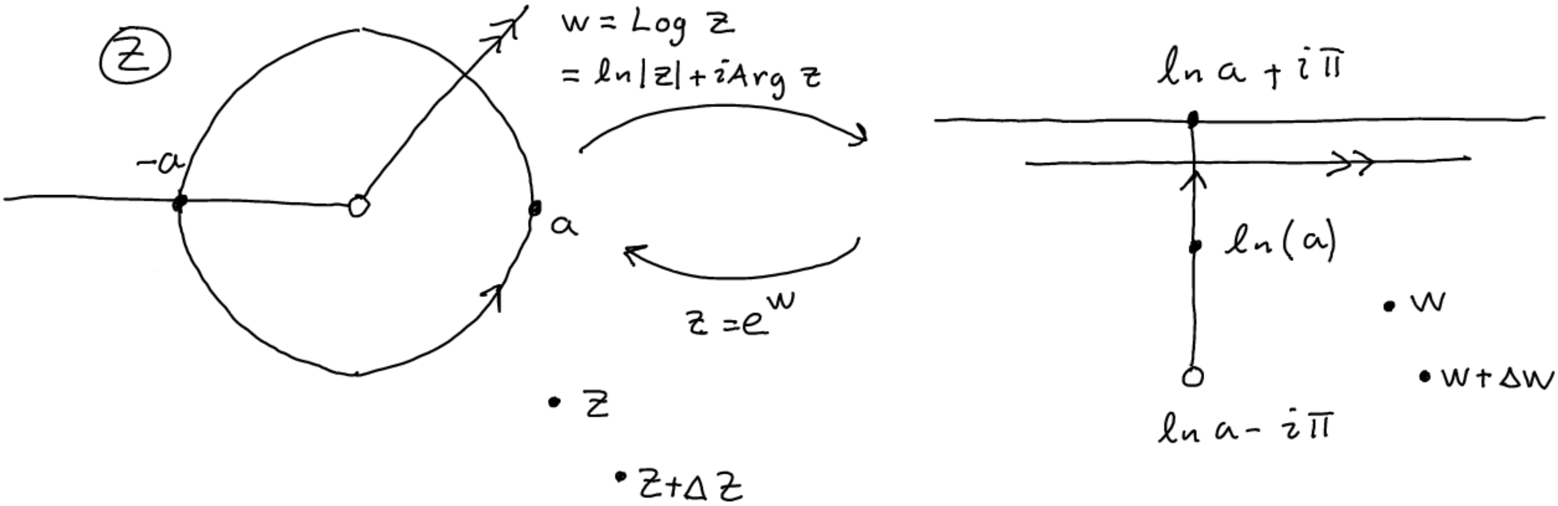
<u>OBS:</u> log är en s.k
<u>flervärd funktion</u>

Def: $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \quad , z \neq 0.$

- Principallogaritmen.

Som bekant är $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$.

<u>Ex:</u> $\operatorname{Log}(-1+i\sqrt{3}) = \ln 2 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 0\right)$ i detta fallet.
$= \ln 2 + i\,\frac{2\pi}{3}.$



OBS att $\operatorname{Log} x = \ln x$, om $x>0$.

$$\boxed{\frac{d}{dz}\left(\operatorname{Log} z\right) = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]}$$

OBS att Log z ej är kontinuerlig på negativa realaxeln.

Bevis: $w = \operatorname{Log} z$, $w + \Delta w = \operatorname{Log}(z + \Delta z)$.

$\Rightarrow z = e^{w}$, $\Delta z = e^{w+\Delta w} - e^{w}$.

Log kontinuerlig: $\Delta z \to 0 \Rightarrow \Delta w \to 0$.

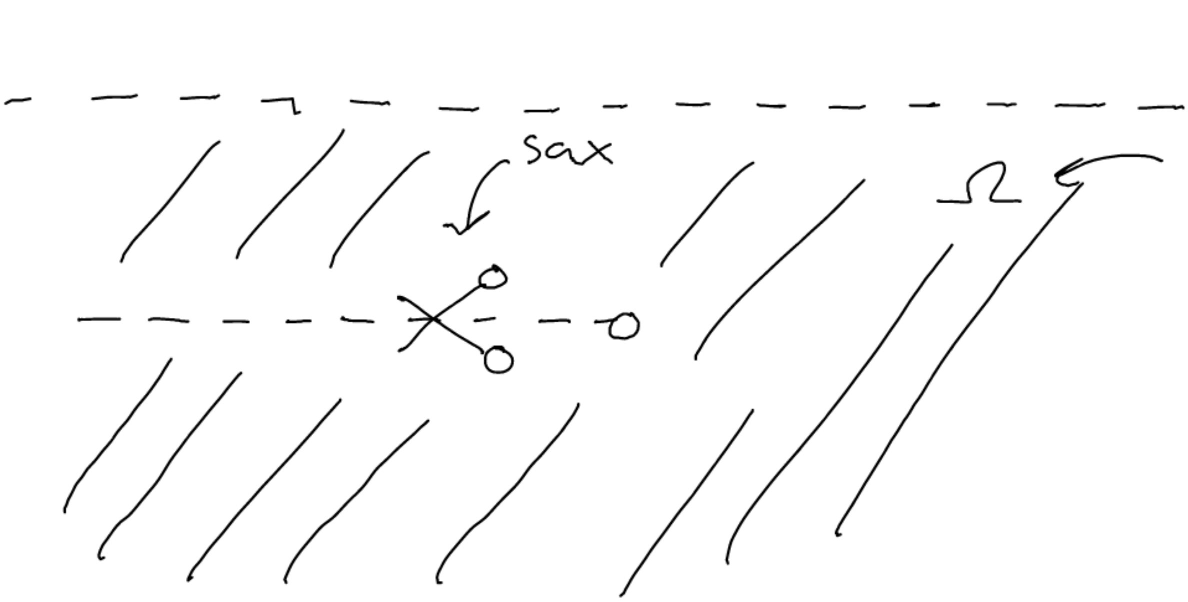
exp kontinuerlig: $\Delta w \to 0 \Rightarrow \Delta z \to 0$.

$$\frac{\operatorname{Log}(z+\Delta z) - \operatorname{Log} z}{\Delta z} = \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{1}{\frac{\Delta z}{\Delta w}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{e^{w+\Delta w} - e^{w}}{\Delta w}} \longrightarrow \frac{1}{e^{w}} = \frac{1}{z}.$$

då $\Delta w \to 0$ alltså även då $\Delta z \to 0$.

∎

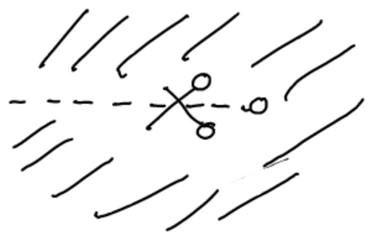


Här är Log analytisk med;

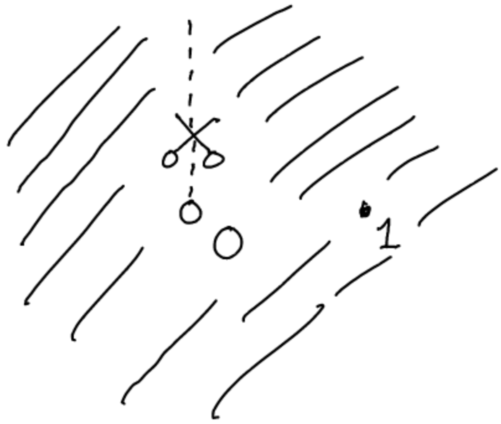
$$\frac{d}{dz}(\operatorname{Log} z) = \frac{1}{z}.$$

Def En gren (branch) $\tilde{f}$ till en flervärd funktion f i Ω är en analytisk funktion i Ω sådan att $\tilde{f}(z)$ = ett av de värden som $f(z)$ antar, $\forall z \in \Omega$

Ex Log är en gren till log i $\Omega = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$



Ex: Sätt $\widetilde{\log}\, z = \ln|z| + i\Theta(z)$

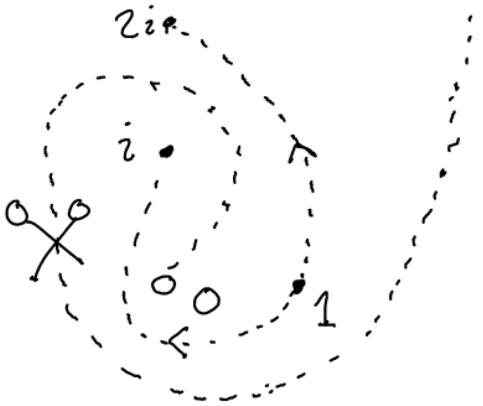


där $\Theta(z)$ varierar kontinuerligt i Ω och i varje punkt är ett argument för z. t.ex $\frac{\pi}{2} < \Theta < \frac{5\pi}{2}$ får vi en gren till $\log z$ i Ω. Då blir

$$\widetilde{\log}\, 1 = \ln 1 + i\Theta(1) = 2\pi i.$$

En annan gren, $\widetilde{\widetilde{\log}}$ är t.ex $\frac{-3\pi}{2} < \Theta < \frac{\pi}{2}$ och då blir $\widetilde{\widetilde{\log}}\, 1 = 0$.

Ex



Vi kan klippa upp $\mathbb{C}$ med en kurva från 0 och långt bort, en kurva som inte skär sig själv och definera

$$\widetilde{\log}\, z = \ln|z| + i\,\Theta(z) \text{ där } \Theta \text{ varierar kontinuerligt i } \Omega.$$

Om t.ex $\Theta(1) = [\text{ett värde av } \log 1 = 0 + 2\pi i \cdot n] = 0$ så får vi $\widetilde{\log}\, 1 = 0$, $\widetilde{\log}\, i = \frac{-3\pi}{2} i$, $\widetilde{\log}\, 2i = \ln 2 + i\frac{\pi}{2}$.

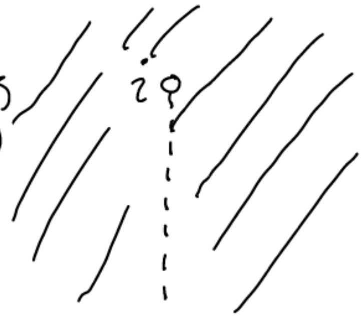
Alla grenar $\widetilde{\log}\, z$ till $\log z$ har derivata $\frac{1}{z}$ i respektive Ω (samma bevis som för $\operatorname{Log} z$).

Räkneregel

$$\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$$ gäller som mängdlikhet

Däremot behöver det inte gälla för grenar till log t.ex. Log.

Ex: Bestäm en gren $f(z)$ till $\log(z^2+1)$ i Ω:
sådan att $f(-1) = \left[\begin{array}{l}\text{ett av värdena}\\ \log 2\end{array}\right] = \ln 2$ (t.ex)

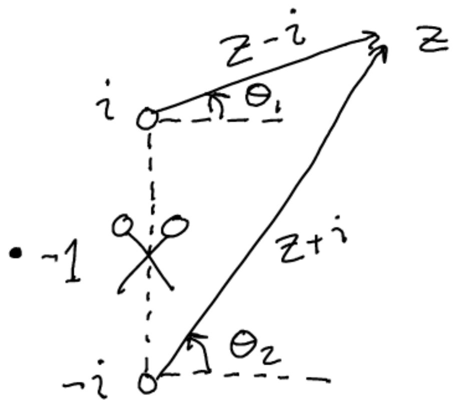


Ange också $f(1)$.

Lösning: $z^2 + 1 = (z+i)(z-i)$, så
$\log(z^2+1) = \log(z-i) + \log(z+i)$.
om vi väljer grenar $g(z)$ och $h(z)$ till dessa i Ω så kan vi uttrycka

$$\log(z^2+1) = \underbrace{g(z)+h(z)}_{\substack{\text{en gren till} \\ \log(z^2+1) \text{ i } \Omega.}} + 2\pi i \cdot n \,, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

och att välja en gren $f(z)$ till $\log(z^2+1)$ är samma sak som att välja <u>ett</u> heltal n som funkar $\forall z \in \Omega$ ty f, g, h kontinuerliga.



$$g(z) = \ln|z-1| + i\,\theta_1(z)$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \frac{3\pi}{2}$$

$$h(z) = \ln|z+1| + i\,\theta_2(z)$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{3\pi}{2}$$

$\therefore$ $f(z) = g(z) + h(z) + 2\pi i \cdot n \,, \; n \in \mathbb{Z} =$

$= \ln|z^2+1| + i(\theta_1 + \theta_2 + 2\pi n)$, något $n \in \mathbb{Z}$

Vi får nu $\ln 2 = f(-1) = \ln(2) + i\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$

$\therefore$ $n = -1$

$\therefore$ Grenen $f(z) = \ln|z^2+1| + i(\theta_1 + \theta_2 - 2\pi) \,, \; z \in \Omega$

Till sist: $f(1) = \begin{bmatrix} \theta_1 = -\frac{\pi}{4} \\ \theta_2 = \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \ln 2 - 2\pi i.$