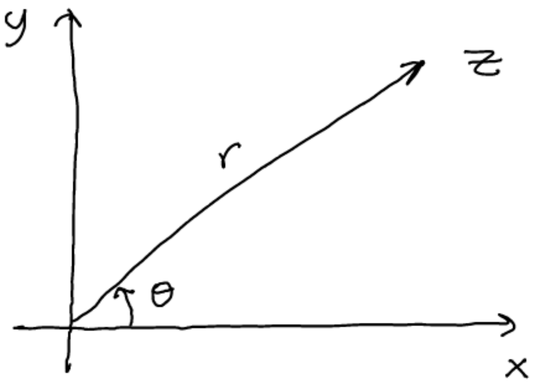
Komplex analys föreläsning 1.

Komplexa tal



$z = x + iy$, rektangulär form

$x = \mathrm{Re}\, z$

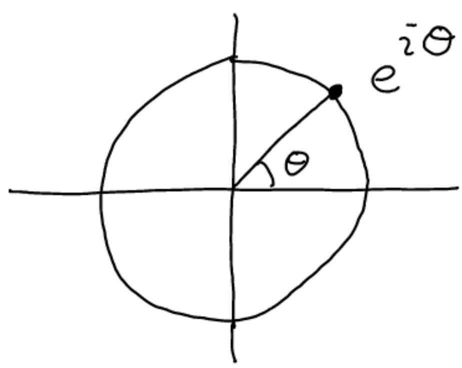
$y = \mathrm{Im}\, z$

$\bar{z} = x - iy$, konjugat

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$z = re^{i\theta}$, polär form där $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$|e^{i\theta}| = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$

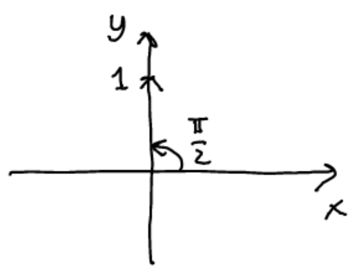


$e^{i\alpha} = e^{i\beta} \Leftrightarrow \alpha = \beta + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

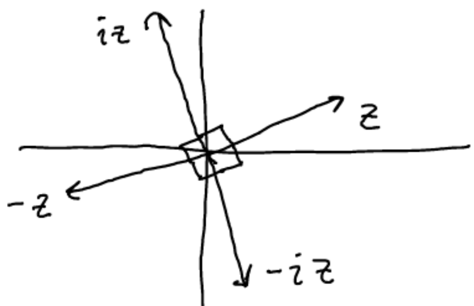
Som bekant:

$$\begin{cases} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad \text{(de Moivre)} \end{cases}$$

$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$



specialfall: iz, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$



[Multiplikation med i "förskjuter" talet $\frac{\pi}{2}$ moturs.]

Allmänt;

$e^z \overset{def}{=} e^x \cdot e^{iy}$, t. ex:

$e^{4+i\frac{\pi}{3}} = e^4 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = e^4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = e^4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\arg z \overset{def}{=}$ Alla vinklar θ för $z \neq 0$.

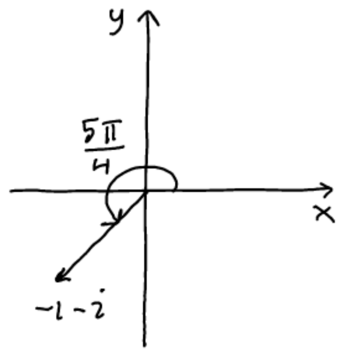
$\operatorname{Arg} z \overset{def}{=}$ den vinkel θ för $z \neq 0$ som uppfyller $-\pi < \theta \leq \pi$, det s.k principalvärdet eller principal-argumentet.

OBS: $\operatorname{Arg} z$ är diskontinuerlig längs negativa realaxeln.

Ex: (Binomisk ekvation).

Finn alla $z \in \mathbb{C}$ sådana att:

$z^3 = -1 - i$.



Lösning:

Ansätt $z = re^{i\theta}$ och skriv $-1-i = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}$

$\therefore z^3 = -1-i \Leftrightarrow r^3e^{3\theta} = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}$

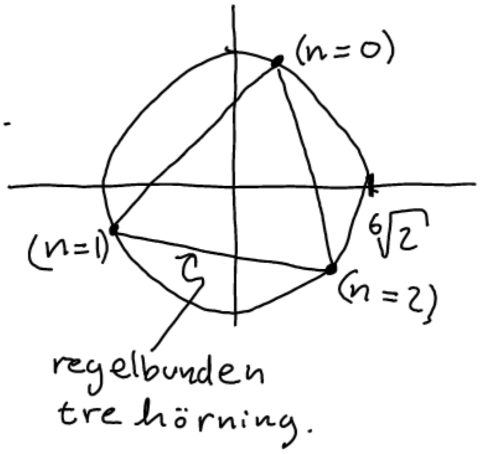
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(beloppen lika)} & r^3 = \sqrt{2} \\ \text{(vinklarna lika, modulo hela varv)} & 3\theta = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[6]{2} & \text{(obs } r > 0) \\ \theta = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n & ,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Tre olika lösningar:

$$z = \sqrt[6]{2}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} n\right)}, \quad n = (\text{t.ex}) \ 0, 1, 2.$$

(eller t.ex $-17, -16, -15$)



Ex: Beskriv och rita mängderna

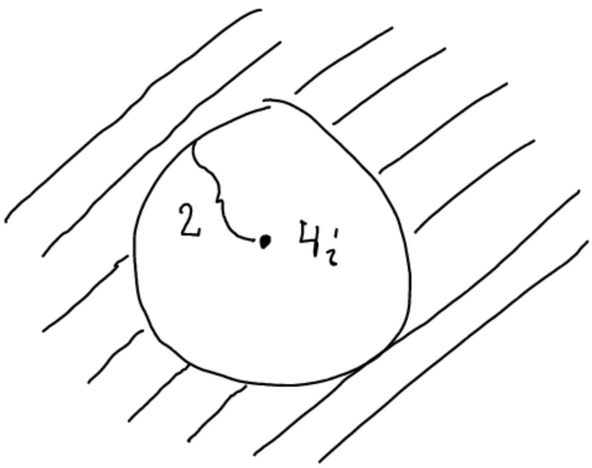
(a) $|z - 4i| \geq 2$

(b) $|z - 4i| \geq |z|$

(c) $|z - 4i| \geq 2|z|$

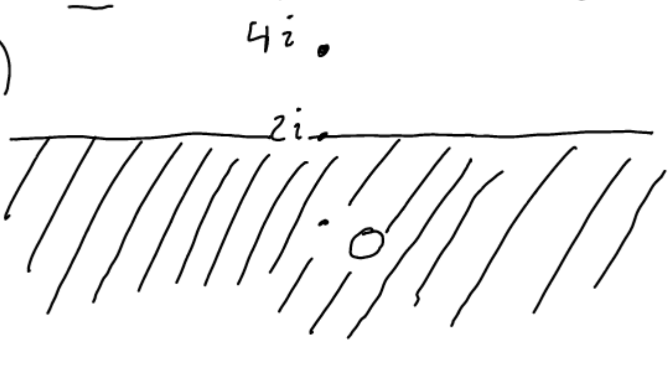
Lösning: OBS att $|z_1 - z_2|$ = avståndet mellan z_1 & z_2 i det komplexa talplanet.

a)



Alla punkter på eller utanför cirkeln $|z - 4i| = 2$.

(b)



Alla punkter på och nedanför linjen $\operatorname{Im} z = 2$.

(c)

$$\underbrace{|z-4i| \geq 2z}_{\circledast} \iff |z-4i|^2 \geq 4|z|^2$$

sant ty alla tal positiva

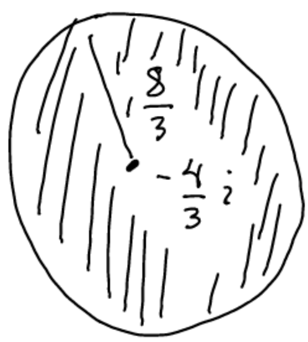
Med $z = x + iy$ får vi:

$$\circledast \iff |x + i(y-4)|^2 \geq 4|x+iy|^2 \iff x^2 + (y-4)^2 \geq 4(x^2+y^2)$$

$$\iff 3x^2 + 3y^2 + 8y - 16 \leq 0 \iff x^2 + y^2 + \frac{8}{3}y - \frac{16}{3} \leq 0$$

$$\iff x^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 \leq \frac{16}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{64}{9} = \left(\frac{8}{3}\right)^2$$

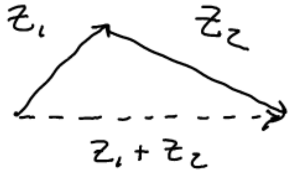
$\therefore$ Alla punkter på och innanför cirkeln med mittpunkt $(0, -\frac{4}{3})$ och radie $\frac{8}{3}$, dvs med mittpunkt i $-\frac{4}{3}i$ och radie $\frac{8}{3}$



Triangelolikheterna

$\circledast$ $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ med likhet $\iff$ z_1 & z_2 parallella och lika riktade (som vektorer)

$\circledast\circledast$ $\big||z_1 + z_2|\big| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$ med likhet $\iff$ z_1 och z_2 motsatt riktade.



Ex: Om $|z| = 2$, hur stort och litet kan $|2z - i|$ bli?

Lösning: $|2z - i| \leq |2z| + |-i| = 2|z| + 1 \overset{|z|=2}{=} 5.$

med likhet $\Leftrightarrow \begin{cases} 2z \text{ och } -i \text{ är lika riktade} \\ |z| = 2. \end{cases}$

$\Leftrightarrow z = -2i$

$\therefore$ Max $= 5$ antas $\Leftrightarrow z = -2i$

Vidare:

$|2z - i| \geq \big||2z| - |-i|\big| = \big|2|z| - 1\big| \overset{|z|=2}{=} |3| = 3$ med likhet

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2z \text{ och } -i \text{ motsatt riktade} \\ |z| = 2. \end{cases}$

$\therefore$ min $= 3$ antas $\Leftrightarrow z = 2i$.

Ex

Visa att $\left|\dfrac{5 + iz}{2 + z}\right| < 6$ då $|z| = 1$

Lösning: $\left|\dfrac{5 + iz}{2 + z}\right| = \dfrac{|5 + iz|}{|2 + z|}$

Täljaren: $|5+iz| \le |5|+|iz| = 5+|z| = 6$.

Nämnaren: $|2+z| \ge |2|-|z| = 1$, då $|z|=1$.

$\therefore$ Kvoten $\le \frac{6}{1} = 6$ då $|z|=1$.

med likhet $\Leftrightarrow$ Vi har likhet i täljare och nänmare samtidigt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 \text{ och } iz \text{ lika riktade} \\ 2 \text{ och } z \text{ motsatt riktade} \\ |z|=1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} iz = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow z=-1 \text{ och } z=-i$$

Motsägelse.

$\therefore$ Kvoten < 6 Klart!

Anmärkning:

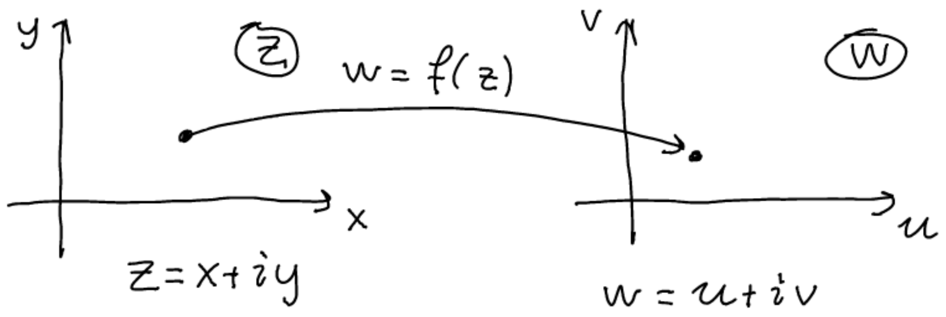
(*) Kan generaliseras till:

$|z_1+z_2+\dots+z_n| \le |z_1|+|z_2|+\dots+|z_n|$ med likhet

$\Leftrightarrow$ alla ingående tal är lika riktade.

Det går ej att generalisera (**) på liknande vis.

Komplexa funktioner av en komplex variabel.



$D_f \subseteq \mathbb{C}$

$V_f \subseteq \mathbb{C}$

$$w = f(z) = f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y) \qquad \begin{array}{l} u = \operatorname{Re} f \\ v = \operatorname{Im} f \end{array}$$

Så $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ beskrivs av

$(u,v): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

<u>Ex</u>

$$f(z) = z^2 + \bar{z} = x^2 + 2ixy - y^2 + x - iy$$

$$= \underbrace{(x^2 - y^2 + x)}_{u} + i\underbrace{(2xy - y)}_{v.}$$

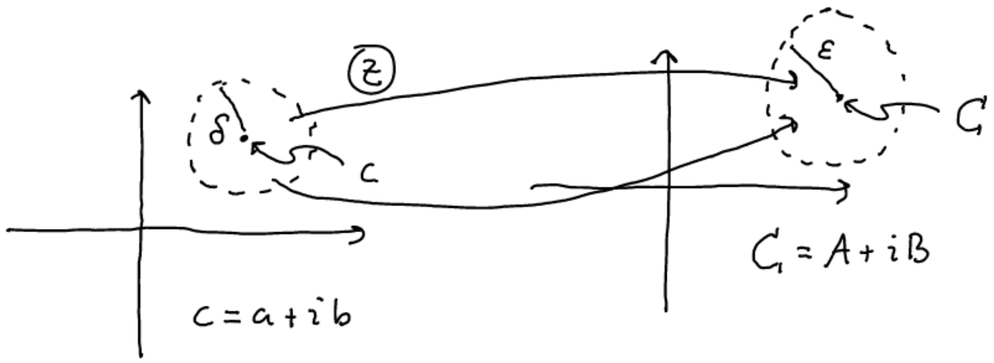
- - - - - - - - - - - - - - - -

Vi kan nu definera:

* Gränsvärde: $f(z) \longrightarrow G$ då $z \to c$.

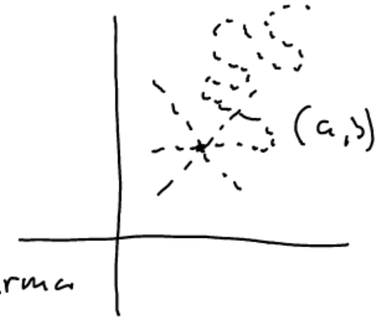
Om $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ sådant att

$|f(z) - G| < \varepsilon$ om $z \in D_f$ och $0 < |z - c| < \delta$



"$z \to c$" betyder alltså "$(x,y) \longrightarrow (a,b)$"

som i flervariabelanalysen.



(olika sätt att närma sig (a,b))

Obs $f \to C \Leftrightarrow \begin{cases} u \to A \\ v \to B \end{cases}$

* Kontinuitet

f är kontinuerlig i c om $c \in D_f$ och $\lim\limits_{z \to c} f(z) = f(c)$.

OBS: f kontinuerlig $\Leftrightarrow$ u och v är kontinuerliga.

Anmärkning: Polynom, rationella funktioner, exponentialfunktionen och sammansättningar av dessa är kontinuerliga.

t.ex $\dfrac{2z - \bar{z}^2}{e^{iz} + 2}$.

Ex Undersök $f(z) = e^{-1/z^2}$ då $z \to 0$.

Lösning:

Som i flervar kan vi testa olika vägar och hoppas på olika resultat:

1) $z = x$:  : $f(z) = f(x) = e^{-1/x^2} \to 0$ då $x \to 0$

2) $z = iy$: $f(z) = f(iy) = e^{1/y^2} \to +\infty$ då $y \to 0$

Olika. Gränsvärdet existerar ej.