# Lektion 8

**2.50** Ytans tangent plan i punkt $(x_0, y_0, z_0)$ på ytan kommer att vara parallellt med planet $x - y + 2z = 0$ om och endast om ytans normalvektor i punkt $(x_0, y_0, z_0)$ har samma riktning som planets normalvektor $(1, -1, 2)$.

Ytan ges av ekvationen

$$\underbrace{x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz}_{= f(x,y,z)} = 1 \Rightarrow$$

$$\nabla f = (2x + 2y,\ 4y + 2x + 2z,\ 6z + 2y) \quad \text{och}$$

$$(\nabla f)(x_0, y_0, z_0) = (2x_0 + 2y_0,\ 4y_0 + 2x_0 + 2z_0,\ 6z_0 + 2y_0)$$

är ytans normalvektor i $(x_0, y_0, z_0)$.

Den är parallell med $(1, -1, 2)$ om

$$\frac{2x_0 + 2y_0}{1} = \frac{4y_0 + 2x_0 + 2z_0}{-1} = \frac{6z_0 + 2y_0}{2}$$

} d v s vektorernas koordinater är proportionella

vilket ger oss ekvationerna

$$\begin{cases} \cancel{2}x_0 + \cancel{2}y_0 = -\overset{2}{\cancel{4}}y_0 - 2x_0 - 2z_0 \\ 2x_0 + 2y_0 = 3z_0 + y_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + 3y_0 + z_0 = 0 & (1) \\ 2x_0 + y_0 - 3z_0 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) − (2) ger $2y_0 + 4z_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -2z_0$.

(1) − 3·(2) ger $-4x_0 + 10z_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{5}{2}z_0$

D vs den punkt $(x_0, y_0, z_0)$ där tangentplanet är parallellt med planet $x - y + 2z = 0$ har koordinater $(\frac{5}{2}z_0, -2z_0, z_0)$.

Vi bestämmer $z_0$ genom att sätta $(\frac{5}{2}z_0, -2z_0, z_0)$ in i ytans ekvation!

$$\left(\frac{5}{2}z_0\right)^2 + 2(-2z_0)^2 + 3z_0^2 + 2\cdot\frac{5}{2}z_0(-2z_0) + 2(-2z_0)z_0 = 1$$

$$\left(\frac{25}{4} + \overbrace{8 + 3 - 10 - 4}^{=-3}\right)z_0^2 = 1$$

$$\frac{25-12}{4}z_0^2 = 1 \Rightarrow z_0^2 = \frac{4}{13} \Rightarrow z_0 = \pm\frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow y_0 = -2\cdot\left(\pm\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \pm\left(-\frac{4}{\sqrt{13}}\right), \text{ och}$$

$$x_0 = \frac{5}{2}\left(\pm\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \pm\frac{5}{\sqrt{13}}.$$

De sökta punkterna är alltså $\left(\frac{5}{\sqrt{13}}, -\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ och $\left(-\frac{5}{\sqrt{13}}, \frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

<u>Svar:</u> $\pm\left(\frac{5}{\sqrt{13}}, -\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$

2.51 $\underbrace{x^2+2y^2+3z^2}_{=f(x,y,z)}=6 \Rightarrow \nabla f = (2x, 4y, 6z).$

Låt $(x_0, y_0, z_0)$ vara någon punkt på ytan.
I så fall är tangentplanets ekvation

$$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0 \Leftrightarrow$$

$$2x_0 \cdot x - 2x_0^2 + 4y_0 \cdot y - 4y_0^2 + 6z_0 z - 6z_0^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x_0 \cdot x + 4y_0 \cdot y + 6z_0 \cdot z = 2x_0^2 + 4y_0^2 + 6z_0^2.$$

Eftersom $(x_0, y_0, z_0)$ satisfierar $x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 6$
blir tangentplanets ekvation

$$2x_0 \cdot x + 4y_0 \cdot y + 6z_0 \cdot z = 12 \Leftrightarrow$$

$$x_0 \cdot x + 2y_0 \cdot y + 3z_0 \cdot z = 6 \quad (*)$$

Vi vet att planet innehåller $(6,0,0)$ och $(0,3,0)$;
vilket ger oss två samband

$$6x_0 = 6 \quad \text{och} \quad 6y_0 = 6 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{matrix}}$$

Vi ser att $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, z_0) \Rightarrow$ vi kan
bestämma $z_0$ genom att sätta $(1, 1, z_0)$ in
i ytans ekvation:

$$1 + 2 + 3z_0^2 = 6 \Leftrightarrow \quad 3 + 3z_0^2 = 6 \Leftrightarrow$$

$$3z_0^2 = 3$$

$$\Rightarrow \underline{z_0 = \pm 1}$$

Så tangentplanets ekvation är antingen

$x + 2y + 3z = 6$ eller

$x + 2y - 3z = 6$.

Svar: $x + 2y + 3z = 6$ eller
$x + 2y - 3z = 6$.

2.55

Om $f$ är differentierbar och en vektor $\bar{v}$ satisfierar $|\bar{v}| = 1 \Rightarrow$ riktningsderivatan av $f$ i punkt $\bar{a}$ och i den riktning som ges av $\bar{v}$ blir

$$\boxed{f'_{\bar{v}}(\bar{a}) = \nabla f(\bar{a}) \bullet \bar{v}}$$

a) Vektorn $\bar{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ satisfierar

$$|\bar{v}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow$$

formeln ovan kan användas (med $\bar{a} = (2, 1)$).

$$f(x,y) = \ln(x^2 + 2y^2) \Rightarrow \nabla f = \left(\frac{2x}{x^2+2y^2}, \frac{4y}{x^2+2y^2}\right)$$

och $(\nabla f)(2,1) = \left(\frac{4}{6}, \frac{4}{6}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Vi får

$$f'_{\bar{v}}(\bar{a}) = \underbrace{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)}_{=\nabla f(\bar{a})} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{=\bar{v}} =$$

$$= \frac{\cancel{2}^{\sqrt{2}}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

b) Vektorn $\bar{v} = (1, 2)$ har normen

$|\bar{v}| = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5} \neq 1$.

Men $\bar{u} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (1, 2) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

har samma riktning $\underset{\text{som } \bar{v}}{}$ och $|\bar{u}| = 1 \Rightarrow$

vi kan använda formeln ovan med $\bar{v} = \bar{u}$
och $\bar{a} = (2, 1) \Rightarrow$

$$f'_{\bar{v}}(\bar{a}) = \underbrace{\nabla f(\bar{a})}_{\text{har beräknat i a)}} \cdot \bar{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{5}} + \frac{4}{3\sqrt{5}} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

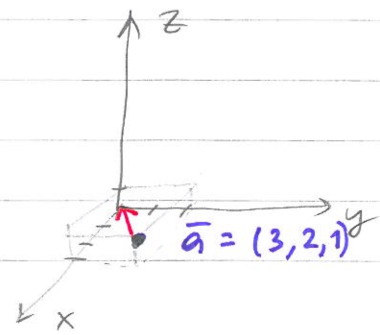
Svar: a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

2.56 Hur fort funktionen växer eller avtar i punkt $\bar{a}$ och riktning $\bar{v}$ beskrivs av riktningsderivata $f'_{\bar{v}}(\bar{a})$.

I denna uppgift är $f(x, y, z) = xy^2z^3$,

$\bar{a} = (3, 2, 1)$. Riktningen ges av

$$\bar{u} = \underbrace{(0, 0, 0)}_{\text{slutpunkt}} - \underbrace{(3, 2, 1)}_{\text{startpunkt}} =$$




$= (-3, -2, -1)$

Observera att $|\bar{u}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14} \neq 1$, så vi betraktar istället $\bar{v} = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \left(-\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$ med $|\bar{v}| = 1$.

Eftersom $\nabla f = (y^2 z^3,\ 2xyz^3,\ 3xy^2z^2)$ är $\nabla f$ i $\bar{a} = (3,2,1)$ lika med

$$\nabla f(\bar{a}) = (2^2 \cdot 1^3,\ 2\cdot 3\cdot 2\cdot 1^3,\ 3\cdot 3\cdot 2^2\cdot 1^2) =$$

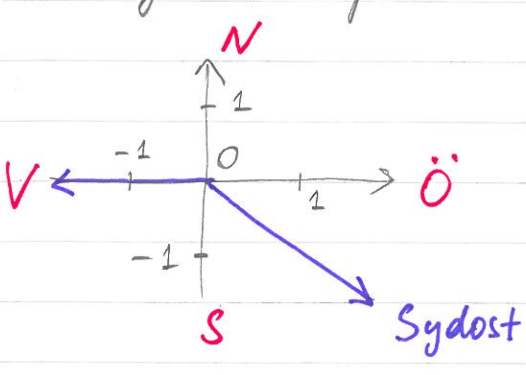
$$= (4, 12, 36), \text{ och}$$

$$f'_{\bar{v}}(\bar{a}) = \underbrace{(4, 12, 36)}_{=\nabla f(\bar{a})} \cdot \underbrace{\left(-\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)}_{=\bar{v}} =$$

$$= -\frac{12}{\sqrt{14}} - \frac{24}{\sqrt{14}} - \frac{36}{\sqrt{14}} = -\frac{72}{\sqrt{14}} \quad (f \downarrow)$$

Svar: f avtar med hastigheten $\frac{72}{\sqrt{14}}$ (enheter per längdenhet)

2.57 Antag att temperaturen ges av funktionen $f(x,y)$. Vi kan alltid välja koordinatsystemet så att den givna punkten har koordinater $(0,0)$,




riktningen "norrut" ges av den positiva riktningen av y-axeln (d vs vektorn $(0;1)$) och riktningen "österut" ges av den positiva riktningen av x-axeln (d vs vektorn $(1;0)$).

I så fall vet vi att

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) \cdot (0, 1) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -3^\circ \quad (1)$$

och

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) \cdot (1, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2^\circ \quad (2)$$

a) Riktningen "väster" ges av vektorn

$\bar{v} = (-1, 0)$, $|\bar{v}| = 1 \Rightarrow$

temperaturen i denna riktning ändras med hastigheten

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)(-1, 0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \overset{(2)}{=} -2^\circ$$

d v s sjunker med hastigheten $2^\circ C/km$

b) Riktningen "sydost" ges av vektorn

$\bar{u} = (1, -1)$ eller $\bar{v} = \frac{\bar{u}}{|u|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

som satisfierar $|\bar{v}| = 1$. Temperaturen i denna riktning ändras med hastigheten

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) =$$

$$= +\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

d v s stiger med hastigheten $\frac{5}{\sqrt{2}}$ $C^\circ/km$

2.58

Gradienten $\nabla T(1,-2)$ pekar i den riktning där funktionen växer snabbast $\Rightarrow$ i den motsatta riktningen $-\nabla T(1,-2)$ kommer funktionen att avta snabbast.

$$\nabla T = \left( \frac{6x}{1+(x^2+y)^2} + \frac{12x}{(1+x^2+y^2)^2} , \frac{3}{1+(x^2+y)^2} + \frac{12y}{(1+x^2+y^2)^2} \right)$$

$$\Rightarrow -\nabla T(1,-2) = -\left( \frac{6}{1+(1-2)^2} + \frac{12}{(1+1+4)^2} , \frac{3}{1+(1-2)^2} + \frac{-24}{(1+1+4)^2} \right)$$

$$= -\left( \frac{6}{2} + \frac{12}{6^2} , \frac{3}{2} - \frac{24}{6^2} \right) =$$

$$= -\left( 3 + \frac{1}{3} , \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right) = -\left( \frac{10}{3} , \frac{5}{6} \right) =$$

$$= \left( -\frac{10}{3} , -\frac{5}{6} \right) = \frac{5}{6}(-4,-1)$$

OBS! denna riktning är alltså samma som $(-4,-1)$.

Björnen bör lufsa i riktningen $(-4,-1)$.

Temperaturen i denna riktning ändras med hastigheten som ges av riktningsderivatan:

$$\nabla T(1,-2) \cdot \bar{v} \quad \text{där} \quad \bar{v} = \frac{1}{\sqrt{4^2+1^2}}(-4,-1) \Rightarrow$$

$$\bar{v} = \left( \frac{-4}{\sqrt{17}} , -\frac{1}{\sqrt{17}} \right), \quad |\bar{v}| = 1.$$

Vi beräknar denna hastighet:

$$\nabla T(1,-2)\cdot \bar{v} = \frac{5}{6}\cdot(4,1)\cdot\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{\sqrt{17}}\right) =$$

$$= \frac{5}{6}\left(-\frac{16}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{5}{6}\cdot\frac{17}{\sqrt{17}} = -\frac{5\sqrt{17}}{6}\ \left({}^{\circ}C/_{km}\right)$$

$\Rightarrow$ temperaturen sjunker med hastigheten $\frac{5\sqrt{17}}{6}$ $^{\circ}C/_{km}$

För att få svar i $^{\circ}C/min$ måste vi ta hänsyn till björnens hastighet $3\ m/_s = 3\cdot\frac{\frac{1}{1000}\,km}{\frac{1}{60}\,min} =$

$$= \frac{18\cancel{0}}{100\cancel{0}}\ \frac{km}{min}.$$

Då sjunker temperaturen med hastigheten

$$\frac{\cancel{5}\sqrt{17}}{\cancel{6}}\ \frac{{}^{\circ}C}{\cancel{km}}\cdot\frac{\cancel{18}^{\,3}}{\cancel{100}_{\,20}}\ \frac{\cancel{km}}{min} = \frac{3\sqrt{17}}{20}\ \frac{{}^{\circ}C}{min}$$

**2.59** $\quad f(x,y) = x + 2y - (x-1)^3 \Rightarrow$

$$\nabla f(x,y) = \left(1 - 3(x-1)^2,\ 2\right)$$

$$\nabla f(1,-1) = (1,\ 2).$$

a) Låt $\bar{v} = (a, b)$, $|\bar{v}| = 1 \Rightarrow$

$$f'_{\bar{v}}(1,-1) = \nabla f(1,-1)\cdot\bar{v} = (1,2)\cdot(a,b)$$
$$= a + 2b$$

Vi ser att

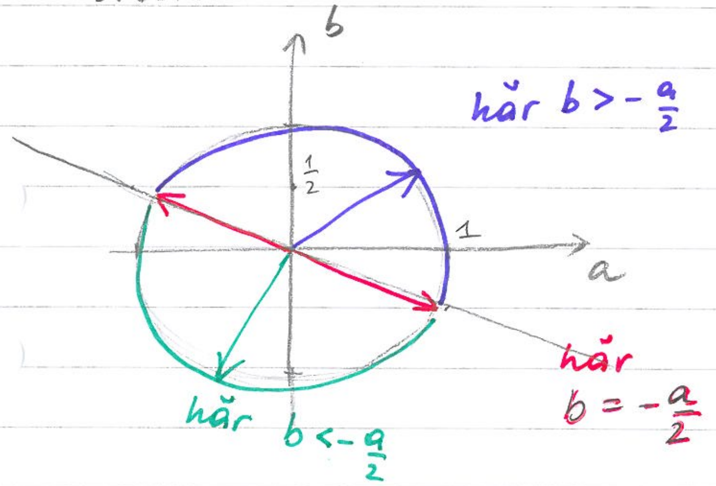
$$f'_{\bar{v}}(1,-1) = a + 2b.$$

Detta är positivt om $a + 2b > 0 \iff b > -\frac{a}{2}$

negativt om $a + 2b < 0 \iff b < -\frac{a}{2}$

noll om $a + 2b = 0 \iff b = \frac{a}{2}$.

Eftersom $a^2 + b^2 = 1$, kan detta illustreras med bilden




I de två röda riktningarna är riktningsderivatan 0.

Alla vektorer som slutar på den blåa halvan av cirkeln ger riktningsderivatan > 0.

Alla vektorer som slutar på den gröna halvan ger riktningsderivatan < 0.

b) Funktionen växer i de riktningar där riktningsderivatan är positiv, d v s där $b > -\frac{a}{2}$. Se bild.

Extra

2.52 Planet som tangerar ytan $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = C$ i punkt $(x_0, y_0, z_0)$ har ekvationen

$$2x_0(x - x_0) + 6y_0(y - y_0) + 8z_0(z - z_0) = 0 \iff$$

$$2x_0 x + 6y_0 y + 8z_0 z = \underbrace{2x_0^2 + 6y_0^2 + 8z_0^2}_{=2C \text{ från ytans ekvation}}$$

$x_0 x + 3y_0 y + 4 z_0 z = C$ är tangentplanets ekvation.

Detta plan ska gå genom punkterna $(0,1,2)$, $(1,3,0)$ och $(5,-1,1)$ vilket ger oss ett ekvationssystem

$$\begin{cases} 3y_0 + 8z_0 = C \\ x_0 + 9y_0 = C \\ 5x_0 - 3y_0 + 4z_0 = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = C - 9y_0 \\ z_0 = \frac{C}{8} - \frac{3}{8}y_0 \\ 5C - 45y_0 - 3y_0 + \frac{C}{2} - \frac{3}{2}y_0 = C \end{cases}$$

Den sista ekvationen kan multipliceras med 2:

$$10C - 90y_0 - 6y_0 + C - 3y_0 = 2C \Rightarrow$$

$$-99y_0 = -9C \quad \text{och} \quad y_0 = \frac{C}{11}.$$

I så fall $x_0 = C - \frac{9C}{11} = \frac{2C}{11}$

$$z_0 = \frac{C}{8} - \frac{3C}{88} = \frac{11C - 3C}{88} = \frac{C}{11}$$

Vi ser att $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{2C}{11}, \frac{C}{11}, \frac{C}{11}\right)$, och den måste satisfiera ytans ekvation:

$$\left(\frac{2C}{11}\right)^2 + 3\left(\frac{C}{11}\right)^2 + 4\left(\frac{C}{11}\right)^2 = C$$

$$\left(\frac{4}{121} + \frac{3}{121} + \frac{4}{121}\right) C^2 = C$$

$$\frac{\cancel{11}}{\cancel{121}_{11}} C^2 = C \underset{C \neq 0}{\Rightarrow} \frac{C}{11} = 1 \Rightarrow \boxed{C = 11}$$

2.60 Kullen är brantast i de riktningar där $z = \dfrac{4}{1+x^2+y^2}$ växer snabbast.

Dessa riktningar ges av gradienten

$\nabla f$, där $f(x,y) = \dfrac{4}{1+x^2+y^2}$, och mätetalet

på den maximala tillväxthastigheten är

$|\nabla f|$ (se Sats 7 s. 79 i boken).

Vi söker alltså de punkter där $|\nabla f(x,y)|$ är störst. Eftersom

$$\nabla f(x,y) = \left( \frac{8x}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{8y}{(1+x^2+y^2)^2} \right) \quad \text{är}$$

$$|\nabla f(x,y)| = \sqrt{\frac{64x^2+64y^2}{(1+x^2+y^2)^4}} = \frac{8\sqrt{x^2+y^2}}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

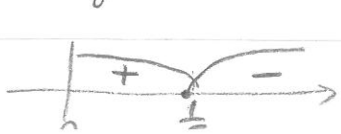
Eftersom $\sqrt{x^2+y^2} = r$ är avst. till origo, kan vi skriva $|\nabla f(x,y)|$ som envariabelsfunktion

$g(r) = \dfrac{8r}{(1+r^2)^2}$ och undersöka för vilka $r$ den är störst.

Eftersom $g'(r) = \dfrac{8(1+r^2)^{\cancel{2}} - 16r(\cancel{1+r^2})\cdot 2r}{(1+r^2)^{\cancel{4}\,3}} =$

$$= \frac{8(1+r^2) - 32r^2}{(1+r^2)^3} = \frac{8-24r^2}{(1+r^2)^4} = \frac{8(1-3r^2)}{(1+r^2)^4}$$

$\Rightarrow$ $g'(r) = 0$ i $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$ vilket är en global maximipunkt.



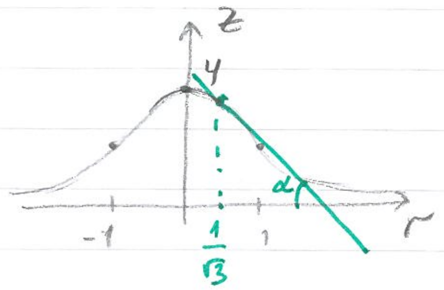
Det betyder att $g(\frac{1}{\sqrt{3}})$ är funktionens största värde $\Rightarrow$ $|\nabla f(x,y)|$ är störst i de punkter $(x,y)$ som uppfyller $\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Kullen är alltså brantast på cirkeln

$$x^2+y^2 = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{4}{1+\frac{1}{3}} = 3.$$

Om vi nu betraktar $z$ som funktion av $r$ $\Rightarrow$

$$z = \frac{4}{1+r^2} \Rightarrow z'(r) = -\frac{8r}{(1+r^2)^2} \Rightarrow z'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-\frac{8}{\sqrt{3}}}{\frac{16}{9}} = \frac{-3\sqrt{3}}{2}.$$




$$\Rightarrow \underbrace{\tan(\pi - \alpha)}_{=-\tan\alpha} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

Lutningen är $\arctan\frac{3\sqrt{3}}{2}$ i de punkter där det är brantast på kullen.

Svar: Kullen är brantast i punkter

$x^2+y^2 = \frac{1}{3}$, $z = 3$,

lutningen där är $\arctan\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

OBS! Man kan från början göra ett variabelbyte $x^2+y^2 = r^2$ och studera problemet som envariabelsanalys problem!!