Lektion 5

2.12 a) $f(x,y,z) = 2x - 3y + z$ har part. derivator

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz}$$

blir

$$df = 2dx - 3dy + dz$$

b) $f(x,y) = \sin xy^2$. $\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cdot \cos xy^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \cos xy^2$$

$$\Rightarrow df = (y^2 \cos xy^2) dx + (2xy \cos xy^2) dy$$

c) $f(p,V,T) = \frac{pV}{T}$ har partiella derivator

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{V}{T}, \quad \frac{\partial f}{\partial V} = \frac{p}{T}, \quad \frac{\partial f}{\partial T} = -\frac{pV}{T^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial V} dV + \frac{\partial f}{\partial T} dT}$$ blir

$$df = \frac{V}{T} dp + \frac{p}{T} dV - \frac{pV}{T^2} dT.$$

2.13 Betrakta $P(U,R) = \frac{U^2}{R}$.

Om $U = 10$ (V) och $R = 2$ (Ω) $\Rightarrow$

$$P(10,2) = \frac{100}{2} = \underline{50}$$

Om U och R ändras kan vi approximera den respektiva ändringen av P m h a differentialen

$$P(U+\Delta U; R+\Delta R) - P(U,R) \approx (\partial_U P)(U,R)\cdot \Delta U +$$
$$+ (\partial_R P)(U,R)\cdot \Delta R.$$

a) Om $\Delta U = 0{,}3\ (V)$, $\Delta R = 0{,}1\ (\Omega)$, $U = 10\ (V)$, $R = 2\ (\Omega) \Rightarrow$

$$P(10{,}3;\ 2{,}1) - P(10,2) \approx \left[\begin{array}{l} \partial_U P = \frac{2U}{R} \\ \partial_R P = -\frac{U^2}{R^2} \end{array}\right] \approx$$

$$\approx \frac{\cancel{2}\cdot 10}{\cancel{2}}\cdot 0{,}3 - \frac{\overset{25}{\cancel{100}}}{\cancel{4}}\cdot 0{,}1 = 3 - 2{,}5 = 0{,}5\ (W)$$

d v s P ökar med 0,5 W (ungefär)

b) Om $\Delta U = 0{,}3\ (V)$, $\Delta R = 0{,}2\ (\Omega)$, $U = 10\ (V)$, $R = 2\ (\Omega) \Rightarrow$

$$P(10{,}3;\ 2{,}2) - P(10,2) \approx \frac{\cancel{2}\cdot 10}{\cancel{2}}\cdot 0{,}3 - \frac{\overset{25}{\cancel{100}}}{\cancel{4}}\cdot 0{,}2 =$$
$$= 3 - 5 = -2\ (W)$$

d v s P minskar med -2 W (ungefär)

Svar a) ökar med ca 0,5 W

b) minskar med ca 2 W.

2.15 Låt cylinderns radie vara r och höjden vara h, då ges cylinderns volym av funktionen $V = V(h,r)$ där

$$V = \pi \cdot h r^2.$$

Volymens ändring beskrivs av

$$V(h+\Delta h, r+\Delta r) - V(h,r) \approx (\partial_h V)\cdot \Delta h + (\partial_r V)\cdot \Delta r,$$

där $\partial_h V = \pi r^2$ och $\partial_r V = 2\pi h r$ $\Rightarrow$

$$V(h+\Delta h, r+\Delta r) - V(h,r) \approx \pi r^2 \cdot \Delta h + 2\pi h \cdot r \cdot \Delta r.$$

Om $\Delta r = 0{,}03r$, och $\Delta h = -0{,}01h$ blir detta

$$V(0{,}99h;\ 1{,}03r) - V(h,r) \approx -0{,}01\pi r^2 h + 0{,}06\pi r^2 h$$

$$= 0{,}05\pi r^2 h,$$

vilket utgör 5% av den ursprungliga volymen $V(h,r)$.

Svar: Volymen ökar med ca 5%.

2.18

a) $z = \sin(x-y)$ har partiella derivator

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\sin(x-y)) = \cos(x-y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin(x-y)) = -\cos(x-y)$$

vilket uppfyller $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

$z = 1 + (x-y)e^{-x+y}$ har partiella derivator

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1\cdot e^{-x+y} + (x-y)e^{-x+y}\cdot(-1) = e^{-x+y}(1-x+y).$$

3

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -e^{-x+y} + (x-y)e^{-x+y} = e^{-x+y}(-1+x-y)$$

vilket uppfyller $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow$

Både $z = \sin(x-y)$ och $z = 1 + (x-y)e^{-x+y}$ är lösningar till ekvationen $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

b) Låt $z = f(x-y) \Rightarrow$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x-y)\right] = f'(x-y)\cdot 1 = f'(x-y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[f(x-y)\right] = f'(x-y)\cdot(-1) = -f'(x-y).$$

Vi ser att $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ igen $\Rightarrow z = f(x-y)$ är en lösning.

Funktionerna i a) har den här typen då

$z = \sin(x-y)$ är $z = f(x-y)$ där $f(t) = \sin t$.

$z = 1 + (x-y)e^{-x+y}$ är $z = f(x-y)$ där $f(t) = 1 + te^{-t}$.

2.19 Låt $u(x,y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow$

$$u'_x = f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y} \quad \text{och} \quad u'_y = f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2}\cdot f'\left(\frac{x}{y}\right).$$

Vi ser att $x\cdot u'_x + y\cdot u'_y = \frac{x}{y}\cdot f'\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y}\cdot f'\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$

V.S.V.

Nu kollar vi om $u(x,y) = \frac{x^2-y^2}{xy}$ kan skrivas som $f\left(\frac{x}{y}\right)$. Vi ser att

$$u(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = f\left(\frac{x}{y}\right), \text{ där}$$

$$f(t) = t - t^{-1} = \frac{t^2-1}{t}.$$

2.20

Här i uppgiften är $z(x,y) = z(u(x,y), v(x,y))$.
I så fall fungerar kedjeregeln så här:

$$\boxed{\begin{aligned} z'_x &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \\ z'_y &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}}$$

a) $$z'_x = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \begin{bmatrix} u = x+y \\ v = xy \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot y = \frac{\partial z}{\partial u} + y\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \begin{bmatrix} u = x+y \\ v = xy \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot x = \frac{\partial z}{\partial u} + x\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Svar: $z'_x = z'_u + y\cdot z'_v$

$z'_y = z'_u + x\cdot z'_v$

в) $z'_x = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \begin{bmatrix} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{bmatrix} =$

$= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 2y = 2x \cdot z'_u + 2y \cdot z'_v$

$z'_y = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \begin{bmatrix} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{bmatrix} =$

$= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot (-2y) + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot (2x) = -2y\, z'_u + 2x \cdot z'_v$

Svar: $z'_x = 2x\, z'_u + 2y\, z'_v$

$z'_y = -2y\, z'_u + 2x\, z'_v$

c) $z'_x = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \begin{bmatrix} u = 2xy \\ v = \frac{1}{y} \end{bmatrix} =$

$= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 0 = 2y\, z'_u$

$z'_y = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \begin{bmatrix} u = 2xy \\ v = \frac{1}{y} \end{bmatrix} =$

$= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = 2x \cdot z'_u - \frac{1}{y^2} z'_v .$

Svar: $z'_x = 2y\, z'_u$

$z'_y = 2x\, z'_u - \frac{1}{y^2} z'_v$

2.21

a) Betrakta ekvationen $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

och låt $z(x,y) = z(u(x,y), v(x,y))$ där $\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y. \end{cases}$

I så fall blir de första partiella derivatorna

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \begin{bmatrix} u = x-y \\ v = x+y \end{bmatrix} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \begin{bmatrix} u = x-y \\ v = x+y \end{bmatrix} = -\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v},$$

så ekvationen $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ kan skrivas om till

$$(z'_u + z'_v) + (-z'_u + z'_v) = 0 \iff 2z'_v = 0 \iff$$

$$\boxed{z'_v = 0}$$

Detta betyder att $z = z(u,v)$ beror inte på v dvs $z = f(u)$, där f är en godtycklig C^1-funktion.

Eftersom $u = x-y$ ser vi att formeln

$$z = f(x-y), \quad f \in C^1\text{- godtycklig}$$

beskriver ekvationens alla lösningar.

b) Antag att $z(x,y) = f(x-y)$ satisfierar $z(0,y) = y - \cos y$. I så fall $f(-y) = y - \cos y$.

Låt $t = -y \Rightarrow f(t) = -t - \cos(-t) = -t - \cos t.$
$(y = -t)$

Nu kan vi skriva

$$z(x,y) = f(x-y) = -(x-y) - \cos(x-y) \Leftrightarrow$$

$$\underline{z(x,y) = -x+y-\cos(x-y).}$$

2.22 a) Vi kan lösa systemet för x och y!

$$\begin{cases} u = 2x-3y \\ v = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = v \\ u = 2v-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = v \\ y = \frac{2v-u}{3} \end{cases}$$

Från det första systemet $\frac{\partial u}{\partial x} = 2$.

Från det tredje systemet $\frac{\partial x}{\partial u} = 0$, så

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} = 0 \neq 1 \;!!$$

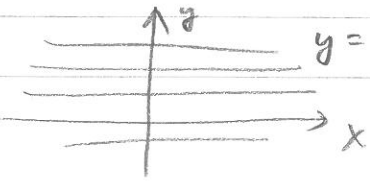
b) $f(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ där $\begin{cases} u = 2x-3y \\ v = x \end{cases}$

Kedjeregeln ger

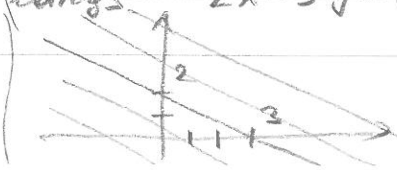
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=2} + \frac{\partial f}{\partial v}\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{=1} = 2\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \neq \frac{\partial f}{\partial v}$$

trots att $v = x$.

Anledningen till detta är att vid beräkning av $\frac{\partial f}{\partial x}$ håller vi $y = \text{konst}$, medan i det andra fallet då vi beräknar $\frac{\partial f}{\partial v}$ håller vi $u = \text{konst} \Leftrightarrow 2x-3y = \text{konst}$. D v s i det första fallet deriverar vi längs linjer $y = C$, $C \in \mathbb{R}$



och i det andra fallet längs $2x-3y=C$



Extra

2.16 Låt $f(x,y) = xy$. Vi vill visa att den är differentierbar i $(1,2)$ dvs att vi kan skriva

$$f(1+h, 2+k) = f(1,2) + f'_x(1,2)\cdot h + $$
$$+ f'_y(1,2)\cdot k + \sqrt{h^2+k^2}\cdot \rho(h,k)$$

där $\rho(h,k) \to 0$ när $(h,k)\to(0,0)$.

Det är samma sak som att bevisa att

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \rho(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(1+h,2+k) - f(1,2) - f'_x(1,2)\cdot h - f'_y(1,2)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Här $f'_x = y$ och $f'_y = x \Rightarrow$ gränsvärdet blir

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(1+h)(2+k) - 1\cdot 2 - 2\cdot h - 1\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\cancel{2} + \cancel{2h} + \cancel{k} + hk - \cancel{2} - \cancel{2h} - \cancel{k}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = \left[\begin{array}{l} h = \rho\cos\varphi \\ k = \rho\sin\varphi \\ \rho \to 0 \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \overbrace{\rho}^{\to 0} \cdot \underbrace{\cos\varphi\sin\varphi}_{\text{begränsad}} = 0.$$

$f(x,y) = xy$ är differetierbar i $(1,2)$ v.s.v.

2.17

a) f i 2.4 är kontinuerlig och partiellt deriverbar men inte differentierbar:

* att f är partiellt deriverbar har vi visat förut (se Lektion 4)

* att f är kontinuerlig kan man visa så här:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} \underset{\substack{|\\ \text{polära} \\ \text{koordinater}}}{=} \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^3\varphi+\rho^4\sin^4\varphi}{\rho^2} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \underbrace{\rho^2}_{\to 0}\underbrace{(\cos^3\varphi+\rho^2\sin^4\varphi)}_{\text{begränsad}} = 0 = f(0,0).$$

(när $(x,y)\neq(0,0)$ är det uppenbart).

* Vi måste nu visa att f är inte differentierbar.

Vi ska visa att den är inte differentierbar i $(0,0)$, nämnligen att vi inte kan skriva

$$f(h,k) = f(0,0) + f_x'(0,0)\cdot h + f_y'(0,0)\cdot k +$$
$$+ \sqrt{h^2+k^2}\cdot \rho(h,k),$$

där $\rho(h,k)\to 0$ då $(h,k)\to(0,0)$.

Från 2.4 $\Rightarrow$ $f_x'(0,0)=1$, $f_y'(0,0)=0$,

$$f(h,k) = \frac{h^3+k^4}{h^2+k^2} \quad ((h,k)\neq(0,0)),$$
$$f(0,0)=0$$

I så fall

$$\rho(h,k) = \frac{f(h,k) - f(0,0) - f'_x(0,0)h - f'_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \quad \text{blir}$$

$$\rho(h,k) = \frac{\frac{h^3+k^4}{h^2+k^2} - 0 - h - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\cancel{h^3}+k^4-\cancel{h^3}-hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \frac{k^2(k^2-h)}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Vi ser att

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h=0}} \frac{k^2(k^2-h)}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{k\to 0} \frac{k^4}{k^3} = \lim_{k\to 0} k = 0,$$

medan

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ k=h}} \frac{k^2(k^2-h)}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2(h^2-h)}{2\sqrt{2}\,h^3} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^4-h^3}{2\sqrt{2}\,h^3} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{h}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

Vilket betyder att $\rho(h,k)$ saknar gränsvärdet och kan alltså inte gå mot noll då $(h,k)\to(0,0)$.

Det betyder att f är inte differentierbart.

b) Vi visar först att f är differentierbar dvs att

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \rho(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-f'_x(0,0)h-f'_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

är lika med 0.

Vi behöver

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h^2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \overset{\to 0}{h} \underbrace{\sin\frac{1}{h^2}}_{\text{begr.}} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h^2} - 0}{h} = 0.$$

Vi ser att

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} g(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(h^2+k^2)\sin\frac{1}{h^2+k^2} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2} \sin\frac{1}{h^2+k^2} = \begin{bmatrix} h^2+k^2 = t \\ t\to 0 \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{t\to 0} \overset{\to 0}{\sqrt{t}} \cdot \underbrace{\sin\frac{1}{t}}_{\text{begr.}} = 0,$$

vilket betyder att <u>f är differentierbar.</u>

Nu ska vi visa att <u>$f \notin C^1$.</u>

När $(x,y) \neq (0,0)$ är

$$f'_x = \left((x^2+y^2) \sin\frac{1}{x^2+y^2} \right)'_x =$$

$$= 2x \sin\frac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2) \cos\frac{1}{x^2+y^2} \left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \right) =$$

$$= 2x \sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

I så fall är

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x\left(\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} 2\rho\cos\varphi\left(\sin\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}\cos\frac{1}{\rho^2}\right) =$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\left(2\rho\cos\varphi\cdot\sin\frac{1}{\rho^2} - \frac{2}{\rho}\cos\frac{1}{\rho^2}\cdot\cos\varphi\right) = \otimes$$

Vi ser att

$$\text{Om } \varphi = 0 \Rightarrow \otimes = \lim_{\rho\to 0}\Big(\overbrace{\underbrace{2\rho\sin\frac{1}{\rho^2}}_{\text{begr.}}}^{\to 0} - \overbrace{\frac{2}{\rho}}^{\to\infty}\underbrace{\cos\frac{1}{\rho^2}}_{\text{begr., kan anta} \neq 0}\Big) = \infty$$

$$\text{Om } \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \otimes = 0$$

Det betyder att $f'_x(x,y)$ saknar gränsvärdet då $(x,y)\to(0,0)$, vilket betyder att $\underline{f \notin C^1}$.

<u>2.25</u> Vi söker lösningar till ekvationen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \rho} \qquad (*)$$

på formen $T(\rho,t) = f\left(\frac{\rho^2}{t}\right)$.

I så fall är $\boxed{\frac{\partial T}{\partial \rho} = f'\left(\frac{\rho^2}{t}\right)\cdot\frac{2\rho}{t}}$ och

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} = \left(f'\left(\frac{\rho^2}{t}\right)\cdot\frac{2\rho}{t}\right)'_\rho = f''\left(\frac{\rho^2}{t}\right)\cdot\frac{2\rho}{t}\cdot\frac{2\rho}{t} + f'\left(\frac{\rho^2}{t}\right)\cdot\frac{2}{t} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} = \frac{4\rho^2}{t^2} f''\left(\frac{\rho^2}{t}\right) + \frac{2}{t} f'\left(\frac{\rho^2}{t}\right)}$$, och dessutom

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = f'\left(\frac{\rho^2}{t}\right) \cdot \left(-\frac{\rho^2}{t^2}\right)}$$

Insättning i (*) ger

$$f'\left(\frac{\rho^2}{t}\right) \cdot \left(-\frac{\rho^2}{t^2}\right) = \frac{4\rho^2}{t^2} f''\left(\frac{\rho^2}{t}\right) + \cancel{\frac{2}{t} f'\left(\frac{\rho^2}{t}\right)} - \cancel{\frac{2}{t} f'\left(\frac{\rho^2}{t}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{4\rho^2}{t^2} f''\left(\frac{\rho^2}{t}\right) + \frac{\rho^2}{t^2} f'\left(\frac{\rho^2}{t}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4 f''\left(\frac{\rho^2}{t}\right) + f'\left(\frac{\rho^2}{t}\right) = 0.$$

Ekvationen $4f''(x) + f'(x) = 0$ har den karakteristiska ekvationen $4\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -\frac{1}{4}$ så

$$f(x) = C_1 + C_2 e^{-\frac{1}{4}x}.$$

$T(\rho, t) = f\left(\frac{\rho^2}{t}\right) = C_1 + C_2 e^{-\frac{\rho^2}{4t}}$ är alltså lösningar till (*).