Lektion 4

2.1 a) $f(x,y) = x + x^3y + x^2y^3 + y^5$

$$f'_x = \begin{bmatrix} x\text{-variabel} \\ y\text{-konstant} \end{bmatrix} = 1 + 3x^2y + 2xy^3$$

$$f'_y = \begin{bmatrix} y\text{-variabel} \\ x\text{-konstant} \end{bmatrix} = x^3 + 3x^2y^2 + 5y^4$$

b) $f(x,y) = \ln(1 - x^2 - 2y^2)$

$$f'_x = \frac{1}{1-x^2-2y^2} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{1-x^2-2y^2}$$

$$f'_y = \frac{1}{1-x^2-2y^2} \cdot (-4y) = \frac{-4y}{1-x^2-2y^2}.$$

c) $f(x,y) = e^{-y^2} \arcsin 2y$.

$$f'_x = \begin{bmatrix} \text{OBS! funkt.} \\ \text{beror inte på } x \end{bmatrix} = 0$$

$$f'_y = \left(e^{-y^2} \arcsin 2y\right)'_y = [\text{produktregel}] =$$

$$= -2y e^{-y^2} \arcsin 2y + e^{-y^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-(2y)^2}}.$$

d) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

$$f'_x = \begin{bmatrix} x\text{-variabel} \\ y\text{-konst} \end{bmatrix} = \frac{(x+y)'_x \cdot (x-y) - (x-y)'_x (x+y)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{(x-y) - (x+y)}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{(x-y)^2}$$

$$f'_y = \left[\begin{matrix} x - \text{konst} \\ y - \text{variabel} \end{matrix}\right] = \frac{(x+y)'_y (x-y) - (x-y)'_y (x+y)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{x - y + x + y}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}.$$

2.2 a) $f(x,y,z) = \cos(xy - z^2)$.

$$f'_x = \left[\begin{matrix} x - \text{variabel} \\ y, z - \text{konst} \end{matrix}\right] = -\sin(xy - z^2) \cdot y$$

$$f'_y = \left[\begin{matrix} y - \text{variabel} \\ x, z - \text{konst} \end{matrix}\right] = -\sin(xy - z^2) \cdot x$$

$$f'_z = \left[\begin{matrix} z - \text{variabel} \\ x, y - \text{konst} \end{matrix}\right] = -\sin(xy - z^2)(-2z) =$$

$$= 2z \sin(xy - z^2)$$

b) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \arctan \frac{y}{x}$

$$f'_x = \frac{1}{\sqrt{z}} \left(\arctan \frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{y}{\sqrt{z}(x^2 + y^2)}$$

$$f'_y = \frac{1}{\sqrt{z}} \left(\arctan \frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{z}\left(x + \frac{y^2}{x}\right)} = \frac{x}{\sqrt{z}(x^2 + y^2)}$$

$$f'_z = \arctan \frac{y}{x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)'_z = \arctan \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) z^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= -\frac{\arctan \frac{y}{x}}{2z\sqrt{z}}$$

2.3 $f(x,y) = x + x^3y + x^2y^3 + y^5$,

$f'_x = 1 + 3x^2y + 2xy^3$

$f'_y = x^3 + 3x^2y^2 + 5y^4$

$$\Rightarrow f''_{xx} = (\underbrace{1+3x^2y+2xy^3}_{=f'_x})'_x = 6xy + 2y^3$$

$$f''_{xy} = (\underbrace{1+3x^2y+2xy^3}_{=f'_x})'_y = 3x^2 + 6xy^2$$

$$f''_{yx} = (\underbrace{x^3+3x^2y^2+5y^4}_{=f'_y})'_x = 3x^2 + 6xy^2$$

$$f''_{yy} = (\underbrace{x^3+3x^2y^2+5y^4}_{=f'_y})'_y = 6x^2y + 20y^3$$

2.4 Om $(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow$

$$f'_x = \left(\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3+y^4)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$f'_y = \left(\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{4y^3(x^2+y^2) - 2y(x^3+y^4)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{4y^3x^2 + \overset{2}{\cancel{4}}y^5 - 2yx^3 \cancel{- 2y^5}}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

Om $(x,y) = (0,0)$ då måste vi använda definitionen:

$$f'_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \quad \text{och}$$
$$f'_y(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}.$$

Vi ser att

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}^1}{\cancel{h}_1} = \underline{1}$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^4}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = \underline{0}.$$

Svar:

$$f'_x = \begin{cases} \dfrac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f'_y = \begin{cases} \dfrac{4x^2y^3+2y^5-2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2.7 a)

integrerar den första ekvationen

$$\begin{cases} z'_x = 2x+y \\ z'_y = x+2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x^2+xy+f(y) \\ z'_y = x+2y \end{cases}$$

När vi integrerar sambandet $z'_x = 2x+y$, så betraktar vi x som variabel och y som konstant. För att få det mest kompleta beskrivningen på alla primitiva funktioner, skriver vi istället för den vanliga konstanten C funktionen $f(y)$. Anledningen för detta är att $(f(y))'_x = 0$).

(Sambandet $z'_y = x+2y$ kunde man integrera likadant:
$z = \int (x+2y)\,dy + g(x) = xy + y^2 + g(x)$)

Insättning av $z = x^2 + xy + f(y)$ i $z'_y = x+2y$ ger:

$$\cancel{x} + f'(y) = \cancel{x} + 2y \Rightarrow f'(y) = 2y \Rightarrow f(y) = y^2 + C,$$

Så $z = x^2 + xy + y^2 + C.$

Svar: $z = x^2 + y^2 + xy + C,$
$C = \text{konst}.$

6) Från den första ekvationen

$$z'_x = e^{xy} \Rightarrow z = \int e^{xy}\,dx + f(y) = \frac{1}{y}e^{xy} + f(y). \quad (*)$$

Insättning av $z = \frac{1}{y}e^{xy} + f(y)$ från $(*)$ i den andra ekvationen $z'_y = e^{xy}$ ger

$$-\frac{1}{y^2}e^{xy} + \frac{x}{y}e^{xy} + f'(y) = e^{xy}$$

$$\Rightarrow f'(y) = \frac{1}{y^2}e^{xy} + e^{xy}\left(1 - \frac{x}{y}\right)$$

Men $f'(y)$ beror endast på y, medan högerledet beror på både x och y?! Vi fick en motsägelse $\Rightarrow$ systemet saknar lösningar.

c) $z'_x = ye^x \Rightarrow z = \int ye^x\,dx + f(y) =$
$= y\int e^x\,dx + f(y) = ye^x + f(y).$ (*)

Insättning $z = ye^x + f(y)$ från (*) i den andra ekv.

$z'_y = 1 + e^x$ ger $\cancel{e^x} + f'(y) = 1 + \cancel{e^x}$, och
$f'(y) = 1$ ger $f(y) = y + C.$

Vi ser att $z = ye^x + y + C$

Svar: $z = y(e^x + 1) + C.$

2.8 Antag att det finns en C^2-funktion z

$$\begin{cases} z'_x = ye^{x^2y^4} \\ z'_y = xe^{x^2y^4} \end{cases}$$

I så fall Sats 9 s.87 i boken säger att

$z''_{xy} = z''_{yx}$ måste gälla.

Men i vårt fall

$$z''_{xy} = \left(ye^{x^2y^4}\right)'_y = e^{x^2y^4} + y\cdot 4x^2y^3e^{x^2y^4} =$$
$$= e^{x^2y^4}\left(1 + 4x^2y^4\right), \text{ och}$$

$$z''_{yx} = \left(xe^{x^2y^4}\right)'_x = e^{x^2y^4} + x\cdot 2xy^4e^{x^2y^4}$$
$$= e^{x^2y^4}\left(1 + 2x^2y^4\right) \text{ dvs}$$

$z''_{xy} \neq z''_{yx} \Rightarrow C^2$-funktion z existerar ej.

6

2.9 a) $u'_x = y + 3z - 3$ kan integreras m a p x.
Observera att istället för konstant C måste vi skriva $f(y,z)$ eftersom $(f(y,z))'_x = 0$. Skriver man bara C får man inte den kompleta beskrivningen på alla primitiva funktioner, och lösningen blir inte korrekt.

$$u'_x = y+3z-3 \Rightarrow (*) \begin{cases} u(x,y,z) = \int (y+3z-3)\,dx + \underbrace{f(y,z)}_{\text{beror inte på } x} \\ \qquad = x(y+3z-3) + f(y,z). \end{cases}$$

Vi vet att $u'_y = x + 2z - 2$, medan $(*)$ ger

$$u'_y = (xy + 3xz - 3x)'_y + (f(y,z))'_y =$$

$$= x + f'_y(y,z) \Rightarrow \text{insättning ger}$$

$$\cancel{x} + f'_y(y,z) = \cancel{x} + 2z - 2, \text{ så } f'_y(y,z) = 2z - 2$$

Vi ser att $f(y,z) = \int (2z-2)\,dy + g(z)$
$= (2z-2)y + g(z)$, så

$$u(x,y,z) = xy + 3xz - 3x + 2zy - 2y + g(z) \quad (*)$$

Till sist, använder vi den tredje ekvationen $u'_z = 2y + 3x - 1$.

$(*)$ ger att $u'_z = 3x + 2y + g'(z)$, så

$2y + 3x - 1 = 3x + 2y + g'(z) \Rightarrow g'(z) = -1$ och
$g(z) = -z + C$

Slutligen, $u(x,y,z) = xy + 3xz + 2yz - 3x - 2y - z + C$

b) $u'_x = 1 + y \sin xy$ ger

$$u(x,y,z) = \int (1 + y \sin xy)\,dx + f(y,z) =$$
$$= x - \cos xy + f(y,z).$$

Vi sätter det här uttrycket för $u(x,y,z)$ in i den andra ekvationen:

$$(x - \cos xy + f(y,z))'_y = e^z + x \sin xy \Leftrightarrow$$
$$x \sin xy + f'_y(y,z) = e^z + x \sin xy, \text{ så}$$
$$f'_y(y,z) = e^z, \text{ och}$$
$$f(y,z) = \int e^z\,dy + g(z) =$$
$$= ye^z + g(z).$$

Vi ser nu att $u(x,y,z) = x - \cos xy + ye^z + g(z)$ (*) och sätter detta in i den tredje ekvationen:

$$(x - \cos xy + ye^z + g(z))'_z = e^z + ye^z + ze^z$$
$$\cancel{ye^z} + g'(z) = \cancel{ye^z} + (e^z + ze^z), \text{ så}$$
$$g(z) = \int \underbrace{(e^z + ze^z)}_{=(ze^z)'}\,dz = ze^z + C.$$

Det följer nu från (*) att

$$u(x,y,z) = x - \cos xy + ye^z + ze^z + C$$

c) $u'_x = z + xy^2 \Rightarrow u(x,y,z) = \int (z+xy^2)\,dx + f(y,z)$
$$= zx + \frac{x^2y^2}{2} + f(y,z).$$

Sätter $u = zx + \frac{x^2y^2}{2} + f(y,z)$ i den andra ekvationen:

$$\left(zx + \frac{x^2y^2}{2} + f(y,z)\right)'_y = x^2y \iff$$

$$x^2y + f'_y(y,z) = x^2y.$$

f beror inte på y!

Det betyder att $f'_y(y,z) = 0 \Rightarrow f(y,z) = g(z)$,

så $u(x,y,z) = zx + \frac{x^2y^2}{2} + g(z)$.

Insättning i den sista ekvationen ger:

$$\left(zx + \frac{x^2y^2}{2} + g(z)\right)'_z = yz$$

$$x + g'(z) = yz \Rightarrow \underbrace{g'(z)}_{\text{beror endast på } z} = \underbrace{yz - x}_{\text{beror på } x,y,z\,!} \quad ?!$$

Motsägelse $\Rightarrow u(x,y,z)$ existerar inte.

2.10 a) $\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow z$ beror inte på x, men kan bero på $y \Rightarrow$

Svar: $z = f(y)$, där $f \in C^2(\mathbb{R})$ är en godtycklig funktion.

b) $\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow z$ beror inte på y, men kan bero på $x \Rightarrow$

Svar $z = f(x)$, $f \in C^2(\mathbb{R})$ är godtycklig.

c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow z'_x$ beror inte på x dvs

$$z'_x(x,y) = f(y) \Rightarrow$$

$$z(x,y) = \underbrace{\int f(y)\,dx}_{= f(y)\cdot x} + g(y).$$

Svar! $z = f(y)\cdot x + g(y)$, $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ är godtyckliga

d) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \Rightarrow z'_x$ beror inte på y dvs

$$z'_x(x,y) = f(x) \Rightarrow$$

$$z(x,y) = \underbrace{\int f(x)\,dx}_{\text{kan skrivas som } h(x)} + g(y).$$

Svar! $z = h(x) + g(y)$, $h, g \in C^2(\mathbb{R})$ är godtyckliga.

e) $\frac{\partial z}{\partial x} = z \Leftrightarrow \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\ln|z|) = 1 \Rightarrow$

$$\ln|z| = x + g(y),$$

så $|z| = e^{x + g(y)}$

$$|z| = e^{g(y)} \cdot e^x$$

$$z = \underbrace{\pm e^{g(y)}}_{= h(y)} \cdot e^x$$

Svar: $z = h(y)\cdot e^x$, där $h \in C^2(\mathbb{R})$ är godtycklig

f) $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot z \Leftrightarrow \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = y \Leftrightarrow \left(\ln|z|\right)'_x = y \Rightarrow$

$\ln|z| = \int y \, dx + f(y) = yx + f(y)$, så

$|z| = e^{yx + f(y)} \Leftrightarrow z = \underbrace{\pm e^{f(y)}}_{= h(y)} \cdot e^{yx}$.

<u>Svar:</u> $z = h(y) \cdot e^{yx}$, där $h \in C^2(\mathbb{R})$ är godtycklig.

Extra

<u>2.5</u> Det är klart att f'_x och f'_y existerar om $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f'_x = \left(\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{2(x+y)(x^2+y^2) - 2x(x+y)^2}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2(x+y)(\cancel{x^2}+y^2-\cancel{x^2}-xy)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \text{ och}$$

$$f'_y = \left(\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$ beräknas likadant.

Om $(x,y) = (0,0) \Rightarrow$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{h^2} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{h^2}-1}{h} = 0.$$

Vi ser att f'_x och f'_y existerar överallt.

Men f är inte kontinuerlig eftersom

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{(\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)^2}{\rho^2} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} (\cos\varphi + \sin\varphi)^2$$ – antar olika värden beroende på φ, vilket betyder att gränsvärdet i $(0,0)$ saknas.

2.6

a) $$f'_x = y^{\cancel{2}} \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{y}} = \frac{y^3}{x^2+y^2} \quad \text{när } y \neq 0$$

När $y=0$, så

$$f'_x(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(x+h,0)}^{=0} - \overbrace{f(x,0)}^{=0}}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Detta kan skrivas som

$$f'_x = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{när } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{när } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Observera att f'_x är kontinuerlig i $\mathbb{R}^2$ eftersom

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\sin^3\varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \overbrace{\rho}^{\to 0} \underbrace{\sin^3\varphi}_{\text{begr.}} =$$

$$= 0 = f(0,0).$$

Nu undersöker vi f'_y:

$$f'_y = 2y\arctan\frac{x}{y} + \frac{\cancel{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{\cancel{y^2}}\right) =$$

$$= 2y\arctan\frac{x}{y} - \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{då} \quad y \neq 0.$$

När $y=0$, så

$$f'_y(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\arctan\frac{x}{h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h \cdot \underbrace{\arctan\frac{x}{h}}_{\text{begränsad}} = 0.$$

Vi kollar om $f'_y = \begin{cases} 2y\arctan\frac{x}{y} - \frac{xy^2}{x^2+y^2} & y \neq 0 \\ 0 & y=0 \end{cases}$

är kontinuerlig. Detta är klart i punkter (a,b) med $b \neq 0$. Dessutom $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow$

$$\left|2y\arctan\frac{x}{y} - \frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq 2|y|\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\cancel{x^2+y^2}}{\cancel{x^2+y^2}}\cdot|y| =$$

$$= |y|(\pi+1),$$

så om $(x,y)\to(a,0)$, vilket innebär $|y|\to 0$, får vi

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} f'_y(x,y) = 0 = f'_y(a,0)$$

i alla riktningar.

Det betyder att f'_y är kontinuerlig i $\mathbb{R}^2$.

Vi ser att f är $C^1(\mathbb{R}^2)$.

b) $f''_{xy}(0,0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f'_x(0,h) - f'_x(0,0)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

$f''_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f'_y(h,0) - f'_y(0,0)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

så $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$. Detta betyder att $f \notin C^2$ (se sats 9 s. 87 i boken).