Lektion 22

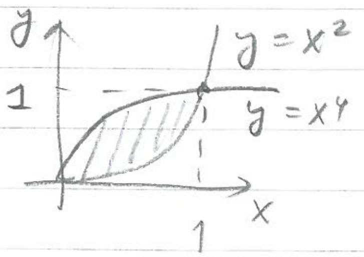
6.35

$\mathcal{D} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z \geq y^2,\ y \geq x^2,\ x \geq z^2 \}$

Eftersom $y \geq x^2$ och $\begin{cases} z \geq y^2 \\ x \geq z^2 \end{cases} \Rightarrow x \geq z^2 \geq y^4 \Rightarrow x \geq y^4$,

är områdets projektion på xy-planet

$\bar{\mathcal{D}} = \{ y \geq x^2,\ x \geq y^4 \} = \{ x^2 \leq y \leq \sqrt[4]{x} \}$



eller $\bar{\mathcal{D}} = \{ 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq \sqrt[4]{x} \}$
från bilden.

När $(x,y) \in \bar{\mathcal{D}}$ så $\begin{cases} z \geq y^2 \\ x \geq z^2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} \geq z \geq y^2$,

och vi får $\mathcal{D} = \{ y^2 \leq z \leq \sqrt{x},\ (x,y) \in \bar{\mathcal{D}} \}$.

$$\text{Volym}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} dx\,dy\,dz = \iint_{\bar{\mathcal{D}}} \left(\int_{y^2}^{\sqrt{x}} dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_{\bar{\mathcal{D}}} \left(\sqrt{x} - y^2 \right) dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt[4]{x}} \left(\sqrt{x} - y^2 \right) dy \right) dx =$$

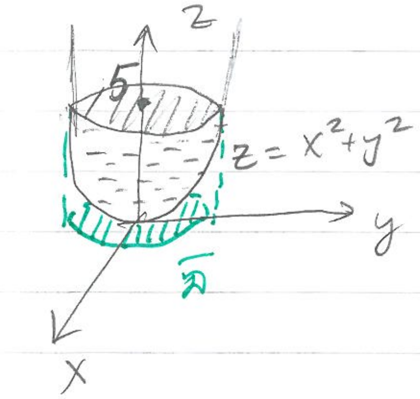
$$= \int_0^1 \left[\sqrt{x} \cdot y - \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt[4]{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{4}} - \frac{x^{\frac{3}{4}}}{3} - x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^6}{3} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{x^{7/4}}{7/4} - \frac{x^{7/2}}{\frac{7}{2}} + \frac{x^7}{3 \cdot 7} \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} - \frac{2}{7} + \frac{1}{3 \cdot 7} = \frac{\cancel{9}^{\,3}}{\cancel{3} \cdot 7} - \frac{2}{7} = \boxed{\frac{1}{7}}$$

6.37



Vätskan i glaset utgör ett område $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ som begränsas av planet $z=5$ uppifrån och av paraboloiden $z=x^2+y^2$ underifrån

Områdets projektion på xy-planet är $\overline{\mathcal{D}} = \{ x^2+y^2 \leq 5 \}$, så vi kan skriva

$\mathcal{D} = \{ x^2+y^2 \leq z \leq 5, \ (x,y) \in \overline{\mathcal{D}} \}$.

$$\text{Volym}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} dx\,dy\,dz = \iint_{\overline{\mathcal{D}}} \left(\int_{x^2+y^2}^{5} dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_{\overline{\mathcal{D}}} (5-x^2-y^2)\,dx\,dy =$$

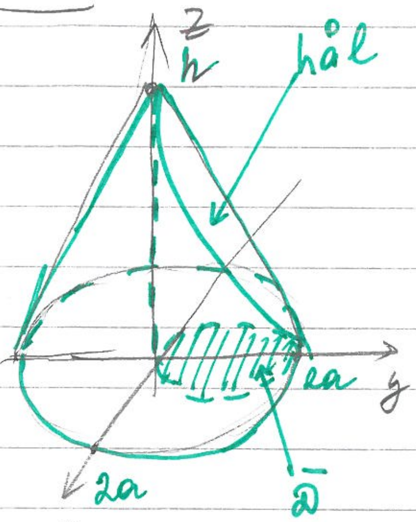
$$= \left[\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & \dfrac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = r \\ y = r\sin\varphi & \\ x^2+y^2 = r^2 \leq 5 \Rightarrow 0 \leq r \leq \sqrt{5}, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{5}} (5-r^2)\,r\,dr \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{5r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{5}} d\varphi =$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{25}{2} - \frac{25}{4} \right) = 2\pi \cdot \frac{25}{4} = \boxed{\frac{25\pi}{2}} \ (\text{cm}^3)$$

6.39



Konens volym är $\frac{4}{3} h \pi a^2$.

Låt den del av volymen som har tagits bort vara D.

Ds projektion på xy-plan är

$\bar{D} = \{ (y-a)^2 + x^2 \le a^2 \}$ – cirkeln med centrum i $(0, a)$ och radien a.

För att bestämma gränserna för z, måste vi först skriva ekvationen för konens yta.

När $x=0 \Rightarrow z = h - \frac{h}{2a} \cdot x$.

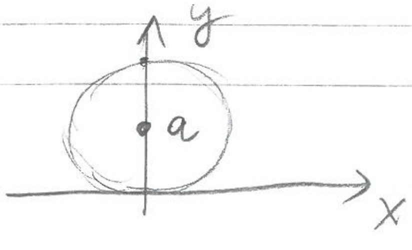
Eftersom ytan är rotationssymmetrisk kan vi nu skriva $z = h - \frac{h}{2a}\sqrt{x^2+y^2}$ – konens ekv.

Vi ser att $D = \{ 0 \le z \le h - \frac{h}{2a}\sqrt{x^2+y^2},\ (x,y) \in \bar{D} \}$,

så $\text{Volym}(D) = \iint_{(x,y)\in\bar{D}} \int_0^{h-\frac{h}{2a}\sqrt{x^2+y^2}} dz\, dx\, dy =$

$$= \iint_{(x,y)\in\bar{D}} \left(h - \frac{h}{2a}\sqrt{x^2+y^2} \right) dx\, dy = \otimes$$

Vi byter mot vanliga polära koordinater (jämför med 6.13b från Lektion 19)



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$0 \le \varphi \le \pi$
(då området ligger i 1-a och 2a kvadrant).

På områdets rand gäller

$$(r\sin\varphi - a)^2 + (r\cos\varphi)^2 = a^2 \iff$$

$$r^2\sin^2\varphi - 2ar\sin\varphi + \cancel{a^2} + r^2\cos^2\varphi = \cancel{a^2} \iff$$

$$r^2 - 2ar\sin\varphi = 0 \iff$$

$$r = 2a\sin\varphi.$$

Vi kan alltså skriva

$$\overline{D} = \{0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le r \le 2a\sin\varphi\} \Rightarrow$$

$$(*) = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{2a\sin\varphi}\left(h - \frac{h}{2a}r\right)r\,dr\,d\varphi\right) =$$

$$= \int_0^{\pi}\left[\frac{hr^2}{2} - \frac{hr^3}{6a}\right]_{r=0}^{r=2a\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi}\left(2a^2h\sin^2\varphi - \frac{8a^3h}{6a}\sin^3\varphi\right)d\varphi =$$

$$= a^2h\int_0^{\pi}(1 - \underbrace{\cos 2\varphi}_{\text{ger 0 vid integration!}})\,d\varphi - \frac{4a^2h}{3}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= \pi a^2h + \frac{4a^2h}{3}\left[\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} =$$

$$= \pi a^2h + \frac{4a^2h}{3}\left(-1 - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \pi a^2h - \frac{16a^2h}{9}.$$

Den resterande volymen $= \frac{4}{3}\pi ha^2 - \left(\pi a^2h - \frac{16a^2h}{9}\right) =$

$$= \boxed{\frac{1}{3}\pi ha^2 + \frac{16a^2h}{9}}$$

6.40

För en kropp K är massan lika med

$$\iiint_K \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

där $\rho(x,y,z)$ är densiteten i punkt (x,y,z)

a) Om densiteten är $\rho = \text{konst}$ och K är ett halvklot med radie R så massan är

$$\iiint_K \rho\,dx\,dy\,dz = \rho \iiint_K dx\,dy\,dz =$$

$$= \rho \cdot \text{Volym}(K) =$$

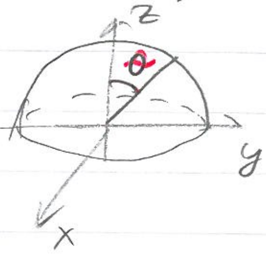
$$= \rho \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2\pi\rho}{3} R^3$$

b) Låt nu $\rho = k \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $k = \text{konst}$.

Vi använder rymdpolära koordinater

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \left|\frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\varphi)}\right| = r^2\sin\theta$$

$$\underbrace{0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}}_{\text{halvklot!}}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le R$$



Massan är

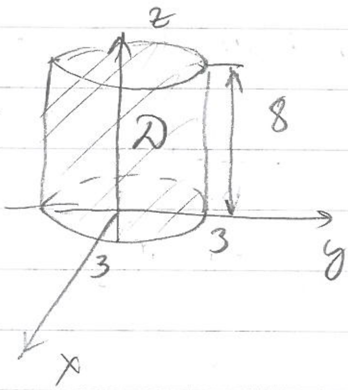
$$\iiint_K k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= k\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\left(\int_0^{\pi/2} r^3 \cdot \sin\theta\,d\theta\right)dr\right)d\varphi =$$

$$= k \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^3 \left[-\cos\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} dr \right) d\varphi =$$

$$= k \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^3 \, dr \right) d\varphi = k \cdot \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi = \boxed{\frac{k\pi R^4}{2}}$$

6.41



I koordinater x, y, z är densiteten

$$(10-z)^2\left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Massan är

$$\iiint_{D} (10-z)^2\left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{områdets projektion på } xy\text{-planet är} \\ \overline{D} = \{ x^2+y^2 \leq 9 \}, \quad (x,y)\in\overline{D} \Rightarrow 0 \leq z \leq 8 \end{array} \right] =$$

$$= \iint_{\overline{D}} \left(\int_0^8 (10-z)^2\left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right) dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_{\overline{D}} \left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right)\left[-\frac{(10-z)^3}{3}\right]_{z=0}^{z=8} dx\,dy =$$

$$= \iint_{\overline{D}} \left(4-\sqrt{x^2-y^2}\right)\left(-\frac{8}{3}+\frac{1000}{3}\right) dx\,dy = \left[\begin{array}{l}\text{polära} \\ \text{koord.}\end{array}\right] =$$

$$= \frac{992}{3} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 (4-r)\cdot r \, dr \right) d\varphi =$$

$$= \frac{992}{3} \cdot 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=3} =$$

$$= \frac{992}{3}\cdot 2\pi\cdot(18-9) = \frac{992\cdot 2\pi\cdot \cancel{9}^{3}}{\cancel{3}} = \boxed{5952\pi}\ (kg)$$

6.42

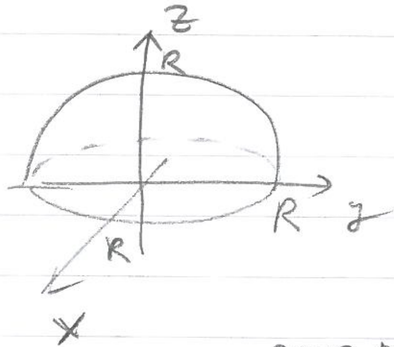
Tyngdpunktens koordinater för en kropp $\mathcal{D}$ är

$$x_T = \frac{\iiint_{\mathcal{D}} x\rho\, dx\,dy\,dz}{\iiint_{\mathcal{D}} \rho\, dx\,dy\,dz}, \quad y_T = \frac{\iiint_{\mathcal{D}} x\rho\, dx\,dy\,dz}{\iiint_{\mathcal{D}} \rho\, dx\,dy\,dz},$$

$$z_T = \frac{\iiint_{\mathcal{D}} z\rho\, dx\,dy\,dz}{\iiint_{\mathcal{D}} \rho\, dx\,dy\,dz}$$ där ρ - densitet.

a) $\mathcal{D} = \{x^2+y^2+z^2 \le R^2,\quad z \ge 0\} =$

$= \{0 \le r \le R;\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$



Om $\rho = \text{konst} \Rightarrow \iiint_{\mathcal{D}} \rho\, dx\,dy\,dz = \rho\cdot \text{Volym}(\mathcal{D}) = \frac{2\pi\rho R^3}{3}$

$$x_T = \frac{\iiint_{\mathcal{D}} x\cdot\cancel{\rho}\, dx\,dy\,dz}{\frac{2\pi\cancel{\rho}R^3}{3}} = \left[\begin{array}{l}\text{sfäriska koord.,}\\ x = r\sin\theta\cos\varphi\end{array}\right]$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3}\int_0^R\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin\theta\cos\varphi\cdot r^2\sin\theta\, d\theta\right)d\varphi\right)dr$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3}\int_0^R r^3\,dr\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi}_{=0}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\, d\theta$$

$= 0$

$y_T = 0$ kan man visa likadant.

$$z_T = \frac{\iiint\limits_D z \cdot \cancel{\rho}\, dx\,dy\,dz}{\frac{2\pi \cancel{\rho} R^3}{3}} =$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta \; r^2 \sin\theta \, d\theta \right) d\varphi \right) dr =$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{2} \, d\theta =$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi \cdot \left[-\frac{\cos 2\theta}{4} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{3R}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3R}{8}$$

<u>Svar:</u> $(x_T, y_T, z_T) = \left(0, 0, \frac{3R}{8}\right)$.

b) När $\rho = k\sqrt{x^2+y^2+z^2} = kr$, då

$$\iiint\limits_D \rho \, dx\,dy\,dz = \frac{k\pi R^4}{2}$$ (se <u>6.40 b</u>).

I så fall

$$x_T = \frac{2}{k\pi R^4} \iiint\limits_D x \rho \, dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{2}{k\pi R^4} \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin\theta\cos\varphi \cdot kr \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \right) d\varphi \right) dr =$$

$$= \frac{2\cancel{k}}{\cancel{k}\pi R^4} \cdot \int_0^R r^4 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi}_{=0} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \, d\theta = 0$$

$y_T = 0$ visas likadant

$$z_T = \frac{2}{k\pi R^4} \iiint_{D} z\, \rho \, dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{2}{k\pi R^4} \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta \cdot kr \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \right) d\varphi \right) dr$$

$$= \frac{2\cancel{k}}{\cancel{k}\pi R^4} \cdot \int_0^R r^4 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta =$$

$$= \frac{2}{\cancel{\pi} \cancel{R^4}} \cdot \frac{R^{\cancel{5}}}{5} \cdot 2\cancel{\pi} \cdot \left[\frac{-\cos 2\theta}{4} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{4R}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{2R}{5}$$

Svar: $(x_T, y_T, z_T) = \left(0, 0, \frac{2R}{5}\right)$.

Extra

6.36

a) Betrakta två cylindrar

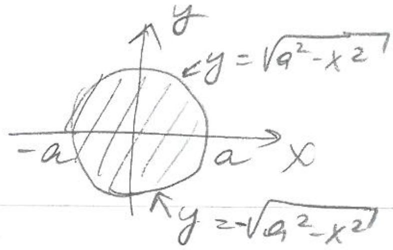
$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2 \le a^2 \\ x^2+z^2 \le a^2 \end{array}\right\} \text{ – beskriver området } D \subset \mathbb{R}^3$$

Projektionen på xy-planet är $x^2+y^2 \le a^2$, och $-\sqrt{x^2-a^2} \le z \le \sqrt{a^2-x^2}$

$$\text{Volym}(D) = \iint_{x^2+y^2 \le a^2} \int_{-\sqrt{x^2-a^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz =$$

$$= 2 \iint_{x^2+y^2 \le a^2} \sqrt{a^2-x^2}\, dx\,dy =$$

$$= 2\int_{-a}^{a} \left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2}\, dy \right) dx =$$



$$= 2\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2} \left[y \right]_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} dx =$$

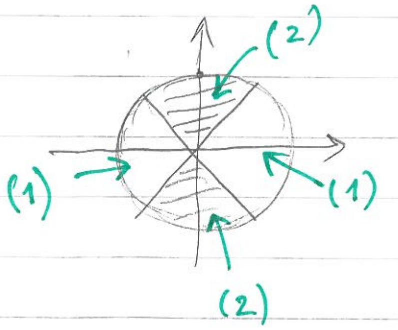
$$= 2\int_{-a}^{a} 2(a^2-x^2)\,dx = 4\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-a}^{x=a} =$$

$$= 4\left(a^3+a^3-\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{3}\right) = \boxed{\frac{16a^3}{3}}$$

b) Låt $\begin{cases} x^2+y^2 \le a^2 \\ x^2+z^2 \le a^2 \\ y^2+z^2 \le a^2 \end{cases}$ vara de tre cylindrarnas skärningsmängd $\mathcal{D}$.

Projektionen på xy-planet är cirkeln $x^2+y^2 \le a^2$, och i så fall satisfierar z ett ekvationssystem

$$\begin{cases} -\sqrt{a^2-x^2} \le z \le \sqrt{a^2-x^2} \\ -\sqrt{a^2-x^2} \le z \le \sqrt{a^2-y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} -\sqrt{a^2-x^2} \le z \le \sqrt{a^2-x^2} \text{ då } |x| \ge |y| & (1) \\ -\sqrt{a^2-y^2} \le z \le \sqrt{a^2-y^2} \text{ då } |y| \ge |x| \end{cases}$$



$$\text{Volym}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_{\substack{x^2+y^2 \le a^2 \\ |x| \ge |y|}} \left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz \right) dx\,dy +$$

$$+ \iint_{\substack{x^2+y^2 \le a^2 \\ |y| \ge |x|}} \left(\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} dz \right) dx\,dy =$$

gör t ex var. byte $y \leftrightarrow x$ eller använd områdets symmetri

$$= 2 \iint\limits_{\substack{x^2+y^2 \le a^2 \\ |x| \le |y|}} 2\sqrt{a^2-y^2}\, dx\, dy =$$

$$= 16 \iint\limits_{\substack{x^2+y^2 \le a^2 \\ y > x > 0}} \sqrt{a^2-y^2}\, dx dy =$$

pga symmetri

$$= 16 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2\varphi} \cdot r\, dr \right) d\varphi$$

$$= 16 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\left(a^2 - r^2 \sin^2\varphi\right)^{3/2}}{-\cancel{2} \sin^2\varphi \cdot \frac{3}{\cancel{2}}} \right]_{r=0}^{r=a} d\varphi =$$

$$= -\frac{16}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^3\varphi \cdot a^3}{\sin^2\varphi} - \frac{a^3}{\sin^2\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= -\frac{16a^3}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2} \left(\frac{(1-\sin^2\varphi)\cos\varphi}{\sin^2\varphi} - \frac{1}{\sin^2\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= -\frac{16a^3}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2} \left(\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} - \cos\varphi \right) d\varphi - \frac{16a^3}{3} \Big[\cot an\,\varphi \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

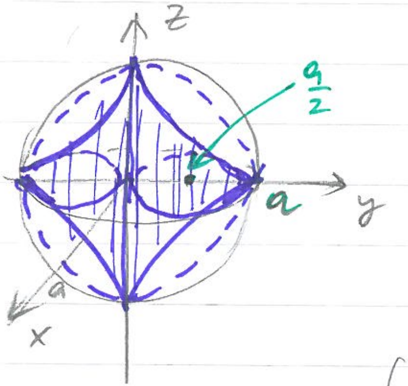
$$= -\frac{16a^3}{3} \Big[-\sin\varphi^{-1} - \sin\varphi \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{16a^3}{3} \Big[\cot an\,\varphi \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{16a^3}{3}\left(-2 + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) = \frac{-16a^3}{3}\left(-3 + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \boxed{8a^3(2-\sqrt{2})}$$

6.38

Klotets volym är $\frac{4\pi a^3}{3}$.



Cylinderns volym (den del som ligger inom klotet) måste beräknas. Vi kan beskriva detta område som

$$\mathcal{D}: \begin{cases} \left(y-\frac{a}{2}\right)^2 + x^2 \le \frac{a^2}{4}, \\ -\sqrt{a^2-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{a^2-x^2-y^2}, \end{cases} \text{ så}$$

$$\text{Volym}(\mathcal{D}) = \iint\limits_{(y-\frac{a}{2})^2+x^2 \le \frac{a^2}{4}} \left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{(y-\frac{a}{2})^2+x^2 \le \frac{a^2}{4}} 2\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & 0 \le \varphi \le \pi \text{ då } y \ge 0 \\ y = r\sin\varphi & (y-\frac{a}{2})^2+x^2 \le \frac{a^2}{4} \text{ blir} \\ & 0 \le r \le a\sin\varphi \end{array} \right\}$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\int_0^{a\sin\varphi} 2\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,dr \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \left[-\frac{2(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_{r=0}^{r=a\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(-\frac{2a^3|\cos\varphi|^3}{3} + \frac{2a^3}{3} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{2a^3\pi}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a^3\cos^3\varphi}{3}\,d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2a^3\cos^3\varphi}{3}\,d\varphi =$$

$$= \frac{2a^3\pi}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a^3}{3}(1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\,d\varphi +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2a^3}{3}(1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{2a^3\pi}{3} - \frac{2a^3}{3}\left[\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$+ \frac{2a^3}{3}\left[\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\pi} =$$

$$= \frac{2a^3\pi}{3} - \frac{2a^3}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) - \frac{2a^3}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{2a^3\pi}{3} - \frac{8a^3}{9}.$$

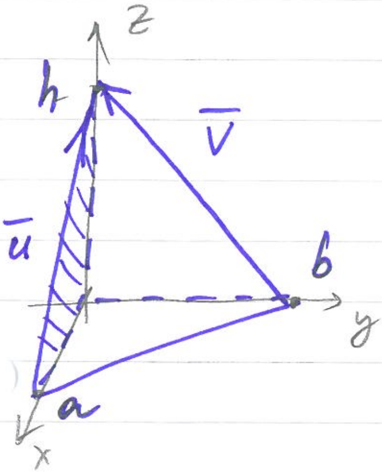
Den resterande delen av klotet har volym

$$\frac{4\pi a^3}{3} - 2\left(\frac{2a^3\pi}{3} - \frac{8a^3}{9}\right) = \boxed{\frac{16a^3}{9}}$$

6.43

Tetraederns massa är

$$\rho \cdot \text{Volym} = \rho \cdot \frac{1}{3}\underbrace{h}_{\text{höjd}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}ab}_{\text{basytan}} = \boxed{\frac{abh\rho}{6}}$$



Vi skriver ekvationen för planet genom $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,h)$.

Om $\bar{u} = (a,0,-h)$, $\bar{v} = (0,b,-h)$ då är planets normal

$\bar{u} \times \bar{v} = (bh, ah, ab)$, så

planets ekvation är $bh \cdot x + ah \cdot y + ab(z-h) = 0$
eller $bh \cdot x + ah \cdot y + ab \cdot z = abh$

Områdets projektion $\bar{D}$ på xz-planet kan skrivas som

$$\bar{D} = \{0 \le z \le h,\ 0 \le x \le a - \frac{a}{h}z\},$$

och när $(x,y) \in \bar{D} \Rightarrow 0 \le y \le b - \frac{b}{a}x - \frac{b}{h}z$.

$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \int_0^h \left(\int_0^{a-\frac{a}{h}z} \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x-\frac{b}{h}z} z\,dy \right) dx \right) dz =$$

$$= \int_0^h \left(\int_0^{a-\frac{a}{h}z} z\left(b - \frac{b}{a}x - \frac{b}{h}z\right) dx \right) dz =$$

$$= \int_0^h \left(zb\left(a - \frac{a}{h}z\right) - \frac{zb}{a}\frac{\left(a-\frac{a}{h}z\right)^2}{2} - \frac{b}{h}z^2\left(a - \frac{a}{h}z\right) \right) dz$$

$$= \int_0^h \left(\left(a - \frac{a}{h}z\right) \cdot zb\left(1 - \frac{z}{h}\right) - \frac{zba\left(1-\frac{z}{h}\right)^2}{2} \right) dz =$$

$$= \int_0^h \frac{zba\left(1-\frac{z}{h}\right)^2}{2}\,dz =$$

$$= \frac{ba}{2}\int_0^h \left(z - \frac{2z^2}{h} + \frac{z^3}{h^2}\right) dz =$$

$$= \frac{ba}{2}\left[\frac{z^2}{2} - \frac{2z^3}{3h} + \frac{z^4}{4h^2}\right]_{z=0}^{z=h} =$$

$$= \frac{ba}{2}\left(\frac{h^2}{2} - \frac{2h^2}{3} + \frac{h^2}{4}\right) = \frac{ba}{2}\cdot\frac{(6-8+3)h^2}{12} = \frac{bah^2}{24}$$

I så fall är

$$\rho = \text{konst!}$$

$$z_T = \frac{\iiint_D z\cdot\rho\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho\,dx\,dy\,dz} = \frac{\frac{bah^2\cancel{\rho}}{24}}{\frac{abh\cancel{\rho}}{6}} = \boxed{\frac{h}{4}}$$