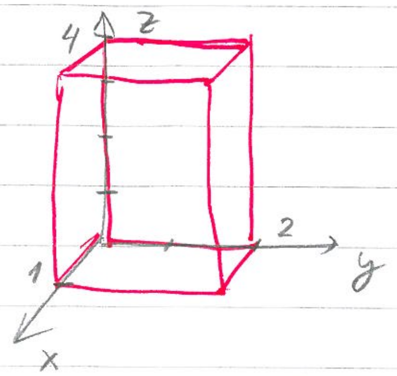
Lektion 20

6.17

Området $\mathcal{D}$ definieras av olikheterna

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2, \quad 0 \le z \le 4$$



så $\sqrt[3]{x} + y + \sqrt{z} \le \sqrt[3]{1} + 2 + \sqrt{4} = 5$

$$\Rightarrow \iiint_{\mathcal{D}} \left(\sqrt[3]{x} + y + \sqrt{z}\right) dx\,dy\,dz \le$$

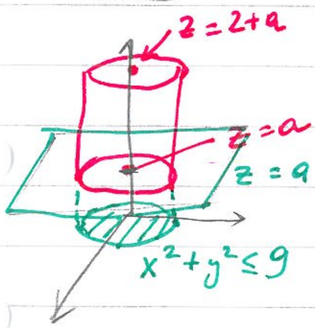
$$\le \iiint_{\mathcal{D}} 5\, dx\,dy\,dz = 5 \cdot \text{Volym}(\mathcal{D}) =$$

$$= 5 \; 1 \cdot 2 \cdot 4 = 40 < 50$$

$$\text{Volym}(\mathcal{D}) = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^4 \left(\sqrt[3]{x} + y + \sqrt{z}\right) dz \right) dy \right) dx = \ldots = \boxed{\frac{74}{3}}.$$

6.18

Låt cylinderns bottenyta ligga i planet $z = a$. Cylinderns projektion på xy-planet är cirkelskivan $E = \{x^2 + y^2 \le 9\}$. När $(x, y) \in E$ så $a \le z \le 2 + a \Rightarrow \mathcal{D}$ kan beskrivas av olikheterna



$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) : a \le z \le 2 + a,\ (x, y) \in E\}$$

$$\Rightarrow \iiint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)\, z\, dx\,dy\,dz = \iint_E \left(\int_a^{2+a} (x^2 + y^2)\, z\, dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_E (x^2 + y^2) \overbrace{\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=a}^{z=2+a}}^{= \frac{(2+a)^2 - a^2}{2}} dx\,dy = \iint_E (x^2 + y^2) \frac{4 + 4a}{2}\, dx\,dy$$

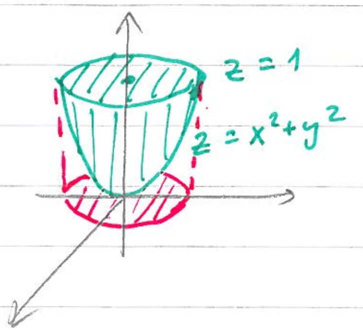
$$= (2 + 2a) \iint_E (x^2 + y^2)\, dx\,dy = \left[\begin{matrix} x = r\cos\varphi & 0 \le r \le 3 \\ y = r\sin\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ x^2 + y^2 = r^2 \le 9 & \end{matrix} \right] =$$

$$= (2 + 2a) \int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 r^2 \cdot r\, dr \right) d\varphi =$$

$$= (2+2a)\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=3} d\varphi =$$

$$=(2+2a)\cdot 2\pi \cdot \frac{3^4}{4} = \boxed{81\pi(a+1)}$$

6.19



1) Paraboloidens projektion på xy-planet är cirkelskivan

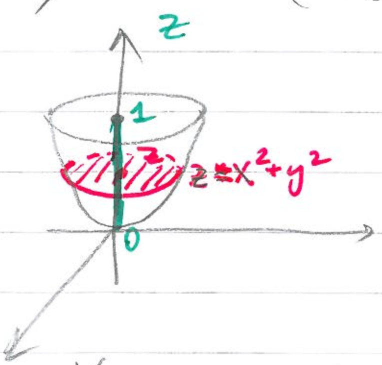
$$\bar{D} = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}.$$

För $(x,y) \in \bar{D}$ har vi $x^2+y^2 \le z \le 1$, så vi kan skriva

$$D = \{x^2+y^2 \le z \le 1,\ (x,y) \in \bar{D}\} \Rightarrow$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\underbrace{x^2+y^2\le 1}_{=\bar{D}}} \left(\int_{x^2+y^2}^{1} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

2) När $(x,y,z) \in$ paraboloiden $\Rightarrow 0 \le z \le 1$.



Betrakta D_z = ett område som uppstår då man skär paraboloiden med planet som går genom $(0,0,z)$.

Vi ser att D_z är en cirkelskivan $x^2+y^2 \le z$ i planet genom $(0,0,z)$.

I så fall kan vi skriva

$$\mathcal{D} = \{ 0 \le z \le 1; \quad x^2+y^2 \le z \} \Rightarrow$$

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \Big(\underbrace{\iint_{x^2+y^2 \le z}}_{= D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \Big) dz$$

Vi använder nu den första formeln och beräknar

$$\iiint_{\mathcal{D}} z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2 \le 1} \Big(\int_{x^2+y^2}^{1} z\sqrt{x^2+y^2}\,dz \Big) dx\,dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le 1} \sqrt{x^2+y^2} \cdot \Big[\frac{z^2}{2} \Big]_{z=x^2+y^2}^{z=1} dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \le 1} \sqrt{x^2+y^2} \left(1 - (x^2+y^2)^2 \right) dx\,dy =$$

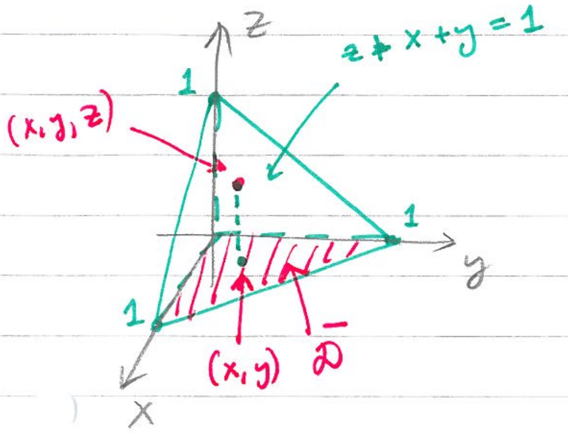
$$= \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi & x^2+y^2 = r^2 \le 1 \Rightarrow & 0 \le r \le 1 \\ y = r\sin\varphi & \left|\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)}\right| = r & 0 \le \varphi \le 2\pi \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 r(1-r^4) \cdot r\,dr \Big) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 (r^2 - r^6)\,dr \Big) d\varphi =$$

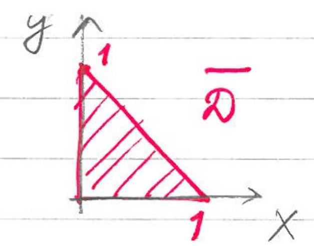
$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Big[\frac{r^3}{3} - \frac{r^7}{7} \Big]_{r=0}^{r=1} d\varphi = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) = \boxed{\frac{4\pi}{21}}$$

6.20



Mängden D är en pyramid.

Projektionen på xy-planet är triangeln $\bar{D}$



När $(x,y) \in \bar{D} \Rightarrow 0 \le z \le 1-x-y$ dvs

$$D = \{0 \le z \le 1-x-y,\ (x,y) \in \bar{D}\}.$$

Integralen kan i så fall skrivas som

$$I = \iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3} = \iint_{\bar{D}} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \right) dx\,dy.$$

Men vi kan även skriva $\bar{D} = \{0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1-x\} \Rightarrow$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[-\frac{1}{2}(1+x+y+z)^{-2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(-\frac{1}{2} \cdot (1+\cancel{x}+\cancel{y}+1-\cancel{x}-\cancel{y})^{-2} + \frac{1}{2}(1+x+y)^{-2} \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\frac{1}{2}(1+x+y)^{-2} - \frac{1}{8} \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{1}{2}(1+x+y)^{-1} - \frac{1}{8}y \right]_{y=0}^{y=1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}(1+\cancel{x}+1-\cancel{x})^{-1} - \frac{1}{8}(1-x) + \frac{1}{2}(1+x)^{-1} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{2}(1+x)^{-1} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{3}{8} + \frac{x}{8} + \frac{1}{2}(1+x)^{-1} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{3}{8}x + \frac{x^2}{16} + \frac{1}{2}\ln(1+x) \right]_{x=0}^{x=1} =$$

$$= -\frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\ln 2 = \boxed{\frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}}$$

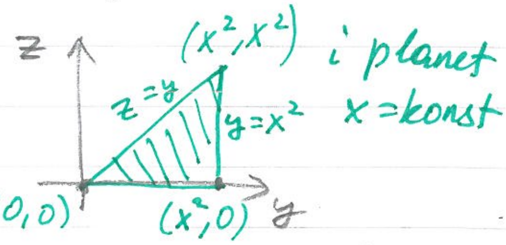
6.21

a) Om vi vill projicera mängden på x-axeln då måste vi ta reda på gränserna för x.

Olikheten $0 \le z \le y \le x^2 \le 1$ ger $x^2 \le 1 \Leftrightarrow$ $-1 \le x \le 1$.

Låt $x = \text{konst} \Rightarrow$ koordinaterna y och z satisfierar

$$0 \le z \le y \le x^2.$$

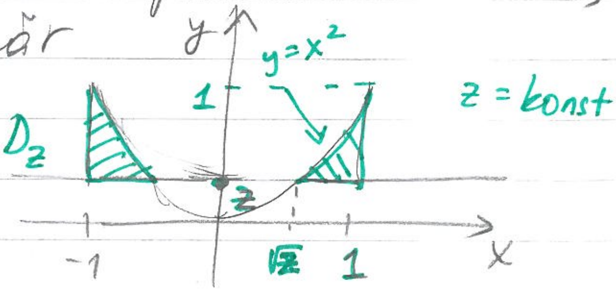


D v s D_x är en triangel med hörn $(x,0,0)$ $(x,x^2,0)$, (x,x^2,x^2), då $-1 \le x \le 1$.

c) Från $0 \le z \le y \le x^2 \le 1$ ser man att $0 \le z \le 1$, vilket är projektionen på z-axeln.

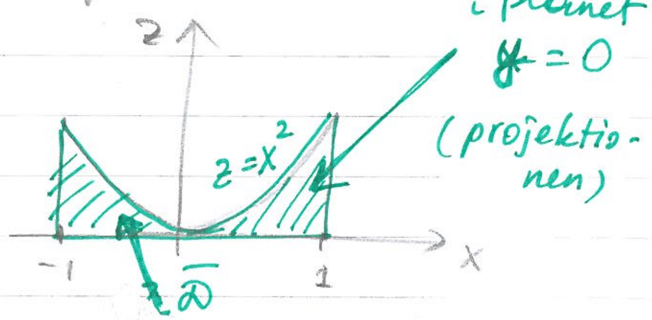
Låt nu $z = \text{konst} \ge 0$.

I så fall $z \le y \le x^2 \le 1$ i planet $z = \text{konst}$, d v s D_z ser ut så här



D_z består alltså av två delar.
Den ena avgränsas av sträckan mellan $(\sqrt{z}, z, z)$ och $(1, z, z)$, sträckan mellan $(1, z, z)$ och $(1, 1, z)$, och parabelbyten $y = x^2$ mellan $(\sqrt{z}, z, z)$ och $(1, 1, z)$. Den andra byten får man om man speglar den första i y-axeln (detta är ekvivalent med att byta tecken på x-koordinaten).

e) Från $0 \le z \le y \le x^2 \le 1$ ser vi att $0 \le z \le x^2 \le 1$ vilket är proektionen $\bar{D}$ av D på xz-planet.



När $(x, z) \in \bar{D}$ så $z \le y \le x^2$;

d v s D_{xz} (mängden av alla punkter där $x = \text{konst}$, $z = \text{konst}$) är sträckan mellan (x, z, z) och (x, x^2, z)

minsta värdet för z
är konst
är konst
största värdet för y

6.22

Vi använder representationen av mängden $\mathcal{D}$ från 6.21 e:

$$\mathcal{D} = \{ z \le y \le x^2 ;\ (x,z) \in \overline{\mathcal{D}} = \{0 \le z \le x^2 \le 1\} \},$$

villket ger ~~os~~ integralen

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{z}{1+x^2}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint_{\overline{\mathcal{D}}} \left(\int_z^{x^2} \frac{z}{1+x^2}\, dy \right) dx\, dz =$$

$$= \iint_{\overline{\mathcal{D}}} \left(\frac{z(x^2 - z)}{1+x^2} \right) dx\, dz = \left[\overline{\mathcal{D}} = \{-1 \le x \le 1 ;\ 0 \le z \le x^2\} \right]$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{x^2} \left(\frac{z x^2}{1+x^2} - \frac{z^2}{1+x^2} \right) dz \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=x^2} - \frac{1}{1+x^2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{z=x^2} \right) dx =$$

polynom-division

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3(1+x^2)} \right) dx = \frac{1}{6} \int_{-1}^{1} \frac{x^6}{1+x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{6} \int_{-1}^{1} \left(x^4 - x^2 + 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x - \arctan x \right]_{x=-1}^{x=1} =$$

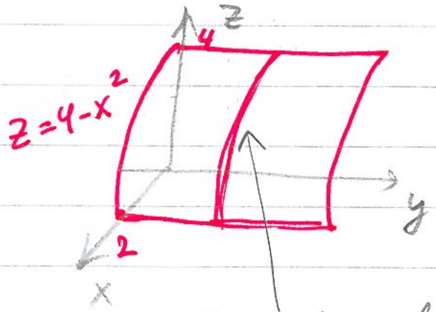
$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+1+1-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+2-\frac{2\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+1-\frac{\pi}{4}\right)$$

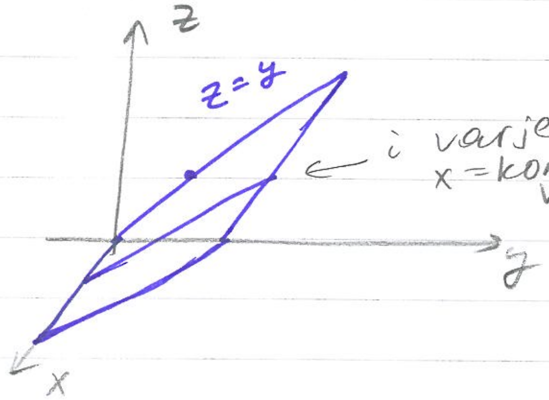
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3-5+15}{15}-\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{3}\left(\frac{13}{15}-\frac{\pi}{4}\right).}$$

6.25

Området begränsas av planet $z = y$ och cylinder $z = 4 - x^2$, här är deras separata bilder

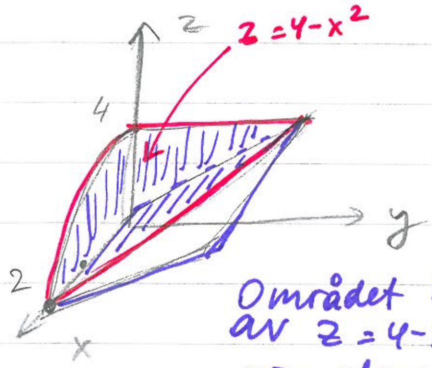


i varje plan $y = \text{konst}$ har vi kurvan $z = 4 - x^2$.



i varje plan $x = \text{konst}$ har vi linjen $z = y$

Området som begränsas av dessa två ytor och ligger i den positiva oktanten ser ut så här och kan beskrivas av olikheterna som $0 \le y \le z \le 4 - x^2$



Området är begränsad av $z = 4 - x^2$ uppifrån xz-planet, yz-planet på sidorna och planet $z = y$ underifrån.

Vi projicerar området på xy-planet. Projektionen $\overline{D}$ beskrivs av olikheterna

$$0 \le y \le 4 - x^2$$

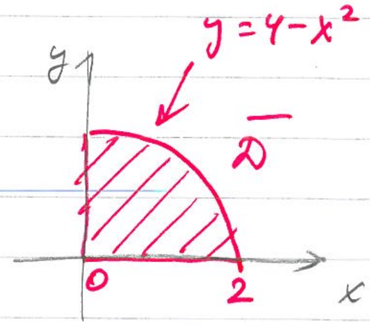
När $(x,y) \in \overline{D}$ så $y \le z \le 4-x^2$,
vilket betyder att

$$D = \{ y \le z \le 4-x^2,\ (x,y) \in \overline{D} = \{ 0 \le y \le 4-x^2 \} \}$$

I så fall

$$\iiint_D 2x\,dx\,dy\,dz = \iint_{\overline{D}} \left(\int_y^{4-x^2} 2x\,dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_{\overline{D}} 2x\,(4-x^2-y)\,dx\,dy =$$



$$= \int_0^2 \left(\int_0^{4-x^2} \left(2x(4-x^2) - 2xy \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left(2x(4-x^2) \left[y \right]_{y=0}^{y=4-x^2} - x \left[y^2 \right]_{y=0}^{y=4-x^2} \right) dx =$$

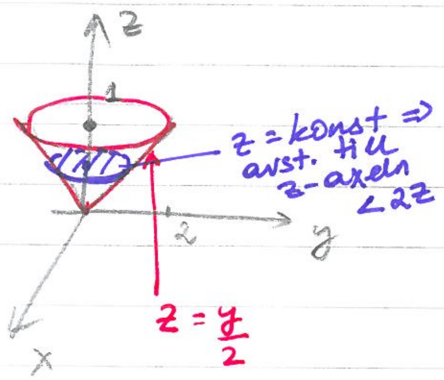
$$= \int_0^2 \left(2x(4-x^2)^2 - x(4-x^2)^2 \right) dx =$$

$$= \int_0^2 x(4-x^2)^2\,dx = \left[\left((4-x^2)^3 \right)' = -6x(4-x^2)^2 \right] =$$

$$= \left[-\frac{1}{6}(4-x^2)^3 \right]_{x=0}^{x=2} = 0 + \frac{4^3}{6} = \frac{64}{6} = \boxed{\frac{32}{3}}.$$

Extra

6.23



Konens yta beskrivs av ekvationen

$$z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

(eftersom $z = 1$ då $x^2+y^2=4$).

Konens projektion på z-axeln är $0 \le z \le 1$. När $z = \text{konst}$, så

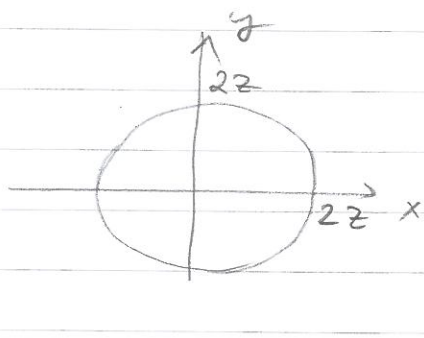
$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \le z \iff \sqrt{x^2+y^2} \le 2z.$$

Vi ser att $\mathcal{D} = \{ \sqrt{x^2+y^2} \le 2z,\ 0 \le z \le 1 \} \Rightarrow$

$$\iiint_{\mathcal{D}} (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\iint_{\sqrt{x^2+y^2} \le 2z} (y^2+z^2)\,dx\,dy \right) dz =$$

$= \otimes$

Området $\sqrt{x^2+y^2} \le 2z$ är en cirkelskiva med radien $2z$ ⇒ vi inför polära koordinater



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad 0 \le r \le 2z, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad \text{så}$$

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2} \le 2z} (y^2+z^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2z} (r^2\sin^2\varphi + z^2)\, r\,dr \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \sin^2\varphi + \frac{z^2 r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=2z} d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(4z^2 \sin^2\varphi + 2z^4 \right) d\varphi = \left[2\sin^2\varphi = 1 - \cos 2\varphi \right] =$$

$$= 2z^4 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos 2\varphi + 1 \right) d\varphi = 2z^4 \int_0^{2\pi} (2 - \underbrace{\cos 2\varphi}_{\text{ger noll vid integrering}}) d\varphi =$$

$$= 8\pi z^4.$$

$$\otimes = \int_0^1 8\pi z^4 \, dz = \boxed{\frac{8\pi}{5}}.$$

6.24

Låt $\mathcal{D} = \{ |x| + |y| \le 1 \}$. När $(x,y) \in \mathcal{D}$ så måste $x - y \le z \le x + y$, men för detta måste $x - y \le x + y \iff y \ge 0$.

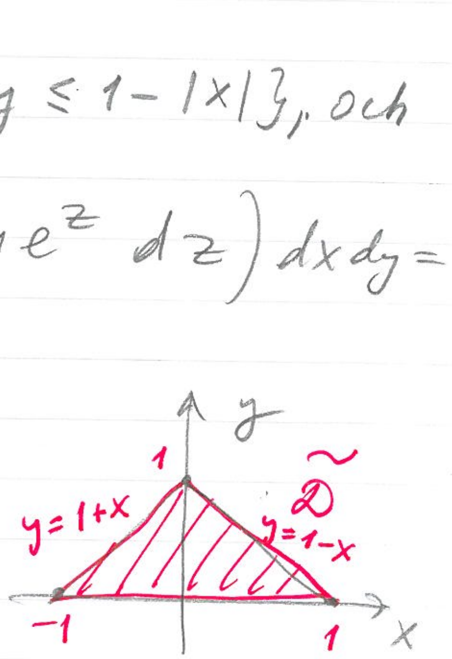
Då behöver vi endast studera

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{ |x| + |y| \le 1, \; y \ge 0 \} = \{ 0 \le y \le 1 - |x| \}, \text{ och}$$

$$\iiint_{\mathcal{D}} y e^z \, dx\,dy\,dz = \iint_{\tilde{\mathcal{D}}} \left(\int_{x-y}^{x+y} y e^z \, dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_{\tilde{\mathcal{D}}} y \left(e^{x+y} - e^{x-y} \right) dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} y \left(e^{x+y} - e^{x-y} \right) dx \right) dy =$$



$\tilde{\mathcal{D}} = \{ 0 \le y \le 1; \; y-1 \le x \le 1-y \}$

$$= \int_0^1 \left[y e^{x+y} - y e^{x-y} \right]_{x=y-1}^{x=1-y} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(y e^{1} - y e^{2y-1} - y e^{1-2y} + y e^{-1} \right) dy =$$

$$= \frac{e^1 + e^{-1}}{2} - e^{-1} \int_0^1 \overset{\downarrow}{y} \overset{\uparrow}{e^{2y}} dy - e \int_0^1 \overset{\downarrow}{y} \overset{\uparrow}{e^{-2y}} dy =$$

$$= \frac{e^1 + e^{-1}}{2} - e^{-1} \left(\left[y \frac{e^{2y}}{2} \right]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \frac{e^{2y}}{2} dy \right)$$

$$- e \left(\left[-y \frac{e^{-2y}}{2} \right]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 - \frac{e^{-2y}}{2} dy \right)$$

$$= \frac{e^1 + e^{-1}}{2} - e^{-1} \left(\frac{e^2}{2} - \left[\frac{e^{2y}}{4} \right]_{y=0}^{y=1} \right)$$

$$- e \left(- \frac{e^{-2}}{2} + \left[- \frac{e^{-2y}}{4} \right]_{y=0}^{y=1} \right) =$$

$$= \frac{e^1 + e^{-1}}{2} - e^{-1} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right) - e \left(- \frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-2}}{4} + \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{e^1 + e^{-1}}{2} - e^{-1} \left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right) - e \left(- \frac{3e^{-2}}{4} + \frac{1}{4} \right) =$$

$$= \frac{\cancel{e^1} + e^{-1}}{2} - \cancel{\frac{e}{4}} - \frac{e^{-1}}{4} + \frac{3e^{-1}}{4} - \cancel{\frac{e}{4}} = \boxed{e^{-1}}$$