Lektion 2

1.14 a) $g(t) = te^{-t^2}+1 \xRightarrow{t = x+y} f(x,y) = g(x+y) = (x+y)e^{-(x+y)^2}+1$

Svar: $z = (x+y)e^{-(x+y)^2}+1$

b) $g(t) = t^2 \cos t \underset{t = xy}{\Rightarrow} f(x,y) = g(xy) = (xy)^2 \cos xy$

Svar: $z = x^2y^2 \cos xy$.

1.15 a) Ja, $f(x,y) = e^{-(xy)} - (xy)^2 = g(xy)$,

så vi kan byta $t = xy$, vilket ger

$f(x,y) = g(x \cdot y)$, där $g(t) = e^{-t} - t^2$.

b) Nej. $x = 1, y = 2$ och $x = 2, y = 1$ ger samma $t := xy = 2$ men olika värde på f:

$f(1,2) = e^{-2} - 2$,
$f(2,1) = e^{-2} - 4$.

c) Ja.

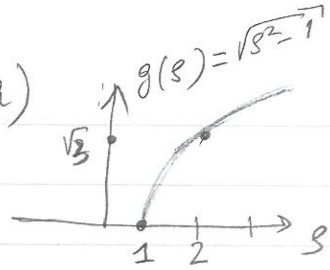
$f(x,y) = (x - 4xy + 4y^2)e^x e^{-2y} + 1 =$

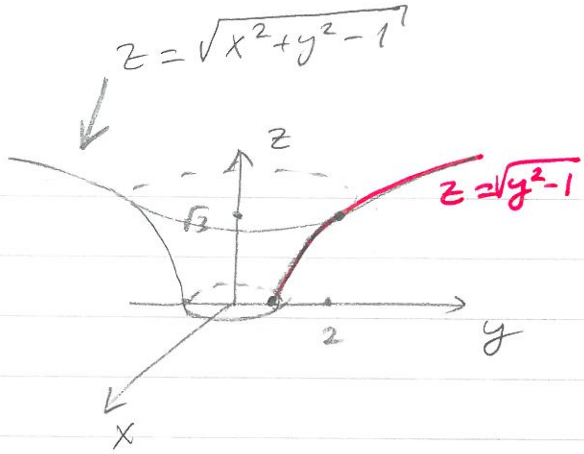
$= (x-2y)^2 e^{x-2y} + 1 = g(x-2y)$

Svar: $f(x,y) = g(x-2y)$, där
$g(t) = t^2 e^t + 1$

1.18

a)





För att få grafen $z=f(x,y)$ kan vi rita den då $x=0$ (eller $y=0$) och sedan rotera kring z-axeln

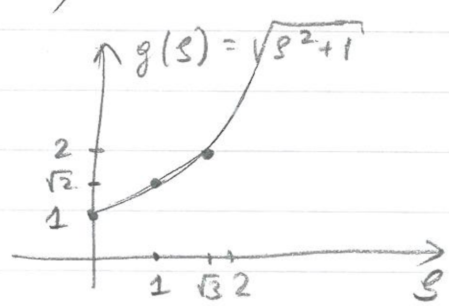
$x=0 \Rightarrow z=\sqrt{y^2-1}$ – ska roteras kring z-axeln.

alla punkter som ligger i xy-planet på samma avstånd till z-axeln ger samma värde på $z \Rightarrow$ grafen

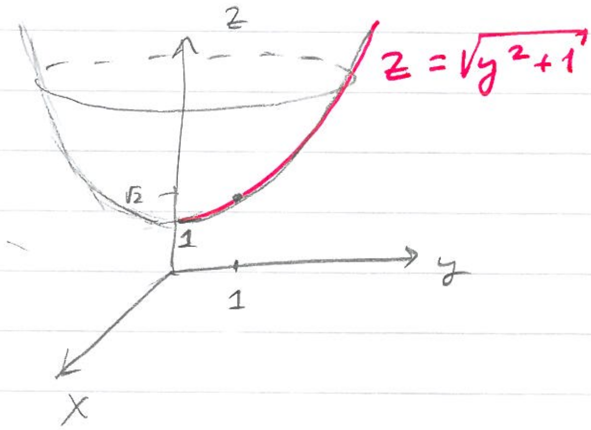
$z=g(\varsigma)=\sqrt{\varsigma^2-1}=$
$=\sqrt{x^2+y^2-1}$

är rotationssymmetrisk

b) Samma konstruktion.



$\Rightarrow$



Vi ritar $z=g(\varsigma)=\sqrt{\varsigma^2+1}=\sqrt{x^2+y^2+1}$ då $x=0 \Rightarrow$
$z=\sqrt{y^2+1}$ och sedan roterar kring z-axeln.

OBS! Vi kan skriva om ekvationerna:

a) $z=\sqrt{x^2+y^2-1} \Leftrightarrow \begin{array}{l} z^2=x^2+y^2-1 \\ z\geq 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x^2+y^2-z^2=1 \\ z\geq 0 \end{array}$

$\Rightarrow$ grafen är övre halvan av den enmantlade hyperboloiden $x^2+y^2-z^2=1$.

b) $z = \sqrt{x^2+y^2+1} \iff \begin{matrix} z^2 = x^2+y^2+1 \\ z>0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} x^2+y^2-z^2=-1 \\ z>0 \end{matrix}$

$\Rightarrow$ grafen är övre halvan av den tvåmantlade hyperboloiden $x^2+y^2-z^2=-1$.

1.21

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \left[\begin{matrix} \text{Låt } x^2+y^2=t \\ (x,y)\to(0,0) \Rightarrow t\to 0 \end{matrix}\right] =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \underline{1}.$$

b) Vi byter mot polära koordinater!

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^2y} = \left[\begin{matrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ (x,y)\to(0,0) \iff \rho\to 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix}\text{avståndet} \\ \text{till origo}\end{matrix}\right] =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\sin(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi)}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi+\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\sin\rho^2}{\rho^2+\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi} = \lim_{\rho\to 0} \underbrace{\frac{\sin\rho^2}{\rho^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\underbrace{\rho}_{\to 0}\overbrace{\cos^2\varphi\sin\varphi}^{\text{begränsade}}}}_{\to 1}$$

$= 1.$

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y+1}{\ln(x^2+2y^2)} = \left[\begin{matrix} \text{polära koordinater:} \\ x=\rho\cos\varphi \quad (x,y)\to 0 \iff \rho\to 0 \\ y=\rho\sin\varphi \end{matrix}\right] =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi+1}{\ln(\rho^2\cos^2\varphi+2\rho^2\sin^2\varphi)}.$$

Här ser vi att täljaren $\underbrace{\rho}_{\to 0}\overbrace{(\cos\varphi+\sin\varphi)}^{\text{begränsad}}+1 \to 1$ då $\rho\to 0$.

Nämnaren kan skrivas om

$$\ln\left(\rho^2(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi)\right) = \ln\rho^2 + \ln\Big(\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1} + \sin^2\varphi\Big) =$$

$$= \underbrace{2\ln\rho}_{\substack{\to -\infty \\ \text{när } \rho\to 0}} + \underbrace{\ln(1 + \overbrace{\sin^2\varphi}^{\in[0;\,1]})}_{\in[0;\,\ln 2]} \to -\infty$$

Täljaren går mot 1, nämnaren går mot $-\infty$ $\Rightarrow$ bråket går mot 0.

<u>Svar</u>: 0

1.22

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \left[\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ (x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow \rho\to 0 \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^3\varphi + \rho^3\sin^3\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^{\cancel{3}}(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{\cancel{\rho^2}\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1}} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \underbrace{\rho}_{\to 0}\underbrace{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}_{\text{begränsad}} = 0.$$

<u>Svar</u>: 0

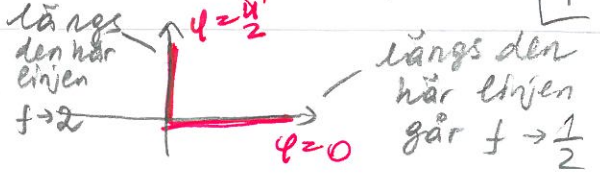
b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2y^2}{2x^2+y^2} = \left[\begin{array}{ll} x = \rho\cos\varphi & (x,y)\to(0,0) \\ y = \rho\sin\varphi & \Leftrightarrow \rho\to 0 \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\varphi - 2\rho^2\sin^2\varphi}{2\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho^2}(\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi)}{\cancel{\rho^2}(2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}$$

$$= \frac{\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi}{2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = \otimes$$. Vi ser att gränsvärdet har olika värde för olika värde på φ.

T ex om $\varphi = 0 \Rightarrow \otimes = \frac{1}{2}$

om $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \otimes = 2$



Att funktionen har olika gränsvärde längs olika kurvor innebär att det gemensama gränsvärdet saknas

↑ i detta fall räta linjer.

Svar: Gränsvärdet saknas.

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-2y^3}{2x^2+y^2} = \left[\begin{array}{c} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ \rho\to 0\end{array}\right] = \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^3\cos^3\varphi - 2\rho^3\sin^3\varphi}{2\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}$

$= \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^{\cancel{3}}(\cos^3\varphi-2\sin^3\varphi)}{\cancel{\rho^2}(2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}$

När $\rho\to 0$, $\cos^3\varphi-2\sin^3\varphi$ är begränsad, men är $(2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^{-1}$ begränsad? Observera att

$$2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi = \underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1} + \cos^2\varphi = 1+\cos^2\varphi$$

Eftersom $2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi = 1+\underbrace{\cos^2\varphi}_{\in[0;1]} \in [1;2] \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi} \le 1 \quad \text{dvs begränsad.}$$

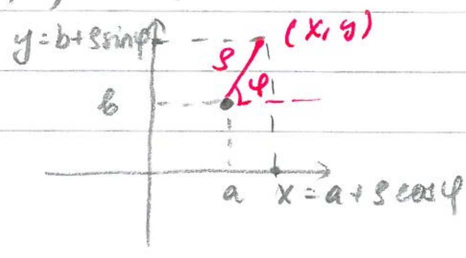
Då ser vi att

$$\lim_{\rho\to 0} \rho\cdot \underbrace{\frac{\cos^3\varphi-2\sin^3\varphi}{2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}}_{\text{begränsad}} = 0.$$

Svar: 0

1.23 När $(x,y)\to(a,b)$ kan vi alltid ansätta

$$\begin{cases} x=a+\rho\cos\varphi \\ y=b+\rho\sin\varphi\end{cases} \Rightarrow (x,y)\to(a,b) \Leftrightarrow \rho\to 0$$



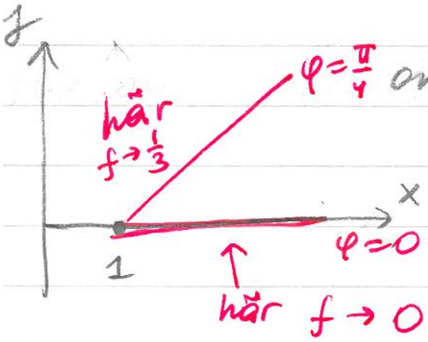
a) $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{x^2+2y^2-2x+1} = \left[\begin{array}{l} x = 1+\rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ (x,y)\to(1,0) \Leftrightarrow \rho\to 0 \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{(1+\rho\cos\varphi)\rho\sin\varphi - \rho\sin\varphi}{(1+\rho\cos\varphi)^2 + 2\rho^2\sin^2\varphi - 2(1+\rho\cos\varphi)+1} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\sin\varphi + \rho^2\cos\varphi\sin\varphi - \cancel{\rho\sin\varphi}}{\cancel{1} + \cancel{2\rho\cos\varphi} + \rho^2\cos^2\varphi + 2\rho^2\sin^2\varphi - \cancel{2} - \cancel{2\rho\cos\varphi} + \cancel{1}}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho^2}\cos\varphi\sin\varphi}{\cancel{\rho^2}(\cos^2\varphi+2\sin^2\varphi)} = \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{1+\sin^2\varphi}$$ – antar olika värden beroende på φ

t ex om $\varphi = 0$ $\quad \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{1+\sin^2\varphi} = 0$



om $\varphi = \frac{\pi}{4}$ $\quad \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{1+\sin^2\varphi} = \frac{\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}}{1+\frac12} = \frac{\frac12}{\frac32} = \frac13$.

$\Rightarrow$ gränsvärdet saknas.

Svar: gränsvärdet saknas.

b) $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy^2-y^2}{x^2+2y^2-2x+1} = \left[\begin{array}{l} x = 1+\rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ (x,y)\to(1,0) \Leftrightarrow \rho\to 0 \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{(1+\rho\cos\varphi)\rho^2\sin^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi}{(1+\rho\cos\varphi)^2 + 2\rho^2\sin^2\varphi - 2(1+\rho\cos\varphi)+1} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho^2\sin^2\varphi} + \rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi - \cancel{\rho^2\sin^2\varphi}}{\cancel{1} + \cancel{2\rho\cos\varphi} + \rho^2\cos^2\varphi + 2\rho^2\sin^2\varphi - \cancel{2} - \cancel{2\rho\cos\varphi} + \cancel{1}}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^{\cancel{3}}\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi}{\cancel{\rho^2}(\cos^2\varphi+2\sin^2\varphi)} = \otimes$$

Observera att

$$\left|\frac{\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi+2\sin^2\varphi}\right| = \left|\frac{\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi}{1+\underbrace{\sin^2\varphi}_{\geq 0}}\right| \leq \frac{|\cos\varphi||\sin^2\varphi|}{1} \leq 1$$

d vs $\frac{\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi+2\sin^2\varphi}$ är begränsad.

$$\Rightarrow \otimes = \lim_{\rho\to 0} \rho\cdot \underbrace{\frac{\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi+2\sin^2\varphi}}_{\text{begränsad}} = 0.$$

Svar: 0.

Extra

1.17

a) $f(x,y) = x = \boxed{\frac{(x+y)}{2} + \frac{(x-y)}{2}} = g(x+y) + h(x-y)$

där $g(t) = h(t) = \frac{t}{2}$.

b) $f(x,y) = xy = \boxed{\frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}} = g(x+y) + h(x-y)$

där $g(t) = h(t) = \frac{t^2}{4}$

c) Antag att $f(x,y) = x^2$ kan skrivas som

$x^2 = g(x+y) + h(x-y)$ $\Rightarrow$ då gäller (sätt $x=0$)

$0 = g(y) + h(-y) \Rightarrow g(y) = -h(-y)$ eller (byt $y \to -y$)

$g(-y) = -h(y) \Rightarrow h(y) = -g(-y)$

$\Rightarrow x^2 = g(x+y) + h(x-y)$ blir $x^2 = g(x+y) - g(-x+y)$

Vi sätter först $x = a$, $y = a$ $\Rightarrow$ — godtycklig tal!

$a^2 = g(2a) - g(0)$

och sedan $x = -a$, $y = a$ $\Rightarrow$

$a^2 = g(0) - g(2a)$ $\Rightarrow$ dessa två samband ger att för alla a gäller

$$a^2 = g(2a) - g(0) = g(0) - g(2a) = -a^2$$

Men detta är sant endast om $a = 0$ $\Rightarrow$ motsägelse!!

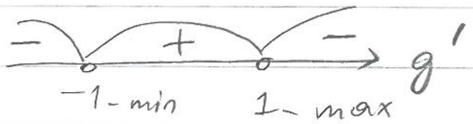
Vi ser att x^2 kan inte skrivas som $g(x+y) + h(x-y)$ för några funktioner g och h.

<u>1.19</u>

$$z = f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\frac{1}{x^2} \cdot xy}{\frac{1}{x^2}(x^2+y^2)} = \frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$= g\left(\frac{y}{x}\right), \text{ för } g(t) = \frac{t}{1+t^2}.$$

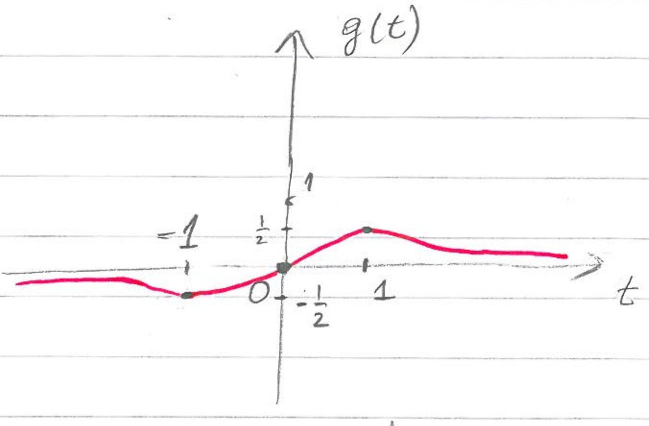
$$g'(t) = \frac{1+t^2 - 2t \cdot t}{(1+t^2)^2} = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{(1-t)(1+t)}{(1+t^2)^2}$$



$\lim_{t \to \infty} g(t) = 0^+$

$\lim_{t \to -\infty} g(t) = 0^-$

$g(0) = 0$, $g(1) = \frac{1}{2}$, $g(-1) = -\frac{1}{2}$



$x = 1$ – lok. max

$x = -1$ – lok. min

Hur ser grafen $z = f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ ut?

Om $y = 0 \Rightarrow z = g\left(\frac{0}{x}\right) = g(0) = 0 \Rightarrow$ längs linjen $y = 0$ är $z = 0$

Om $y = x \Rightarrow z = g\left(\frac{x}{x}\right) = g(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ längs linjen $y = x$ är $z = \frac{1}{2}$ – största värdet!

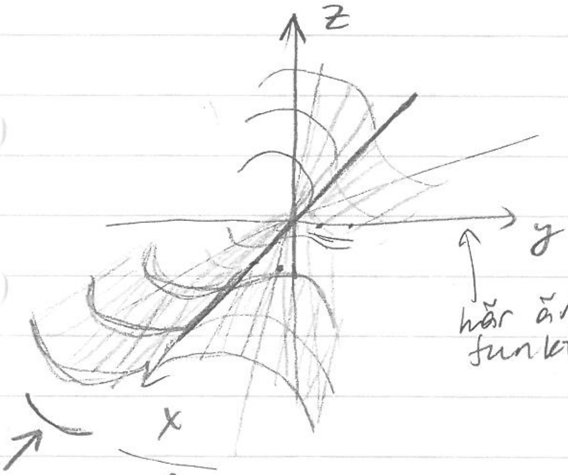
Om $y = 7x \Rightarrow z = g\left(\frac{7x}{x}\right) = g(7) = \frac{7}{1+49} = \frac{7}{50}$

Om $x = 0 \Rightarrow$ g är inte definierad. Men anledningen till detta är att vi har delat både täljaren och nämnaren med x!
$z = f(x, y)$ kan beräknas då $x = 0$!

$$z(0, y) = \frac{0 \cdot y}{y^2} = 0.$$

Om $y = -x \Rightarrow z = g\left(\frac{-x}{x}\right) = g(-1) = -\frac{1}{2}$ – funktionens minsta värdet.

Nu försöker vi skissera grafen $z = f(x, y)$!



Vi har sett att längs en linje $y = kx$ har $z = f(x, y)$ värdet

$$g(k) = \frac{k}{1+k^2}.$$

1.20a

För att hitta g, byter vi mot polära koordinater:

$$\left|(x^2+y)-2\right| = \begin{bmatrix} \varrho=\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2} \\ x=\varrho\cos\varphi \\ y=\varrho\sin\varphi+2 \end{bmatrix} = \left|\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho\sin\varphi+\cancel{2}-\cancel{2}\right| \leq$$

$$\leq \left|\varrho^2\cos^2\varphi\right| + \left|\varrho\sin\varphi\right| = \left|\varrho^2\right|\left|\cos^2\varphi\right| + \underbrace{|\varrho|}_{\geq 0}\left|\sin\varphi\right| \leq$$

$$\leq \varrho^2\cdot 1+\varrho\cdot 1 = \varrho^2+\varrho$$

På så sätt har vi hittat $g(\varrho)=\varrho^2+\varrho$ s a

$$\left|(x^2+y)-2\right| \leq g(\varrho) \text{ och } \lim_{\varrho\to 0} g(\varrho)=0 .$$