Lektion 19

6.11

c) Det går att göra uppgiften utan ett variabelbyte, då måste man rita området mycket noggrant.

$$\text{Låt } \begin{cases} x+y=u & \Big|\cdot 2 \;\Big|\cdot 4 \\ 2x-4y=v \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{4u+v}{6} \\ y = \dfrac{2u-v}{6} \end{cases}$$

$$6y = 2u - v$$

$$6x = 4u + v$$

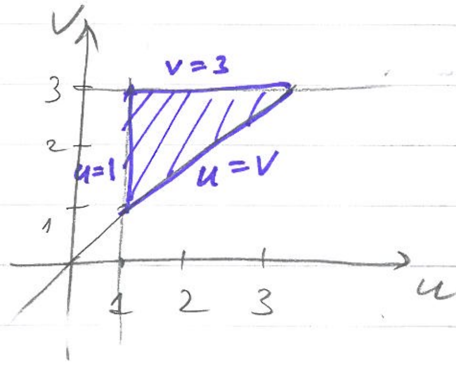
Vi har löst ut x och y för att beräkna

$$x-y = \frac{4u+v}{6} - \frac{2u-v}{6} = \frac{4u+v-2u+v}{6} = \frac{2u+2v}{6},$$

och

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \end{vmatrix} = -\frac{4}{36} - \frac{2}{36} = -\frac{1}{6}.$$

Området ser ut så här:



$$1 \le u \le v \le 3 \iff$$

$$\{1 \le u \le 3;\ u \le v \le 3\}$$

Integralen blir

$$\int_1^3 \left(\int_u^3 \frac{\frac{2u+2v}{6}+1}{u} \overbrace{\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right|}^{=\frac{1}{6}} du\, dv \right.$$

$$= \frac{1}{6} \int_1^3 \left(\int_u^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{v}{3u} + \frac{1}{u} \right) dv \right) du =$$

$$= \frac{1}{6}\int_1^3 \left[\frac{1}{3}v + \frac{v^2}{6u} + \frac{v}{u} \right]_{v=u}^{v=3} du =$$

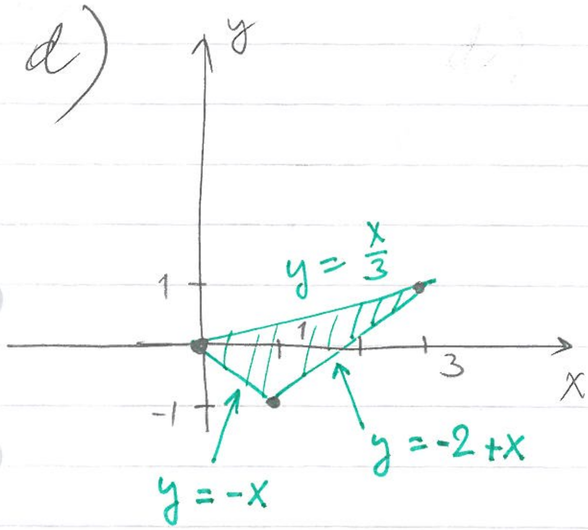
$$= \frac{1}{6}\int_1^3 \left(\cancel{1} + \frac{3}{2u} + \frac{3}{u} - \frac{u}{3} - \frac{u}{6} - \cancel{1} \right) du =$$

$$= \frac{1}{6}\int_1^3 \left(-\frac{u}{2} + \frac{9}{2u} \right) du = \frac{1}{6}\left[-\frac{u^2}{4} + \frac{9}{2}\ln|u| \right]_{u=1}^{u=3} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(-\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{2}\ln 3 \right) = \frac{1}{6}\left(-2 + \frac{9}{2}\ln 3 \right) =$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{3\ln 3}{4}$$

d)



Området kan beskrivas av olikheterna

$$\begin{cases} y \geq -x \\ y \geq -2 + x \\ y \leq \frac{x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + x \geq 0 \\ x - y \leq +2 \\ 3y \leq x \end{cases}$$

Eftersom $y+x$ och $y-x$ ingår både i områdets beskrivning och i integrallen $(x^2 - y^2 = (x-y)(x+y))$, variabelbytet är

$$-+ \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}, \text{ så}$$

$u + v = 2x$

$u - v = 2y$

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

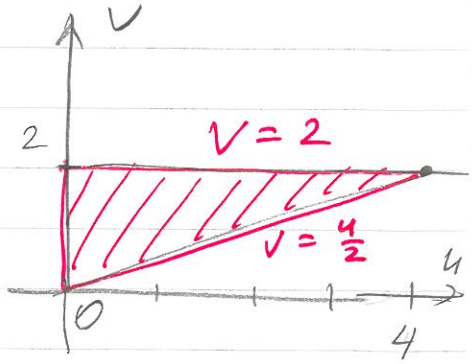
Eftersom $3y \leq x \iff \frac{3(u-v)}{\cancel{2}} \leq \frac{u+v}{\cancel{2}} \iff$

$$\iff 2u \leq 4v \iff v \geq \frac{u}{2}$$

beskrivs området av olikheterna

$$u \geq 0, \quad v \leq 2, \quad v \geq \frac{u}{2}$$

och ser ut så här



Vi ser att

$0 \leq u \leq 4$, $\frac{u}{2} \leq v \leq 2$, så integralen blir

$$\int_0^4 \left(\int_{\frac{u}{2}}^{2} \frac{1}{(1+uv)^2} \cdot \underbrace{\left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right|}_{=\frac{1}{2}} \cdot dv \right) du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^4 \left(\int_{\frac{u}{2}}^{2} \frac{1}{(1+uv)^2} \, dv \right) du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^4 \left[-\frac{1}{u(1+uv)} \right]_{v=\frac{u}{2}}^{v=2} du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^4 \left(-\frac{1}{u(1+2u)} + \frac{1}{u\left(1+\frac{u^2}{2}\right)} \right) du = \otimes$$

Partialbråkupdelning:

$$-\frac{1}{u(1+2u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1+2u}$$

Handpåläggning ger $A=-1$, $B = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$

så $-\frac{1}{u(1+2u)} = -\frac{1}{u} + \frac{2}{1+2u}$.

$$\frac{2}{u(2+u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{u^2+2} \iff$$

$$2 = 2A + Au^2 + Bu^2 + Cu \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$$

så $\frac{2}{u(2+u^2)} = \frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+2}$

$$\otimes = \frac{1}{2}\int_0^4 \left(-\cancel{\frac{1}{u}} + \frac{2}{1+2u} + \cancel{\frac{1}{u}} - \frac{u}{u^2+2}\right) du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|1+2u| - \frac{1}{2}\ln|u^2+2|\right]_{u=0}^{u=4} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln 9 - \frac{1}{2}\ln 18 + \frac{1}{2}\ln 2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln 9 - \frac{1}{2}\ln 9 - \cancel{\frac{1}{2}\ln 2} + \cancel{\frac{1}{2}\ln 2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\ln 9 = \boxed{\frac{1}{2}\ln 3}$$

6.12

a) Ellipsskivan $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1$ har en enkel beskrivning om man modifierar polära koordinater på ett följande sätt

$$\begin{cases} x = 2r\cos\varphi \\ y = 3r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = r^2 \le 1, \text{ så } \begin{matrix} 0\le r\le 1 \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{matrix}$$

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} 2\cos\varphi & -2r\sin\varphi \\ 3\sin\varphi & +3r\cos\varphi \end{vmatrix} = 6r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = 6r.$$

$$\iint_{D}(x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{\substack{0\le r\le 1 \\ 0\le\varphi\le 2\pi}}(4r^2\cos^2\varphi+9r^2\sin^2\varphi)6r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left(4r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+5r^2\sin^2\varphi\right)\cdot 6r\,d\varphi\right)dr$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left(24r^3+30r^3\cdot\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi\right)dr =$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left(24r^3+15r^3-15r^3\cos 2\varphi\right)d\varphi\right)dr =$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left(39r^3-15r^3\cos 2\varphi\right)d\varphi\right)dr =$$

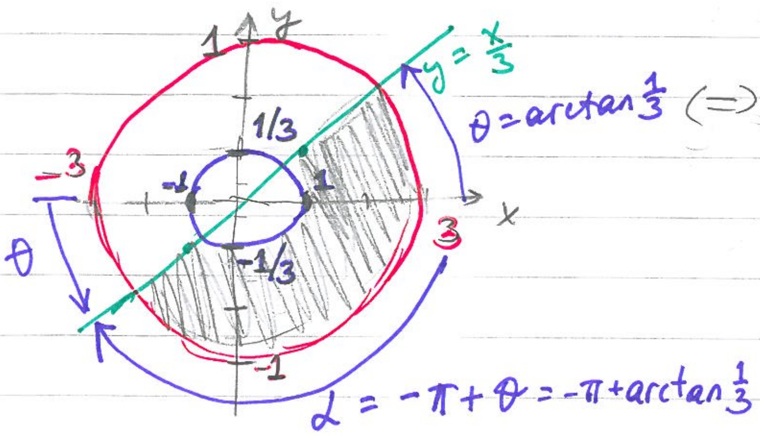
$$= \int_0^1\left[39r^3\varphi-\frac{15}{2}r^3\sin 2\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}dr =$$

$$= \int_0^1(78\pi r^3-0+0)\,dr = \left[\frac{78\pi r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1} = \boxed{\frac{39\pi}{2}}$$

5

OBS! Kontrolera noga lösningen - svaret stämmer inte med boken !!!

6) Området $\mathcal{D}$ är en del av ellipsskivan



$x^2+9y^2 \le 9 \iff$

$\iff \left(\frac{x}{3}\right)^2+y^2 \le 1$ – området innanför den röda ellipsen

$x^2+9y^2 \ge 1 \iff$

$x^2+\left(\frac{y}{\frac{1}{3}}\right)^2 \ge 1$ – området utanför den blåa ellipsen.

$x \ge 3y \iff y \le \frac{x}{3}$ – området under den gröna linjen

Så området är den gråa halvan av ringen mellan dem två ellipserna.

Vi vill skriva $x^2+9y^2=r^2$ så vi gör ett variabelbyte

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = \frac{r}{3}\sin\varphi \end{cases} \iff x^2+9y^2 = r^2\cos^2\varphi + 9\cdot\frac{r^2}{9}\sin^2\varphi = r^2$$

$$1 \le \underbrace{x^2+9y^2}_{=r^2} \le 9 \implies \boxed{1 \le r \le 3}$$

Från bilden ser vi att $\boxed{-\pi+\arctan\frac{1}{3} \le \varphi \le \arctan\frac{1}{3}}$

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \frac{1}{3}\sin\varphi & \frac{r}{3}\cos\varphi \end{vmatrix} = \frac{r}{3}(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = \frac{r}{3}.$$

$$\iint_{\mathcal{D}} x^3\,dx\,dy = \int_1^3 \left(\int_{-\pi+\arctan\frac{1}{3}}^{\arctan\frac{1}{3}} r^3\cos^3\varphi \cdot \frac{r}{3}\,d\varphi \right) dr =$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^3 r^4 \cdot \overbrace{\left(\int_{-\pi+\theta}^{\theta} \cos^3\varphi \, d\varphi\right)}^{= \text{konst map } r} dr =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\pi+\theta}^{\theta} (1-\sin^2\varphi)\cos\varphi \, d\varphi \cdot \int_1^3 r^4 \, dr =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\pi+\theta}^{\theta} (1-\sin^2\varphi)\cdot\cos\varphi \, d\varphi \cdot \left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=1}^{r=3} =$$

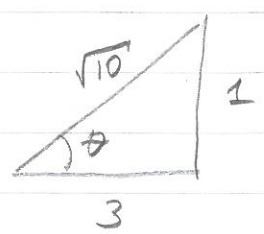
$$= \left[\begin{array}{l} \int (1-\sin^2\varphi)\cos\varphi \, d\varphi = [\sin\varphi = t, \ dt = \cos\varphi \, d\varphi] = \\ = \int (1-t^2)dt = t - \frac{t^3}{3} = \sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=-\pi+\theta}^{\varphi=\theta} \cdot \left(\frac{3^5}{5} - \frac{1}{5}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} - \underbrace{\sin(-\pi+\theta)}_{=-\sin\theta} + \frac{\overbrace{\sin^3(-\pi+\theta)}^{=-\sin^3\theta}}{3}\right) \cdot \frac{242}{5} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right) \cdot \frac{242}{5} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{30\sqrt{10}}\right) \cdot \frac{242}{5} =$$



$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{30\sqrt{10} - \sqrt{10}}{\cancel{300}\ \cancel{150}\ 75} \cdot \frac{\overset{121}{\cancel{242}}}{5} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{29\sqrt{10}}{75} \cdot \frac{121}{5} = \frac{3509\sqrt{10}}{15 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{3509\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{5}}}{15^2 \cdot \sqrt{5} \cdot \cancel{\sqrt{5}}}$$

$$= \boxed{\frac{3509}{225} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}}$$

c) Vi kvadratkompleterar:

$$x^2 + 2xy + 4y^2 \le 1 \iff$$
$$(x+y)^2 + (\sqrt{3}y)^2 \le 1$$

Vi låter $\begin{cases} u = x+y \\ v = \sqrt{3}y \end{cases} \iff \begin{cases} x = u - \frac{v}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{v}{\sqrt{3}} \end{cases}$

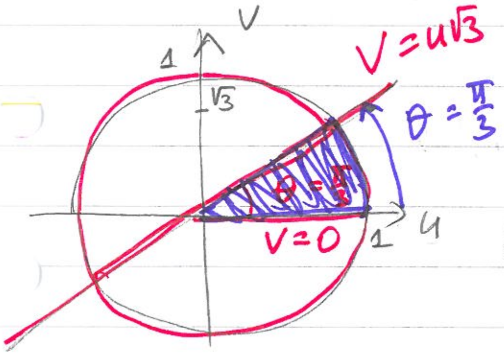
så att området
är en del av cirkeln
i uv-koordinater

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vi ser att $u^2+v^2 \le 1$,

$x \ge 0 \iff u - \frac{v}{\sqrt{3}} \ge 0 \iff v \le u\sqrt{3}$

$y \ge 0 \iff \frac{v}{\sqrt{3}} \ge 0 \iff v \ge 0.$



Området är $\{ u^2+v^2 \le 1,\ 0 \le v \le u\sqrt{3} \}$.

OBS! $\tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$.

I polära koordinater, d v s om
$\begin{cases} u = r\cos\varphi \\ v = r\cos\varphi \end{cases}$, blir detta $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

Vi ser att

$$\iint_{D} x\,dx\,dy = \iint_{\substack{u^2+v^2 \le 1 \\ 0 \le v \le u\sqrt{3}}} \overbrace{\left(u - \frac{v}{\sqrt{3}}\right)}^{=x} \cdot \overbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{=\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right|} du\,dv$$

$$= \iint\limits_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le \varphi\le \frac{\pi}{3}}} \left(r\cos\varphi - \frac{r\sin\varphi}{\sqrt{3}}\right)\cdot \overbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\left|\frac{d(u,v)}{d(r,\varphi)}\right|} \cdot r \; dr\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/3} r^2 \left(\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}}\right) d\varphi \right) dr =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 r^2 \left[\sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{\sqrt{3}}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{3}} dr =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 r^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} - 0 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) dr =$$

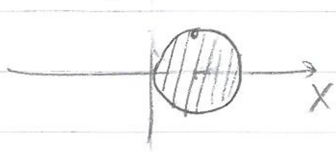
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \; \frac{3-1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

6.13

a) Observera att $\mathcal{D} = \{x^2 + y^2 \le 2x\} =$

$= \{(x-1)^2 + y^2 \le 1\}$ är en cirkel med rad $= 1$ och centrum i $(1,0)$.



Om vi modifierar polära koordinater

$$\begin{cases} x = 1 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = r^2 \le 1 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix}}$$

Observera att

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$, som i polära koordinater.

$$\Rightarrow \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left((1+r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 \right) r\,d\varphi \right) dr$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(1 + 2r\cos\varphi + \underbrace{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}_{=r^2}\right) r\,d\varphi \right) dr =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(r + r^3 + 2r\cos\varphi\right) d\varphi \right) dr =$$

$$= \int_0^1 \left(r\cdot 2\pi + r^3\cdot 2\pi + \underbrace{\cancel{2r\Big[\sin\varphi\Big]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}}}_{=0} \right) dr =$$

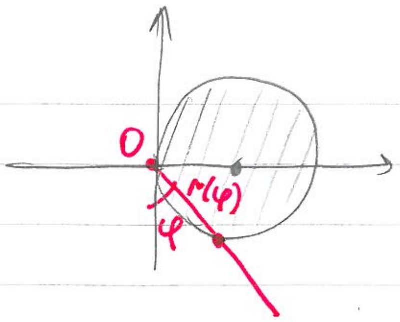
$$= \left[\frac{r^2}{2}\cdot 2\pi + \frac{r^4}{4}\cdot 2\pi \right]_{r=0}^{r=1} = \pi + \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{3\pi}{2}}.$$

b) $$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1+2r\cos\varphi + r^2}\, r\,d\varphi \right) dr$$

om vi byter till "polära" koordinater som vi definierade i a). Den verkar vara svårt att beräkna. Vi provar istället vanliga polära koordinater.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$ och då är $\sqrt{x^2+y^2} = r$.

Den svåra biten är att definiera gränser för r och φ.



Vi ser att $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ då y-axeln tangerar cirkeln. Som ligger i Ia och IVe kvadrant.

När φ varierar från $-\frac{\pi}{2}$ till $\frac{\pi}{2}$, varierar r från 0 till $r(\varphi)$ (se bild), där kurvan $r(\varphi)$ beskriver områdets rand

$x^2+y^2=2x$, vilket i polära koordinater blir

$$r^2 = 2r\cos\varphi \Leftrightarrow r = 2\cos\varphi \Rightarrow r(\varphi) = 2\cos\varphi.$$

Områdets gränser i polära koordinater är alltså

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le r \le 2\cos\varphi.$$

Integralen blir

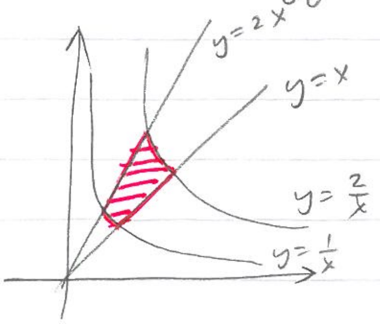
$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\varphi} r \cdot \overbrace{r}^{\left|\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)}\right|} \, dr \right) d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=2\cos\varphi} d\varphi = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\,d\varphi \overset{\text{se s.7}}{=}$$

$$= \frac{8}{3}\left[\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{8}{3}\cdot\frac{4}{3} = \boxed{\frac{32}{9}}$$

6.14 Området $\mathcal{D} = \{ \frac{1}{x} \le y \le \frac{2}{x},\ 0 < x \le y \le 2x \}$ ligger i första kvadrant.



Den kan också skrivas som

$\mathcal{D} = \{ 1 \le xy \le 2,\ 1 \le \frac{y}{x} \le 2,\ x > 0 \}$

Vi inför nya variabler

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x}.$$

I så fall $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{x}{2y} = \frac{1}{2v}$, $y^2 = uv$.

I de nya koordinaterna är området

$\mathcal{D} = \{ 1 \le u \le 2,\ 1 \le v \le 2 \}$, så integralen blir

$$\iint_{\mathcal{D}} y^2 \sin y^2 \, dx\, dy = \iint_{\substack{1 \le u \le 2 \\ 1 \le v \le 2}} u \cancel{v} \sin uv \cdot \frac{1}{2\cancel{v}} \cdot dv\, du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\int_1^2 u \sin uv \, dv \right) du = \frac{1}{2} \int_1^2 \left[-\cos uv \right]_{v=1}^{v=2} du =$$

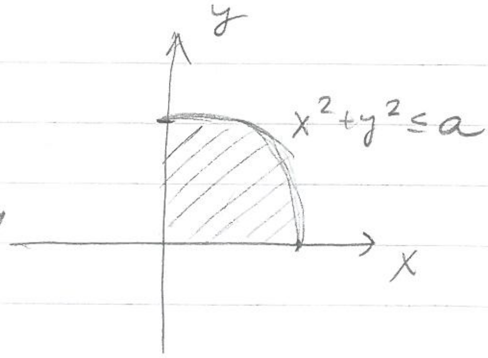
$$= \frac{1}{2} \int_1^2 (-\cos 2u + \cos u)\, du =$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{\sin 2u}{2} + \sin u \right]_{u=1}^{u=2} = \frac{-\sin 4}{4} + \frac{\sin 2}{2} + \frac{\sin 2}{4} - \frac{\sin 1}{2}$$

$$= \frac{-\sin 4 + 3 \sin 2 - 2 \sin 1}{4}.$$

Extra

6.15 När $a<0 \Rightarrow$ området är tom
$\Rightarrow$ arean $=0$.



$D(a) = \{ 0 \le r \le \sqrt{a},\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \}$

i polära koordinater $\Rightarrow$

$$\iint_{D(a)} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{a}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin r^2 \cdot r \, d\varphi \right) dr =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{a}} \sin r^2 \cdot r \, dr =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{\cos r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{a}} = -\frac{\pi}{4}(\cos a - 1) =$$

$$= \frac{\pi}{4}(1 - \cos a)$$

Största värdet antas då $\cos a = -1 \Leftrightarrow$
$a = \pi + 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, och detta
värde är $\frac{\pi}{2}$.

Svar: Arean $= \frac{\pi}{4}(1-\cos a)$ då $a \ge 0$, och
Arean $= 0$ då $a < 0$.
Största värdet $= \frac{\pi}{2}$ då $a = \pi + 2\pi n$, $n = 0, 1, 2 \ldots$