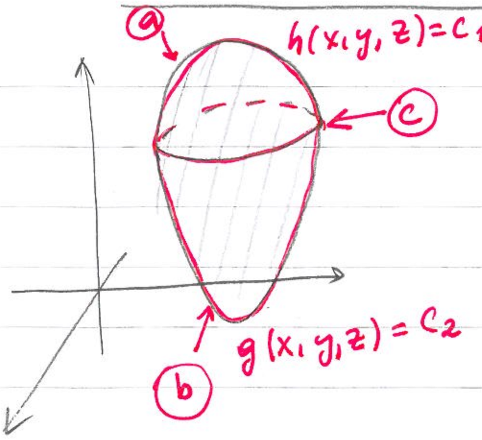
# 3d kompakt optimering




Betrakta optimeringsproblem

$\underbrace{f(x,y,z)}_{\text{målfunktion}} \to \max/\min$

i området

$$\begin{cases} h(x,y,z) \le c_1 \\ g(x,y,z) \ge c_2 \end{cases}$$

Området är kompakt $\Rightarrow$ funktionen antar sitt största/minsta värdet antingen i en innre stationär punkt eller på randen.

## (1) Söker innre stationära punkter

dvs $f(x,y,z) \to \max/\min$ $\quad \left.\begin{cases} h(x,y,z) < c_1 \\ g(x,y,z) > c_2 \end{cases}\right\}$ inga aktiva bivillkor

$\boxed{\nabla f = 0}$ – ekv. för kandidater

## (2) Randundersökning

Rand kan splitras i tre komponenter (a), (b), (c)

(a) $\begin{cases} h(x,y,z) = c_1 \text{ – ett aktivt bivillkor} \\ g(x,y,z) > c_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\nabla f \parallel \nabla h}$ är ekv. för kandidater

(b) $\begin{cases} h(x,y,z) < c_1 \\ g(x,y,z) = c_2 \text{ – ett aktivt bivillkor} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\nabla f \parallel \nabla g}$ är ekv. för kand.

(c) $\left.\begin{cases} h(x,y,z) = c_1 \\ g(x,y,z) = c_2 \end{cases}\right\}$ två aktiva bivillkor!

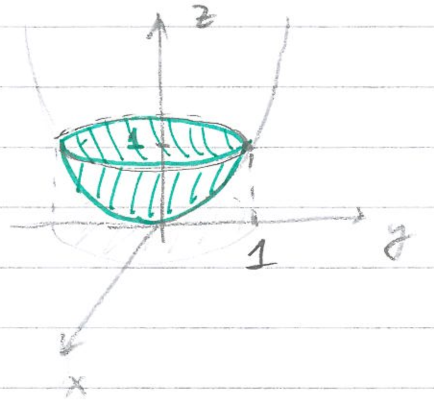
$\boxed{\nabla f, \nabla h, \nabla g \text{ är linjärt beroende}} \iff \det \begin{bmatrix} \nabla f \\ \nabla h \\ \nabla g \end{bmatrix} = 0$

är ekv. för kandidater

## Lektion 15

### 4.21

$x^2+y^2=z$ är en rotationssymmetrisk graf då $z$ beror på $x^2+y^2 =$ avst. till origo i kvadrat. Rita $z=y^2$ och sedan rotera kring $z$-axeln. $x^2+y^2 \leq z \leq 1$ är området mellan $z=x^2+y^2$ och planet $z=1$.



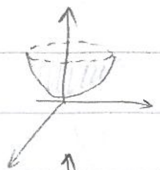

Mängden är kompakt, $f(x,y,z)=x+y+z$ är kontinuerlig $\Rightarrow$ största/minsta värdet antas i mängden.

① Innre stationära punkter:

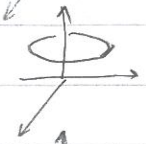
Eftersom $\nabla f = (1,1,1)$ överallt finns det inga stationära punkter.

② Randundersökning

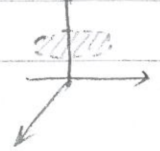
Vi kan splitra randen i tre komponenter



a) $z=x^2+y^2$, $\quad x^2+y^2<1$ (dim = 2)



b) $x^2+y^2=1$, $z=1$ (dim = 1)



c) $x^2+y^2<1$, $z=1$ (dim = 2)

a) Betrakta $\underbrace{z - x^2 - y^2}_{=g(x,y)} = 0$ som ett bivillkor.

Då får vi kandidater från

$$\nabla f \parallel \nabla g \Leftrightarrow \nabla f \times \nabla g = 0.$$

Eftersom $\nabla g = (-2x, -2y, 1)$ och $\nabla f = (1,1,1)$ är detta ekvivalent med

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2x & -2y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2y & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2x & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2x & -2y \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 + 2y = 0 \\ 1 + 2x = 0 \\ -2y + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

(OBS! $x^2+y^2<1$ är uppfylld)

Insättning i bivillkoret ger $z - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$
$\Rightarrow z = \frac{1}{2}$.

En kandidat är $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

$$\boxed{f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}}$$

b) Eftersom $z = 1$, kan vi skriva $f(x,y,z)$ som $h(x,y) = x+y+1$. Vi måste alltså lösa problemet

$$\overbrace{x + y + 1}^{=h(x,y)} \to \text{max/min}$$

$$\underbrace{x^2 + y^2}_{=k(x,y)} = 1 \text{ — bivillkoret}$$

alternativt låt $h(x,y,z) = z$ och undersök $\nabla h \parallel \nabla f$

2

$\nabla h \parallel \nabla k \Leftrightarrow (1,1) \parallel (2x, 2y) \Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2y - 2x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = x}}$

Insättning i bivillkoret ger $2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

vilket ger oss kandidater $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$.

två punkter

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = \sqrt{2} + 1.$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = -\sqrt{2} + 1.$$

alternativt använd optimering med 2 bivillkor

c) Eftersom $z = 1$, kan vi igen skriva $f(x,y,z)$ som $h(x,y) = x + y + 1$, $x^2 + y^2 < 1$.

Vi söker stationära punkter i området $x^2 + y^2 < 1$:

$\nabla h = (1, 1) \neq (0,0) \Rightarrow$ inga stationära punkter.

Nu går vi igenom alla de intressanta värdena. Vi ser att

$$\boxed{\begin{aligned} f_{max} &= 1 + \sqrt{2} = f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) \\ f_{min} &= -\tfrac{1}{2} = f\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \end{aligned}}$$

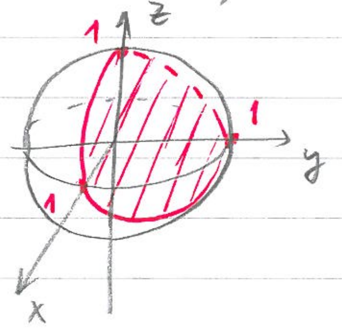
spara gärna till senare! långa jobbiga beräkningar!

4.22 Vi undersöker problemet

$xyz \to \max/\min$

$(x,y,z) \in \{x+y+z=1,\ x^2+y^2+z^2 \le 1\}.$

Området är den del av planet $x+y+z=1$ som ligger i klottet $x^2+y^2+z^2 \le 1$ d v s en cirkeskiva som innehåller $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,1)$ som sina randpunkter.




① Vi först söker kandidater bland områdets inre punkter, d v s bland

$\{x+y+z=1,\ x^2+y^2+z^2<1\}.$

Eftersom det är samma sak som att undersöka

$f(x,y,z) = xyz \to \max/\min$

$\underbrace{x+y+z}_{=g(x,y,z)} = 1$ — bivillkoret

då $x^2+y^2+z^2<1$, söker vi punkterna där

$\nabla f \parallel \nabla g \iff (yz, xz, xy) \times (1,1,1) = 0 \iff$

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{cases} xz - xy = 0 & (1) \\ yz - xy = 0 & (2) \\ yz - xz = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) \iff x(z-y)=0 \iff \underline{x=0}$ eller $\underline{y=z}$

$x=0 \overset{(2),(3)}{\Downarrow} yz=0 \Downarrow$ ant. $y=0$ eller $z=0$ vilket ger punkterna $(0,y,0)$, $(0,0,z)$

$y=z \overset{(2),(3)}{\Downarrow} y(y-x)=0 \Downarrow$ ant. $y=0$ eller $y=x$, vilk. ger $(x,0,0)$; $(x,x,x)$

Insättning i bivillkoret ger oss punkterna
$(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,0)$ – randpunkter, passar inte
$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ – kandidat.

$$\boxed{f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}}$$

(2) Nu undersöker vi randen

$$\{x+y+z=1, \quad x^2+y^2+z^2=1\}.$$

Detta kan betraktas som problemet

$$\overbrace{xyz}^{=f(x,y,z)} \to \max/\min$$

$$\left.\begin{aligned} &\overbrace{x+y+z}^{=g(x,y,z)} = 1 \\ &\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{=h(x,y,z)} = 1 \end{aligned}\right\} \text{ bivillkor}$$

d vs optimering med flera bivillkor.

I det här fallet får man intressanta punkter från villkoret att

$\nabla f$, $\nabla g$, $\nabla h$ är linjärt beroende i de intressanta punkterna $\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{c} \nabla g \to \\ \nabla h \to \\ \nabla f \to \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ xz & xy \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2x & 2z \\ yz & xy \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ yz & xz \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2y^2x - 2z^2x - 2x^2y + 2z^2y + 2x^2z - 2y^2z = 0 \iff$$

$$x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2) = 0$$

Vi har ett ekvationssystem:

$$\begin{cases} x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2) = 0 & (1) \\ x + y + z = 1 & (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} (2) &\Rightarrow z = 1 - x - y \\ (3) &\Rightarrow z^2 = 1 - x^2 - y^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{insättning i (1) ger}$$

$$x(2y^2 + x^2 - 1) + y(1 - 2x^2 - y^2) + (1 - x - y)(x^2 - y^2) = 0$$

$$\underline{2xy^2} + \cancel{x^3} - x + y - \underline{2x^2y} - \cancel{y^3} + x^2 - \cancel{x^3} - \underline{yx^2} - y^2 + \underline{y^2x} + \cancel{y^3} = 0$$

$$(y - x) + 3y^2x - 3x^2y + x^2 - y^2 = 0 \iff$$

$$(y - x) + 3yx(y - x) + (x - y)(x + y) = 0 \iff$$

$$(y - x)(1 + 3yx - x - y) = 0$$

Om $\underline{y - x = 0} \Rightarrow y = x \Rightarrow$ $z \overset{(2)}{=} 1 - 2x$, $z^2 \underset{(3)}{=} 1 - 2x^2$

vilket ger $1 - 2x^2 = (1 - 2x)^2 \iff$

$$\cancel{1} - 2x^2 = \cancel{1} - 4x + 4x^2 \iff 6x^2 - 4x = 0$$

$$\iff x(3x - 2) = 0$$

Vi får punkter $(0, 0, 1)$ och $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

$$\boxed{f(0,0,1) = 0, \quad f\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}\right) = -\tfrac{4}{27}}$$

Om $1+3yx-x-y=0 \Rightarrow$ vi får systemet

$$\begin{cases} z = 1-x-y \\ 1-x-y = -3xy \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -3xy \\ x^2+y^2+9x^2y^2 = 1 \\ 1-x-y = -3xy \end{cases}$$

insättning $z=-3xy$

Från 2a ekv. $y^2 = \dfrac{1-x^2}{1+9x^2}$

Från 3e ekv. $y = \dfrac{1-x}{1-3x}$ $\Rightarrow$

$$\left(\frac{1-x}{1-3x}\right)^2 = \frac{1-x^2}{1+9x^2} \Leftrightarrow \frac{(1-x)^2}{(1-3x)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{1+9x^2} \Leftrightarrow$$

$$(1-x)^2(1+9x^2) = (1-x)(1+x)(1-3x)^2 \Leftrightarrow$$

$$(1-x)\left[(1-x)(1+9x^2) - (1+x)(1-6x+9x^2)\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1-x)\left[\cancel{1} + \cancel{9x^2} - x - 9x^3 - \cancel{1} - x + 6x + 6x^2 - \cancel{9x^2} - 9x^3\right] = 0$$

$$(1-x)\left[-18x^3 + 6x^2 + 4x\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(1-x)(+9x^2-3x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{2}{3}, \quad x_4 = -\frac{1}{3}$$

Vilket ger oss kandidater

$$(1,0,0),\ (0,1,0),\ \left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right),\ \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right).$$

$$f(1,0,0) = f(0,1,0) = 0$$

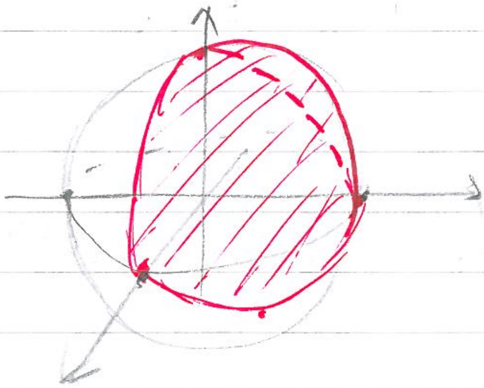
$$f\left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right) = f\left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right) = -\frac{4}{27}$$

Vi ser att

$$\boxed{\begin{aligned} f_{max} &= \frac{1}{27} = f\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right) \\ f_{min} &= -\frac{4}{27} = f\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}\right) = f\left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right) = f\left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right) \end{aligned}}$$

## 4.23

Området är alla punkter som ligger ovanför planet $x+y+z=1$ och under sfären $x^2+y^2+z^2=1$.



I detta område har $f(x,y,z) = 3x+2y+z$ inga inre stationära punkter då $\nabla f = (3,2,1) \neq (0,0,0)$.

Det största/minsta värdet antas därför på randen som kan splitras i tre komponenter:

$$\left.\begin{aligned} &a)\ \{\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{=g(x,y,z)} = 1,\ x+y+z > 1\} \\ &b)\ \{\underbrace{x+y+z}_{=h(x,y,z)} = 1,\ x^2+y^2+z^2 < 1\} \end{aligned}\right\}\ \text{dim } 2$$

$$c)\ \{x+y+z=1,\ x^2+y^2+z^2=1\}\ (\text{dim } 1)$$

a) Söker punkter där $\nabla f \parallel \nabla g \Leftrightarrow$

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda(3,2,1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$(\alpha = \lambda/2)$$

Insättning i bivillkoret ger

$(3\alpha)^2 + (2\alpha)^2 + \alpha^2 = 1 \Rightarrow \quad 14\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{14}}$

$\Rightarrow$ intressanta punkter är

$\pm\left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$ men $-\left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$ ligger utanför!

$$\boxed{f\left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right) = \sqrt{14}}$$

b) Inga intressanta punkter då

$\nabla f = (3, 2, 1)$ och $\quad \nabla h = (1, 1, 1)$

är aldrig parallella.

c) Nu måste vi undersöka problemet

$f(x, y, z) \rightarrow \max/\min$

$$\left.\begin{aligned} h(x, y, z) &= 1 \\ g(x, y, z) &= 1 \end{aligned}\right\} \text{bivillkor}$$

Intressanta punkter är dessa där $\nabla f, \nabla h, \nabla g$ är linjärt beroende $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 2z \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow 6(z-y) - 4(z-x) + 2(y-x) = 0$

$\Leftrightarrow 2z - 4y + 2x = 0$

$\Leftrightarrow z - 2y + x = 0$

Vi har systemet

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 & (1) \\ x + y + z = 1 & (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

(1) − (2) ger $-3y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow$ (2) ger

$$\begin{cases} x + z = \frac{2}{3} \\ x^2 + z^2 = \frac{8}{9} \quad (\text{från } (3)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} - z \\ z^2 = \frac{8}{9} - x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$z^2 = \frac{8}{9} - \left( \frac{4}{9} - \frac{4}{3}z + z^2 \right) \Leftrightarrow$$

$$2z^2 - \frac{4}{3}z - \frac{4}{9} = 0 \Leftrightarrow$$

$$9z^2 - 6z - 2 = 0 \Rightarrow z = \frac{6 \pm \sqrt{\underbrace{36 + 2 \cdot 36}_{36 \cdot 3}}}{18} \Rightarrow$$

$$z = \frac{6 \pm 6 \cdot \sqrt{3}}{18} \Leftrightarrow z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{3}$$

De intressanta punkterna och värdena är

$$\underline{f\left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{3 - 3\sqrt{3} + 2 + 1 + \sqrt{3}}{3} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}$$

$$\underline{f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{3 + 3\sqrt{3} + 2 + 1 - \sqrt{3}}{3} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}$$

Nu kan vi välja fmax och fmin!

10

Svar: $f_{max} = f\left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right) = \sqrt{14}$

$f_{min} = f\left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}.$

## 4.24

Avståndet till origo är störst/minst då

$$\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{=f(x,y,z)} \to \max/\min$$

Vi undersöker problemet

$$f(x,y,z) \to \max/\min$$

$$\left.\begin{array}{l} \overbrace{x^2+y^2+2z^2}^{=g(x,y,z)} = 4 \\ \underbrace{x+y+z}_{=h(x,y,z)} = 1 \end{array}\right\} \text{bivillkoren}$$

Intressanta punkter ges av

$$\begin{array}{l} \nabla f \sim \\ \nabla g \sim \\ \nabla h \sim \end{array} \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & 4z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff 2z \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$\iff z(x-y) = 0 \implies$ antingen $z = 0$ eller $x = y$.

Låt $\underline{z=0} \implies$ bivillkoren ger $\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ x+y = 1 \end{cases} \iff$

$$x = 1 - y \Rightarrow (1-y)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow 2y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4+24}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2},$$

$$\Rightarrow x = 1 - y = \frac{1 \mp \sqrt{7}}{2}$$

De intressanta värdena är

$$f\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, \frac{1-\sqrt{7}}{2}, 0\right) = f\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0\right) =$$

$$= \frac{1+2\sqrt{7}+7}{4} + \frac{1-2\sqrt{7}+7}{4} =$$

$$= \frac{16}{4} = 4$$

Låt $x = y \Rightarrow$ bivillkoren ger

$$\begin{cases} 2y + z = 1 \\ 2y^2 + 2z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - 2y \\ 2y^2 + 2 - 8y + 8y^2 = 4 \end{cases}$$

$$10y^2 - 8y - 2 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 - 4y - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{10} =$$

$$= \frac{4 \pm 6}{10} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = 1 \\ y_2 = -\frac{1}{5} \end{matrix}$$

De intressanta värdena är

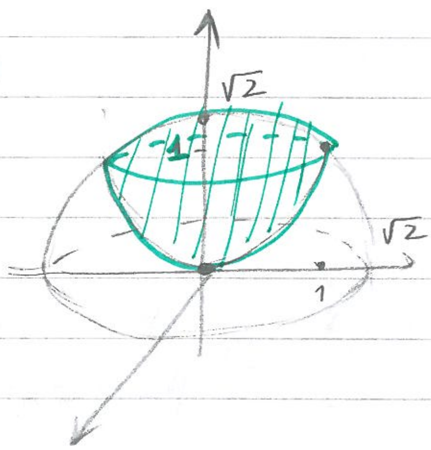
$$\boxed{\begin{array}{l} f(1, 1, \underset{\substack{\uparrow \\ z = 1-2y}}{-1}) = 3 \\[2ex] f\left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right) = \frac{2}{25} + \frac{49}{25} = \frac{51}{25} \end{array}}$$

Svar! största avst. är 2 till de två punkterna $\left(\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}, \frac{1\mp\sqrt{7}}{2}, 0\right)$,

minsta avst. är $\frac{\sqrt{51}}{5}$ till $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$

4.25

Området begränsas av paraboloiden $z = x^2+y^2$ och sfären $x^2+y^2+z^2 = 2$.




$f(x,y,z) = 2x - 2y + z$ har inga inre stationära punkter då $\nabla f = (2,-2,1) \neq (0,0,0)$ i området.

Det största/minsta värdet antas i så fall på randen.

Randen består av tre komponenter:

a) $\{\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{=g(x,y,z)} = 2, \quad z > x^2+y^2\}$

b) $\{x^2+y^2+z^2 < 2, \quad z = x^2+y^2\}$

dim = 2

c) $\{x^2+y^2+z^2 = 2, \quad z = x^2+y^2\}$ dim = 1

a) De intressanta punkterna fås från

$\nabla f \parallel \nabla g \iff \nabla f \times \nabla g = 0 \iff$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -4z - 2y = 0 \\ 4z - 2x = 0 \\ 4y + 4x = 0 \end{cases} \iff$$

13

$$\begin{cases} y = -x \\ z = \frac{x}{2} \end{cases}$$ och insättning i bivillkoret ger

$$x^2 + x^2 + \frac{x^2}{4} = 2 \Leftrightarrow \frac{9x^2}{4} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Vi får punkterna $\left(\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}, \mp\frac{2\sqrt{2}}{3}, \pm\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ men bara en av dem satisfierar a).

Den intressanta värden är

$$\underline{f\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)} = \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} = \underline{\underline{3\sqrt{2}}}$$

b) De intressanta punkterna fås från $\nabla f \parallel \nabla h$ där $h(x,y,z) = z - x^2 - y^2 \Rightarrow$

$\nabla f \times \nabla h = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ -2x & -2y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + 2y = 0 \\ 2 + 2x = 0 \\ -4y - 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = +1 \\ x = -1 \end{cases}$$ och $z = x^2 + y^2 = 2$ från bivillkoret

Men i så fall $x^2 + y^2 + z^2 < 2$ är inte uppfylld! $\Rightarrow$ inga intressanta punkter.

c) Nu har vi två bivillkor $\Rightarrow$ kandidaterna fås från ekvationen:

$$\begin{array}{l} \nabla f \rightarrow \\ \nabla g \rightarrow \\ \nabla h \rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2z+1 \\ 2x & 2y & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (2z+1)(-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff (2z+1)(4y+4x) = 0 \iff$$

$$\iff \left(z+\frac{1}{2}\right)(y+x) = 0$$

Om $z = -\frac{1}{2} \Rightarrow z \neq x^2+y^2 \Rightarrow$ passar inte.

Om $x = -y$ bivillkoren ger

$$\begin{cases} 2x^2+z^2=2 \\ z = 2x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^4+2x^2 - 2 = 0 \\ z = 2x^2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2x^4+x^2-1=0 \\ z = 2x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 = -1 \quad \text{– falsk rot} \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{array}\right. \\ z = 2x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{och} \quad y = -x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

De intressanta värdena är

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = 1+2\sqrt{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = 1-2\sqrt{2}$$

Svar! $f_{max} = 1+2\sqrt{2} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right).$

$f_{min} = 1-2\sqrt{2} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right).$

Extra

4.20

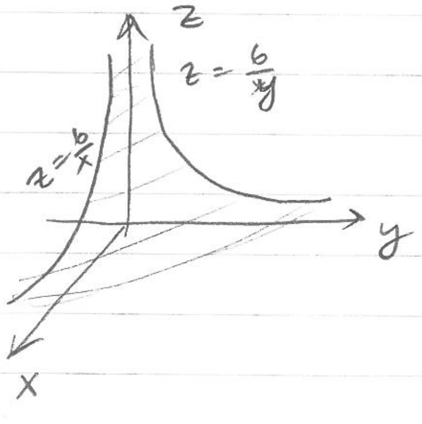
Det är klart att $f(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2} > 0$ för alla $(x,y,z)$, och $f(x,y,z) \neq 0$ för alla $(x,y,z)$. Samtidigt är

$$f(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2} \leq e^{-x^2-y^2-z^2} = e^{-r^2} \to 0,$$

då avståndet till origo $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to \infty$.

Dvs $f(x,y,z)$ kan bli så nära noll som vi vill, men kan aldrig bli exakt noll. Minsta värdet saknas!

Mängden $xyz \geq 6 \Leftrightarrow z \geq \frac{6}{xy}$ är inte begränsad, den består av alla punkter ovanför ytan $z = \frac{6}{xy}$, $x > 0$, $y > 0$.




Eftersom $f \to 0$ vid oändligheten, så förekommer det största värdet antingen på randen eller i en innre stationär punkt.

Innre stationära punkter!

$$\nabla f = (-2x, -4y, -6z)\, e^{-x^2-2y^2-3z^2} \Rightarrow$$

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0) \notin \text{området}$$

$\Rightarrow$ inga innre stat. punkter.

Randundersökning

Vi studerar $f(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$ under bivillkoret $g(x,y,z) = xyz = 6$.

$\nabla f \parallel \nabla g \iff \nabla f \times \nabla g = 0 \iff$ /Obs! $\nabla f \parallel (-2x,-4y,-6z)$/

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2x & -4y & -6z \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -4xy^2 + 6xz^2 = 0 \\ -2x^2y + 6z^2y = 0 \\ -2x^2z + 4y^2z = 0 \end{cases}$$

$x,y,z \neq 0$ $\iff$ $\begin{cases} -2y^2 + 3z^2 = 0 \\ -x^2 + 3z^2 = 0 \\ -x^2 + 2y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm \frac{x}{\sqrt{2}} \\ z = \pm \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Eftersom $x, y, z > 0$, behöver vi bara undersöka punkterna $\left(x, \frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{3}}\right)$. Insättning i bivillkoret ger $\frac{x^3}{\sqrt{6}} = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$.

Den enda kandidaten är $(\sqrt{6}, \sqrt{3}, \sqrt{2}) \Rightarrow$

$$f_{max} = f(\sqrt{6}, \sqrt{3}, \sqrt{2}) = e^{-6-6-6} = e^{-18}$$

Svar: $f_{max} = e^{-18} = f(\sqrt{6}, \sqrt{3}, \sqrt{2})$

$f_{min}$ saknas.

4.26

Observera att skärningskurvan är kompakt och sluten då den är skärningen mellan ett plan och ellipsoid ( ⇒ ellips). Vi måste lösa problemet

$$f(x,y,z) = z \to \max/\min$$

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{x+y+z}_{=g(x,y,z)} = 1 \\ \underbrace{x^2+xz+y^2+2z^2=9}_{=h(x,y,z)} \end{array}\right\} \text{bivillkoren}$$

Eftersom bivillkoren beskriver en kompakt sluten kurva ⇒ $\nabla f, \nabla g, \nabla h$ är linjärt beroende i alla de punkter som löser problemet. Vi söker dessa punkter:

$$\begin{array}{c} \nabla f \sim \\ \nabla g \sim \\ \nabla h \sim \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x+z & 2y & 4z \end{vmatrix} = 0 \iff 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x+z & 2y \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff 2y - 2x - z = 0.$$

Vi måste alltså lösa systemet

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y-2x-z=0 \\ x^2+xz+y^2+2z^2=9 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2y-2x & \text{(från 2a)} \\ 3y - x = 1 & \text{(insät. i 1a)} \\ x^2+xz+y^2+2z^2=9 \end{cases}$$

Insättning $x = 3y-1$ och $z = 2y-2x = 2y-6y+2 = 2-4y$ i $x^2+xz+y^2+2z^2=9$ ger

$(3y-1)^2+(3y-1)(2-4y)+y^2+2(2-4y)^2=9 \Leftrightarrow$

$\underline{9y^2}-\cancel{6y}+\cancel{1}+\cancel{6y}-2-\underline{12y^2}+4y+\underline{y^2}+\cancel{8}-32y+\underline{32y^2}=\cancel{9}$

$30y^2-28y-2=0 \Leftrightarrow$

$15y^2-14y-1=0 \Rightarrow y_{1,2}=\dfrac{14\pm\sqrt{14^2+60}}{30}=$

$=\dfrac{14\pm\sqrt{256}}{30}=\dfrac{14\pm16}{30}$

$\Rightarrow y_1=\dfrac{30}{30}=1$

$y_2=\dfrac{-2}{30}=-\dfrac{1}{15}$

$x_1=3y_1-1=3-1=2, \quad x_2=-3\cdot\dfrac{1}{15}-1=-\dfrac{18}{15}$

$z_1=2-4y_1=-2$ - den lägsta punkten

$z_2=2-4y_2=2+\dfrac{4}{15}=\dfrac{34}{15}$ - den högsta punkten.

Svar $(2,1,-2)$ ligger lägst.

$\left(-\dfrac{18}{15},-\dfrac{1}{15},\dfrac{34}{15}\right)$ ligger högst.