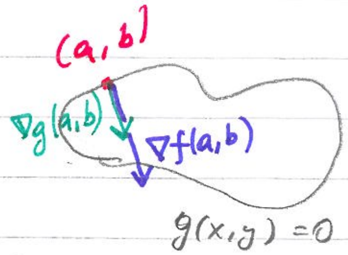
Lektion 14



Sats Betrakta problemet

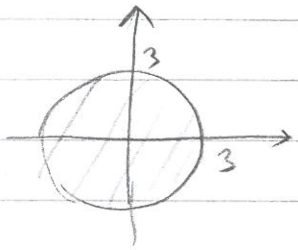
$f = f(x,y) \to \max/\min$

då (x,y) satisfierar $g(x,y)=0$. ← bivillkoret

I en innre punkt (a,b) som löser problemet är $\nabla f(a,b)$ och $\nabla g(a,b)$ parallella. (Mer allmänt, $\nabla f \parallel \nabla g$ i alla fs stationära punkter)

4.5 $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3y \to \max/\min$

då $(x,y) \in \{x^2+y^2 \le 9\}$ - kompakt.



Vi vet att f antar sitt max/min antingen i ngn innre stationär punkt eller på randen.

Stationära punkter

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x - 4x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x = -3 \\ y = -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{och } f(-1,2) = 1-2+4-6 = -3$$

Randundersökning

$\{x^2+y^2=9\}$ är randen.

Vi kan undersöka randen t ex som vi gjorde förut: genom att parametrisera cirkeln

som $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$ och sedan studera funktionen $g(t) = f(3\cos t, 3\sin t)$ då $0 \le t \le 2\pi$.

Men vi kan också betrakta problemet

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3y \to \max/\min$ då

$$\underbrace{\overbrace{x^2+y^2}^{=g(x,y)} = 9}_{\text{Bivillkoret}}$$

Enligt satsen förekommer lösningarna till problemet i de punkter där $\nabla g \parallel \nabla f$ vilket är ekvivalent med

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2x+y & x+2y-3 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2y(2x+y) - 2x(x+2y-3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{4xy} + 2y^2 - 2x^2 - \cancel{4xy} + 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$$y^2 - x^2 + 3x = 0.$$

Eftersom (x,y) tillhör ellipsen får vi ett ekvationssystem

$$\begin{cases} y^2 - x^2 + 3x = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 9 - x^2 \\ 9 - 2x^2 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 9 = 0 \\ y^2 = 9 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+72}}{4} = \dfrac{3 \pm 9}{4} \\ y^2 = 9 - x^2 \end{cases}$$

vilket ger oss punkterna

$$x = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \pm\frac{\sqrt{27}}{2} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$x = 3 \Rightarrow y = 0$, d v s $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right), (3,0)$.

Intressanta värden längs randen är alltså:

$$f\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{27}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{2} = 9 - \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{27}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{2} = 9 + \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

$$f(3,0) = 9$$

Vi ser att

$$\boxed{\begin{aligned} f_{max} &= 9 + \frac{27\sqrt{3}}{4} = f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right). \\ f_{min} &= -3 = f(-1, 2). \end{aligned}}$$

4.6

Avståndet från (x,y) till origo är en funktion $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Vi måste därför studera problemet

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \max/\min$$

$$\underbrace{x^4 + 2y^4}_{g(x,y)} = 6 \quad \text{— bivillkoret}$$

Söker punkterna där $\nabla f \parallel \nabla g \iff \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0.$

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 4x^3 & 8y^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{8xy^3}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{4x^3y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{4xy(2y^2-x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Detta är noll om och endast om $xy(2y^2-x^2)=0$

Vi kombinerar detta med bivillkoret för att få ett ekvationssystem

$$\begin{cases} xy(2y^2-x^2)=0 \\ x^4+2y^4=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ eller } y=0 \text{ eller } 2y^2=x^2 \\ x^4+2y^4=6 \end{cases}$$

1) Om $x=0 \Rightarrow 2y^4=6 \Rightarrow y^4=3 \Rightarrow y=\pm\sqrt[4]{3}$

2) Om $y=0 \Rightarrow x^4=6 \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{6}$

3) Om $2y^2=x^2 \Rightarrow 4y^4+2y^4=6 \Rightarrow y^4=1 \Rightarrow y=\pm 1$

$(x^2=2)$

Intressanta värden är alltså

$f(0;\pm\sqrt[4]{3}) = \sqrt{0+\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}$

$f(\pm\sqrt[4]{6}, 0) = \sqrt{\sqrt{6}+0} = \sqrt[4]{6}$

$f(\underbrace{\pm\sqrt{2}, \pm 1}_{\text{4 punkter!}}) = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$

Vi ser att

$f_{min} = \sqrt[4]{3} = f(0;\pm\sqrt[4]{3})$

$f_{max} = \sqrt{3} = f(\underbrace{\pm\sqrt{2}, \pm 1}_{\text{4 punkter}})$

4.7 $f(x,y) = xy \to max/min$ med bivillkoret

$\underbrace{5x^2-6xy+5y^2}_{g(x,y)} = 16$, $x+y \geq 2$

Vi först söker alla intressanta punkter för problemet $\begin{cases} f(x,y) \to max/min \\ 5x^2-6xy+5y^2=16 \end{cases}$

$$\nabla f \parallel \nabla g \iff \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\begin{vmatrix} y & x \\ 10x-6y & 10y-6x \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$10y^2 - \cancel{6xy} - 10x^2 + \cancel{6xy} = 0 \iff$$

$$y^2 = x^2 \iff y = \pm x$$

Insättning $y = x$ i bivillkoret ger

$$5x^2 - 6x^2 + 5x^2 = 16 \iff 4x^2 = 16 \iff x = \pm 2$$
$$\Rightarrow y = \pm 2$$

Insättning $y = -x$ i bivillkoret ger

$$5x^2 + 6x^2 + 5x^2 = 16 \iff 16x^2 = 16 \iff x = \pm 1$$
$$y = \mp 1$$

Intressanta punkter är alltså

$(2,2)$; $(-2,-2)$; $(1;-1)$; $(-1,1)$

men endast $(2,2)$ satisfierar $x+y \geq 2$.

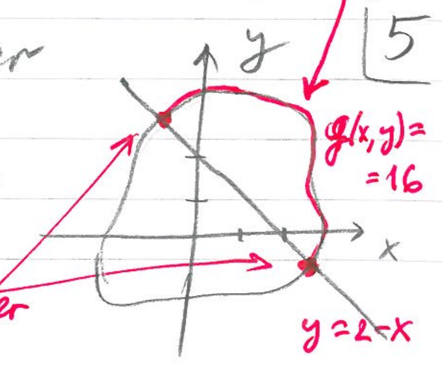
$$\boxed{f(2,2) = 4}$$

Observera att kurvan $\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16 \\ x+y \geq 2 \end{cases}$

5

behöver inte vara sluten och kommer eventuellt att ha randpunkter som beskrivs av ekvationenssystem

$$\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16 \\ x + y = 2 \end{cases}$$



Randpunkterna måste som vanligt undersökas separat!

Löser systemet!

$$\begin{cases} y = 2-x \\ 5x^2 - 6x(2-x) + 5(2-x)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2-x \\ 5x^2 - 12x + 6x^2 + 20 - 20x + 5x^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2-x \\ 16x^2 - 32x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2-x \\ 4x^2 - 8x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2-x \\ x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-16}}{8} = 1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{64-16} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$$

Randpunkterna är $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}, 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ och $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$\boxed{\begin{aligned} & f\left(1+\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 1-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{4}, \\ & f\left(1-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 1+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tfrac{1}{4}. \end{aligned}}$$

Svar $f_{max} = 4 = f(2,2)$

$f_{min} = \frac{1}{4} = f\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}, 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4.8 Vi vill göra cylinderns mantelyta

$$Y(h,d) = 2\pi h \cdot \frac{d}{2} + 2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi h d + \frac{\pi d^2}{2}$$

så liten så möjligt medan volymen

$$V(h,d) = h \cdot \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi h d^2}{4} = V_0$$

är konstant.

Vi studerar alltså problemet

$$Y(h,d) = \pi h d + \frac{\pi d^2}{2} \to \min$$

$$\underbrace{\frac{\pi h d^2}{4}}_{=V(h,d)} = V_0 \quad \text{— bivillkoret}$$

$$\nabla Y \parallel \nabla V \iff \begin{vmatrix} Y'_h & Y'_d \\ V'_h & V'_d \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\begin{vmatrix} \pi d & \pi h + \pi d \\ \frac{\pi d^2}{4} & \frac{\pi h d}{2} \end{vmatrix} = 0 \iff \frac{\cancel{\pi^2} h d^2}{2} - \frac{\cancel{\pi^2} h d^2}{4} - \frac{\cancel{\pi^2} d^3}{4} = 0$$

$$\iff \frac{h d^2}{\cancel{4}} - \frac{d^3}{\cancel{4}} = 0 \overset{d \neq 0}{\iff} \boxed{h = d}$$

I så fall $V_0 = \frac{\pi h^3}{4} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{4V_0}{\pi}}$,

så ytans värde är då

$$Y\left(\sqrt[3]{\frac{4V_0}{\pi}}, \sqrt[3]{\frac{4V_0}{\pi}}\right) = \frac{3}{2}\pi \cdot \left(\frac{4V_0}{\pi}\right)^{2/3} = \frac{3}{2}\pi \frac{16^{1/3} \cdot V_0^{2/3}}{\pi^{2/3}}$$

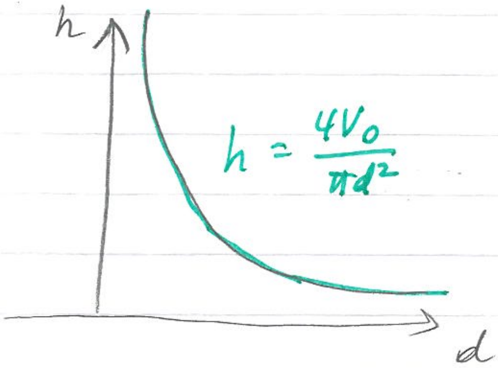
$$= \frac{3}{\cancel{2}} \pi^{1/3} \cdot \cancel{2} \cdot 2^{1/3} \cdot V_0^{2/3}$$

$$= \boxed{3 \sqrt[3]{2\pi V_0^2}.}$$

Varför är detta ytans minsta värdet?

Observera att kurvan $\frac{\pi h d^2}{4} = V_0 \iff$

$h = h(d) = \frac{4V_0}{\pi d^2}$ är inte begränsad så vi måste undersöka $Y(h,d)$s gränsvärde då vi går mot oändligheten längs kurvan.



$Y(h,d)$ längs kurvan kan skrivas som

$$f(d) = Y\left(\frac{4V_0}{\pi d^2}, d\right) =$$

$$= \cancel{\pi} \cdot \frac{4V_0 \cancel{d}}{\cancel{\pi} d^{\cancel{2}}} + \frac{\pi d^2}{2} =$$

$$= \frac{4V_0}{d} + \frac{\pi d^2}{2}.$$

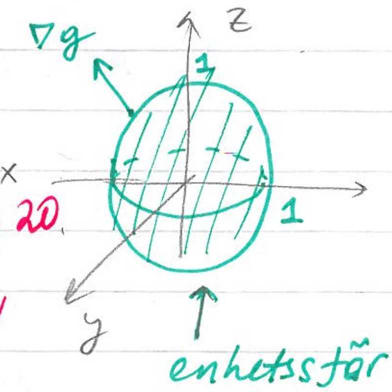
Vi ser att $\lim_{d \to \infty} f(d) = \lim_{d \to 0} f(d) = \infty \Rightarrow$

funktionens minsta värdet är

$$3\sqrt[3]{2\pi V_0^2} = Y\left(\sqrt[3]{\frac{4V_0}{\pi}}, \sqrt[3]{\frac{4V_0}{\pi}}\right).$$

4.12

$f(x,y,z) = xy + xz \rightarrow$ max/min då $\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{=g(x,y)} = 1$.



Vi söker punkter där $\nabla f \parallel \nabla g \Leftrightarrow \nabla f = \lambda \nabla g$ för någon $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se sidan 20 för en alternativ metod!!

$\nabla f = \lambda \nabla g$ tillsammans med bivillkoret ger oss ekvationssystem

$$\begin{cases} f'_x = \lambda g'_x \\ f'_y = \lambda g'_y \\ f'_z = \lambda g'_z \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} y+z = 2\lambda x & (1) \\ x = 2\lambda y & (2) \\ x = 2\lambda z & (3) \\ x^2+y^2+z^2=1 & (4) \end{cases} \iff$$

(Lagranges multiplikator-metod)

(2) − (3) ger $2\lambda(y-z)=0 \iff$ antingen $\lambda = 0$ eller $y = z$.

Om $\lambda = 0 \Rightarrow$ systemet blir $\begin{cases} y+z=0 \\ x=0 \\ y^2+z^2=1 \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} x=0 \\ z=-y \\ 2y^2=1 \end{cases}$ vilket ger punkter $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ och $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Om $y = z \Rightarrow$ systemet blir $\begin{cases} 2y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ y = z \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \iff$

Insättning

$x = 2\lambda y \rightsquigarrow y = \lambda x$ ger $y = 2\lambda^2 y \iff y(1-2\lambda^2)=0$.

Obs! $y \neq 0$ annars $x = 2\lambda y = 0$, $z = y = 0$ och punkten $(0,0,0)$ satisfierar inte $x^2+y^2+z^2=1$.

Vi ser att $1-2\lambda^2 = 0 \iff \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. I så fall

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{2}\,y \\ z = y \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y^2+y^2+y^2=1 \\ x = \pm\sqrt{2}\,y \\ z = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm\frac{1}{2} \\ x = \pm\sqrt{2}\,y \\ z = y \end{cases}$$

Detta ger oss fyra punkter:

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

De intressanta värdena är

$f\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$

$f\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = f_{max}$

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = f_{min}$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = f_{min}$

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = f_{max}$

Svar: $f_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2} = f\left(\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right).$

$f_{min} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = f\left(\pm\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right).$

4.14 Observera att avståndet till origo är störst (minst) då $x^2+y^2+z^2$ är störst (minst).

Vi studerar därför problemet

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \longrightarrow max/min$$

med bivillkoret $\underbrace{3x^2+y^2+3z^2+2xy+yz}_{=g(x,y,z)} = 3.$

Bivillkoret beskriver en kompakt mängd $\Rightarrow$ alla intressanta punkter är bara de där $\nabla f \parallel \nabla g \Leftrightarrow \nabla f = \lambda \nabla g$. Betraktar därför systemet

$$\begin{cases} 2x = \lambda(6x+2y) & (1) \\ 2y = \lambda(2y+2x+z) & (2) \\ 2z = \lambda(6z+y) & (3) \\ 3x^2+y^2+3z^2+2xy+yz=3 & (4) \end{cases}$$

$z\cdot(1) - x\cdot(3)$ ger

$$\begin{array}{rcl} 2xz &=& 6\lambda xz + 2\lambda yz \\ -\ 2xz &=& 6\lambda xz + \lambda xy \\ \hline 0 &=& 0 + \lambda y(2z-x) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{ant. } \lambda = 0 \\ \text{eller } y = 0 \\ \text{eller } x = 2z \end{array}$$

1) Om $\lambda = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$ från (1)-(3)
men $(0,0,0)$ uppfyller inte (4) $\Rightarrow$
ingen lösning i detta fall.

2) Om $y = 0$ blir systemet (obs! $\lambda \neq 0$)

$$\begin{cases} 2x = 6\lambda x \\ 0 = 2\lambda x + \lambda z \\ 2z = 6\lambda z \\ \cancel{3}x^2 + \cancel{3}z^2 = \cancel{3}\ 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (1-3\lambda)x = 0 \\ z = -2x \\ (1-3\lambda)z = 0 \\ 5x^2 = 1 \end{cases}$$

Vilket ger punkterna $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ och
$\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

3) Om $x = 2z$ blir systemet (obs! $\lambda \neq 0$)

$$\begin{cases} x = 2z \\ 2y = \lambda(2y+5z) \\ 2z = \lambda(6z+y) \\ 12z^2+y^2+3z^2+4yz+yz=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2z \\ (2-2\lambda)y = 5\lambda z \\ \lambda y = (2-6\lambda) z \\ 15z^2 + y^2 + 5yz = 3 \end{cases}$$

Från den tredje ekv. är $y = \dfrac{2-6\lambda}{\lambda} z$

Insättning i den andra ekv. ger

$$\frac{(2-2\lambda)(2-6\lambda)}{\lambda} z = 5\lambda z.$$

$z \neq 0$ (annars $x = y = 0 = z$ och bivillkoret är inte uppfylld) $\Rightarrow$

$$(2-2\lambda)(2-6\lambda) = 5\lambda^2 \iff$$

$$7\lambda^2 - 16\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 16 \cdot 7}}{14} = \frac{16 \pm \sqrt{9 \cdot 16}}{14} =$$

$$= \frac{16 \pm 12}{14} \Rightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \frac{2}{7}.$$

$\underline{\underline{\lambda_1 = 2}}$ I detta fall $y = \dfrac{2-12}{2} z = -5z$, så bivillkoret blir

$$15z^2 + \cancel{25z^2} - \cancel{25z^2} = 3 \Rightarrow$$

$z^2 = \dfrac{1}{5}$, villket ger punkterna (OBS! $x = 2z$)

$\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{5}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ och $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{5}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

$\underline{\underline{\lambda_2 = \frac{2}{7}}}$ I detta fall $y = \dfrac{2 - \frac{12}{7}}{\frac{2}{7}} z \Rightarrow$

$y = z$. Bivillkoret blir

$15z^2 + z^2 + 5z^2 = 3 \iff 21z^2 = 3$,

så $z^2 = \dfrac{1}{7}$, vilket ger oss punkterna

$\left(\dfrac{2}{\sqrt{7}}, \dfrac{1}{\sqrt{7}}, \dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)$ och $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{7}}, -\dfrac{1}{\sqrt{7}}, -\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)$

Intressanta värden:

$$f\left(\pm\left(\frac{1}{\sqrt5}, 0, -\frac{2}{\sqrt5}\right)\right) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$$

$$f\left(\pm\left(\frac{2}{\sqrt5}, -\frac{5}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}\right)\right) = \frac{4}{5} + \frac{25}{5} + \frac{1}{5} = 6 = f_{max}$$

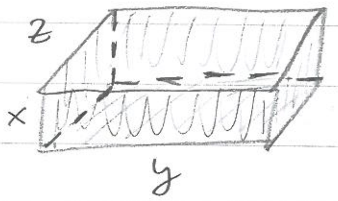
$$f\left(\pm\left(\frac{2}{\sqrt7}, \frac{1}{\sqrt7}, \frac{1}{\sqrt7}\right)\right) = \frac{4}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{6}{7} = f_{min}$$

Avståndet till origo ges av $\sqrt{f(x,y,z)}$!!

Svar: Största avst. är $\sqrt{6}$ i $\pm\left(\frac{2}{\sqrt5}, -\frac{5}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}\right)$

Minsta avst. är $\sqrt{\frac{6}{7}}$ i $\pm\left(\frac{2}{\sqrt7}, \frac{1}{\sqrt7}, \frac{1}{\sqrt7}\right)$.

4.15 Låt sidorna vara $x, y, z \Rightarrow$ volymen är x, y, z. Arean av sidoytorna är då (ingen lock!)



$$A(x,y,z) = yz + 2xy + 2xz.$$

Vi studerar problemet

$$A(x,y,z) = yz + 2xy + 2xz \rightarrow \min$$

$$\underbrace{xyz}_{=V(x,y,z)} = V_0 \quad \text{– bivillkoret}$$

OBS! bivillkoret definierar ytan som inte är begränsad ($z = \frac{V_0}{xy}$ är definierad för alla $x \neq 0, y \neq 0$)

Söker punkterna där $\nabla A \parallel \nabla V \iff$ $\nabla A = \lambda \nabla V$, vilket ger oss systemet

$$\begin{cases} 2y + 2z = \lambda yz & (1) \\ 2x + z = \lambda xz & (2) \\ 2x + y = \lambda xy & (3) \\ xyz = V_0 & (4) \end{cases}$$

$x \cdot (1) - y \cdot (2)$ ger $z(2x - y) = 0$ där $z \neq 0$ pga (4)

$y \cdot (2) - z \cdot (3)$ ger $2x(y - z) = 0$ där $x \neq 0$ pga (4).

Vi ser att $y = 2x = z$. Insättning i (4) ger

$$x \cdot 2x \cdot 2x = V_0 \iff x = \sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}$$

Den respektiva arean är

$$A\left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}, 2\sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}, 2\sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}\right) = 4 \cdot 3\left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}\right)^2 =$$

$$= 4^{1/3} \cdot 3 \cdot V_0^{2/3} = \underline{\underline{3(2V_0)^{\frac{2}{3}}}}$$

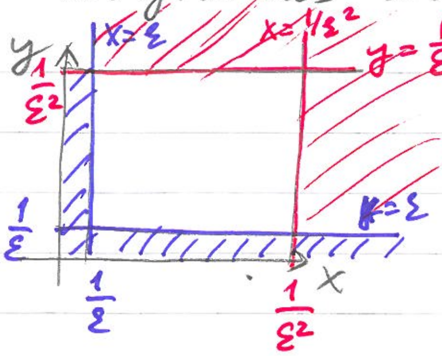
Nu måste vi visa att detta är areans minsta värde.

Bivillkoret $xyz = V_0$ beskriver en obegränsad yta $z = \frac{V_0}{xy}$. Längs ytan kan $A(x, y, z)$ skrivas som $f(x,y) = \left[z = \frac{V_0}{xy}\right] = 2xy + \frac{V_0}{x} + \frac{2V_0}{y}$,

$x > 0$, $y > 0$.

Vi vill visa att f antar sitt minsta värdet i $(x_0, y_0) = \left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}, 2\sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}\right)$.

Betrakta området utanför en kvadrat som avgränsas av linjerna $x = \varepsilon$, $x = \frac{1}{\varepsilon^2}$, $y = \varepsilon$, $y = \frac{1}{\varepsilon^2}$.



Vi antar att ε är mycket liten, så att (x_0, y_0) ligger i kvadraten. Vi ska visa att funktionen är jättestor utanför kvadraten $\Rightarrow$ funktionens minsta värde antas i kvadraten, nämligen i (x_0, y_0).

Antag att antingen $0 < x \leq \varepsilon$ eller $0 < y \leq \varepsilon$. I så fall är antingen $\frac{V_0}{x} \geq \frac{V_0}{\varepsilon}$ eller $\frac{V_0}{y} \geq \frac{V_0}{\varepsilon}$,

så $$f(x,y) = \underbrace{2xy}_{>0} + \underbrace{\frac{V_0}{x} + \frac{V_0}{y}}_{> \frac{V_0}{\varepsilon}} > \frac{V_0}{\varepsilon}$$

där $\frac{V_0}{\varepsilon}$ är en mycket stor konstant; i det blåa området på bilden.

Antag nu att antingen $x > \frac{1}{\varepsilon^2}$ eller $y > \frac{1}{\varepsilon^2}$ samtidigt som både $x > \varepsilon$ och $y > \varepsilon$ (motsvarar det röda området på bilden.

Om t ex $x > \frac{1}{\varepsilon^2}$ och $y > \varepsilon$ så

$$f(x,y) = \underbrace{2xy}_{> \frac{2}{\varepsilon}} + \underbrace{\frac{V_0}{x} + \frac{V_0}{y}}_{>0} > \frac{2}{\varepsilon} \text{ – mycket stor konst.}$$

Samma sak då $x > \varepsilon$ och $y > \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Vi ser att $f(x,y)$ är mycket stort i det röda området.

Slutsatsen är att $f(x_0, y_0)$ är funktionens minsta värdet.

Svar $A_{min} = 3(2V_0)^{2/3}$.

Extra

4.9 Avståndet till x-axeln ges av y-koordinat. Vi studerar därför

$f(x,y) = y \to min$

$\underbrace{(x-y)^2 - (x+y)}_{=g(x,y)} + 1 = 0$ – bivillkoret

$g(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - x - y + 1$ kan skrivas om till

$g(x,y) = x^2 - 2x\left(y+\frac{1}{2}\right) + y^2 - y + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\left(x - \left(y+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + y^2 - y + 1 - y^2 - y - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow$

$\left(x - \left(y+\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 2y - \frac{3}{4}$

Eftersom vänsterledet är icke-negativ, ser vi att det minsta möjliga värdet för y är då $2y - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{8}$.

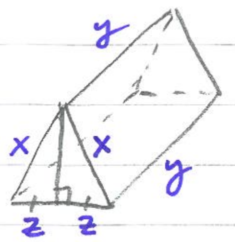
I så fall är $x - \left(y+\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$.

Det minsta avståndet till x-axeln har vi alltså i punkten $\left(\frac{7}{8}, \frac{3}{8}\right)$.

Svar: $\left(\frac{7}{8}, \frac{3}{8}\right)$.

4.18

Låt rektanglarnas sidor vara x och y, och låt baserna i de likbenta trianglarna vara $2z$.



OBS! $x, y, z > 0$

Tältets höjd är då $\sqrt{x^2 - z^2}$.

Tältets volym är

$$V(x,y,z) = \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{x^2 - z^2} \cdot 2z}_{\text{basens area}} \cdot \underbrace{y}_{\text{höjden}},$$

tältdukens area är

$$A(x,y,z) = 2xy + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - z^2}\, 2z.$$

Problemet kan formuleras som

$$A(x,y,z) = 2xy + 2\sqrt{x^2 - z^2} \cdot z \to \min$$

$$\underbrace{yz\sqrt{x^2 - z^2}}_{V(x,y,z)} = V_0 \quad \text{– bivillkoret}$$

Vi söker stationära punkter. Eftersom

$$\nabla A = \left(2y + \frac{2xz}{\sqrt{x^2 - z^2}},\ 2x,\ 2\sqrt{x^2 - z^2} - \frac{2z^2}{\sqrt{x^2 - z^2}}\right)$$

$$\nabla V = \left(\frac{xyz}{\sqrt{x^2 - z^2}},\ z\sqrt{x^2 - z^2},\ y\sqrt{x^2 - z^2} - \frac{yz^2}{\sqrt{x^2 - z^2}}\right)$$

blir $\nabla A \parallel \nabla V$ ekvivalent med

$$\begin{cases} 2y + \dfrac{2xz}{\sqrt{x^2 - z^2}} = \dfrac{\lambda xyz}{\sqrt{x^2 - z^2}} \\ 2x = \lambda z\sqrt{x^2 - z^2} \\ 2\sqrt{x^2 - z^2} - \dfrac{2z^2}{\sqrt{x^2 - z^2}} = \lambda y\left(\sqrt{x^2 - z^2} - \dfrac{z^2}{\sqrt{x^2 - z^2}}\right) \end{cases}$$

Den tredje ekvationen ger

$$(\lambda y - 2)\left(\sqrt{x^2 - z^2} - \frac{z^2}{\sqrt{x^2 - z^2}}\right) = 0 \iff$$

antingen $\lambda = \frac{1}{2y}$ eller $x^2 - z^2 - z^2 = 0 \iff x^2 = 2z^2$

$\iff x = z\sqrt{2}$.

<u>Betrakta $\lambda = \frac{1}{2y}$:</u> systemets första ekvation blir

$$y + \frac{xz}{\sqrt{x^2 - z^2}} = \frac{xz}{\sqrt{x^2 - z^2}} \Rightarrow y = 0, \text{ men } x, y, z > 0 ?!$$

$\Rightarrow x^2 - z^2 = z^2$

<u>Betrakta $x = z\sqrt{2}$:</u> systemets 1a och 2a ekv. blir

$$\begin{cases} 2y + \dfrac{2z^2\sqrt{2}}{z} = \dfrac{\lambda z\sqrt{2} \cdot y \cdot \cancel{z}}{\cancel{z}} \\ 2\cancel{z}\sqrt{2} = \lambda \cdot \cancel{z} \cdot z \end{cases} \iff \begin{cases} 2y + 2\sqrt{2}z = \lambda z y \cdot \sqrt{2} \\ z = \dfrac{2\sqrt{2}}{\lambda} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2y + \dfrac{8}{\lambda} = 4y \\ z = \dfrac{2\sqrt{2}}{\lambda} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{4}{\lambda} \\ z = \dfrac{2\sqrt{2}}{\lambda} \end{cases} \quad \text{och } x = \frac{4}{\lambda}$$

Insättning i bivillkoret ger

$$\frac{4}{\lambda} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{16}{\lambda^2} - \frac{8}{\lambda^2}} = V_0 \iff$$

$$\frac{4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{\lambda^3} = V_0 \iff \frac{32}{\lambda^3} = V_0 \Rightarrow \lambda = \left(\frac{32}{V_0}\right)^{1/3} = \frac{2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{V_0^{1/3}}$$

$$x = \frac{4}{\lambda} = \frac{4}{2 \cdot 2^{2/3}} \cdot V_0^{1/3} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot V_0^{1/3}$$

$$y = \frac{4}{\lambda} = \frac{4}{2 \cdot 2^{2/3}} \cdot V_0^{1/3} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot V_0^{1/3} \text{ -- längden}$$

$$z = \frac{2\sqrt{2}}{\lambda} = 2^{-\frac{1}{6}} \cdot V_0^{1/3} = \text{höjden} = \frac{\text{bredden}}{2}$$

Vilket ger arean

$$A(x,y,z) = 2\cdot 2^{2/3} V_0^{2/3} + 2\cdot 2^{-1/3} V_0^{2/3} =$$
$$= 2\cdot 2^{2/3} V_0^{2/3} + 2^{2/3} V_0^{2/3} = 3\sqrt[3]{2V_0}.$$

Varför är detta areans minsta värde?

Vi betecknar $\sqrt{x^2 - z^2} = h$ — tältets höjd.
$(\Rightarrow x = \sqrt{h^2+z^2})$

I så fall $y\cdot z\cdot h = V_0 \Rightarrow y = \dfrac{V_0}{zh}$. $A(x,y,z)$ blir

$$f(h,z) = \frac{2\sqrt{h^2+z^2}\cdot V_0}{hz} + 2hz =$$
$$= 2\sqrt{\frac{1}{h} + \frac{1}{z}} + 2hz, \quad h>0,\ z>0.$$

Samma resonemang som i $\underline{\underline{4.15}}$ (se s. 15)

visar att $f(h,z)$ är mycket stort i området utanför kvadraten som avgränsas av linjerna $h = \varepsilon$, $h = \frac{1}{\varepsilon^2}$, $z = \varepsilon$ och $z = \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Då antar funktionen sitt minsta värdet i sin enda stationära punkt.

<u>Svar</u>: minsta arean är $3\sqrt[3]{2V_0}$
höjden $= \dfrac{\text{bredden}}{2} = 2^{-\frac{1}{6}}\cdot V_0^{1/3}$
längen $= 2^{\frac{1}{3}} V_0^{1/3}$

4.12 (tillägg)

Att $\nabla f \parallel \nabla g$ kan också betraktas som

$\nabla f \times \nabla g = 0$.

Eftersom $\nabla f = (y+z, \; x, \; x)$ och
$\nabla g = (2x, \; 2y, \; 2z)$

är $\nabla f \times \nabla g = 0 \iff$

$$\begin{cases} 2xz - 2yx = 0 & (1) \\ 2z(y+z) - 2x^2 = 0 & (2) \\ 2y(y+z) - 2x^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) ger $x(z-y) = 0 \iff$ antingen $x=0$ eller $y=z$.

Om $x=0$: (2) och (3) blir $\begin{cases} yz + z^2 = 0 \\ y^2 + yz = 0 \end{cases}$ $\ominus$

$$z^2 - y^2 = 0$$

$\iff z = \pm y$.

Om $z = y \Rightarrow 2y^2 = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$ vilket inte satisfierar bivillkoret.

Om $z = -y \Rightarrow$ bivillkoret blir $2y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, vilket ger punkterna $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ och $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Om $y = z$: (2) och (3) blir $4z^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}z$

Insättning i bivillkoret ger oss $4z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm \frac{1}{2}$ och vi får samma fyra punkter som på s. 9.