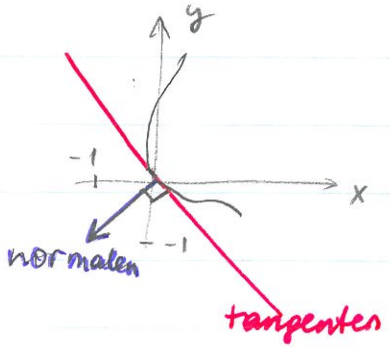
Lektion 11

3.12 Vi kan betrakta kurvan som en nivåkurva

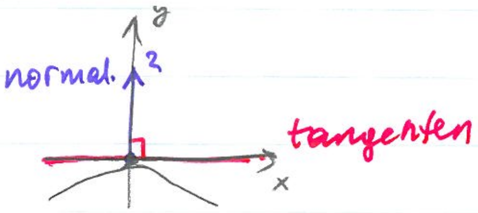
(*) $\underbrace{x^3+y^3+xy-x-y}_{=F(x,y)}=0$. I så fall

$\nabla F=(3x^2+y-1,\ 3y^2+x-1)$

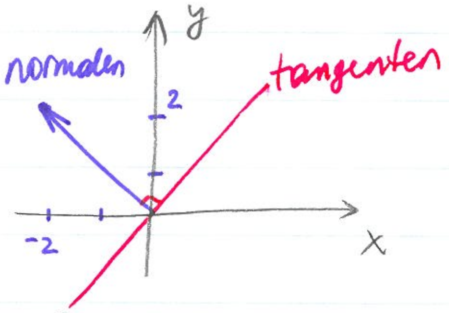
a) $\nabla F(0,0)=(-1,-1) \Rightarrow$ tangenten är inte parallell med y-axeln $\Rightarrow$ ekvationen definierar en C^1-funktion $y=f(x)$ i en omgivning till $(0,0)$



b) $\nabla F(0,1)=(0,\ 2) \Rightarrow$ tangenten är inte parallell med y-axeln $\Rightarrow$ —"—"—.



c) $\nabla F(0,-1)=(-2,\ 2) \Rightarrow$ tangenten är inte parallell med y-axeln. $\Rightarrow$ —"—"—



Låt $y=f(x)$ i (*): $x^3+(f(x))^3+xf(x)-x-f(x)=0$

Vi deriverar ekvationen!

$[x^3+(f(x))^3+xf(x)-x-f(x)]'=0 \Leftrightarrow$

$$3x^2 + 3(f(x))^2 \cdot f'(x) + f(x) + x f'(x) - 1 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)\left[3(f(x))^2 + x - 1\right] + 3x^2 + f(x) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{-3x^2 - f(x) + 1}{3(f(x))^2 + x - 1} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-3x^2 - y + 1}{3y^2 + x - 1}}, \quad \text{där } y = f(x).$$

a) Vi beräknar $f'(x)$ då $x = 0$, $y = \underbrace{0}_{=f(0)} \Rightarrow$

$$f'(0) = \frac{-3\cdot 0 - 0 + 1}{3\cdot 0 + 0 - 1} = -1$$

b) Nu är $x = 0$, $y = \underbrace{1}_{=f(0)} \Rightarrow f'(0) = \dfrac{-3\cdot 0 - 1 + 1}{3\cdot 1 + 0 - 1} = 0$

c) För $x = 0$, $y = \underbrace{-1}_{=f(0)}$: $f'(0) = \dfrac{-3\cdot 0 + 1 + 1}{3\cdot 1 + 0 - 1} = \dfrac{2}{2} = 1$

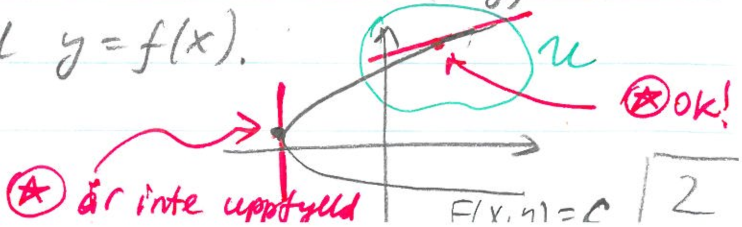
Dagens sats:

Implicita Functionssatsen:

Låt $F(x,y)$ vara C^1 funktion och (a,b) vara en punkt på nivåkurvan $F(x,y) = C$. Om

$\boxed{F'_y(a,b) \neq 0}$ (★) ← betyder att tangentes är inte parallelle mot y-axeln.

så finns en öppen omgivning $\mathcal{U}$ av (a,b) och en funktion $y = f(x)$ s a nivåkurvan $F(x,y) = C$ är en funktionsgraf till $y = f(x)$.



3.13 Betrakta $\underbrace{x^3 - 3xy^2}_{=F(x,y)} = 1$

a) $F'_x(1,0) = +3x^2 - 3y^2\big|_{(1,0)} = 3 \neq 0$

$\Rightarrow$ enligt satsen, definierar ekvationen en C^1-funktion $x(y)$ i en omgivning av $(1,0)$.

Vi byter x mot $x(y)$ i ekvationen:

$(x(y))^3 - 3x(y)\,y^2 = 1$ och deriverar m a p y:

$$\left((x(y))^3 - 3x(y)y^2\right)' = 0 \iff$$

$$3(x(y))^2 \cdot x'(y) - 3x'(y)\cdot y^2 - 6x(y)\cdot y = 0 \iff$$

$$x'(y) = \frac{6x(y)\cdot y}{3(x(y))^2 - 3y^2} \quad \text{eller} \quad \boxed{x'(y) = \frac{2x(y)\cdot y}{x(y)^2 - y^2}}$$

nära $y=0$, $x=1$.

I så fall $x(0) = 1$ och $x'(0) = \frac{2\cdot 0}{1^2 - 0} = 0$

b) $$x''(y) = \left[\frac{2x(y)\cdot y}{x(y)^2 - y^2}\right]' =$$

$$= \frac{(2x'(y)\cdot y + 2x(y))(x(y)^2 - y^2) - (2x(y)\cdot x'(y) - 2y)\,2x(y)\cdot y}{(x(y)^2 - y^2)^2}$$

$$= \frac{2x'(y)\cdot y + 2x(y)}{x(y)^2 - y^2} - \frac{2x(y)\cdot y\,(2x(y)\cdot x'(y) - 2y)}{(x(y)^2 - y^2)^2}$$

Eftersom $x(0) = 1 \Rightarrow x(y)^2 - y^2 \neq 0$ nära $y=0$

så $x''(y)$ är kontinuerlig nära $0 \Rightarrow x(y)$ är C^2

$$x''(0) = \begin{bmatrix} x(0)=1 \\ x'(0)=0 \end{bmatrix} = \frac{2\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 1}{1} - \frac{2\cdot 1\cdot 0(\ldots)}{1} = 2$$

Detta innebär att $x(y)$ kan Taylor-utvecklas nära $y=0$ som

$$x(y) = x(0) + \overbrace{x'(0)}^{=0}\cdot y + \frac{x''(0)\cdot y^2}{2} + O(y^3) \Leftrightarrow$$

$$x(y) = x(0) + \underbrace{\frac{2\cdot y^2}{2}}_{>0} + O(y^3) > x(0) \text{ för alla små } y \neq 0$$

$\Rightarrow$ $y=0$ är en lok. minimipunkt.

3.14

Betrakta $\underbrace{xy-(x+y)z^2+1-\tan 2z}_{=F(x,y,z)} = 0 \quad (*)$

$$F'_z = -2(x+y)z - \frac{2}{\cos^2 2z} \Rightarrow$$

$$F'_z(1,-1,\pi) = -2(1-1)\pi - \frac{2}{1} = -\frac{2}{1} \neq 0$$

$\Rightarrow$ ekvationen i ngn omgivning av $(1,-1,\pi)$ definierar en C^1-funktion $z(x,y)$.

Låt $z = z(x,y)$ i $(*)$:

$$xy - (x+y)\cdot(z(x,y))^2 + 1 - \tan 2z(x,y) = 0 \quad (\star)$$

Vi deriverar detta m a p x:

$$\left[xy - (x+y)\cdot(z(x,y))^2 + 1 - \tan 2z(x,y)\right]'_x = 0$$

$$y - 2z(x,y)\cdot z'_x(x,y)\cdot(x+y) - (z(x,y))^2 - \frac{2z'_x(x,y)}{\cos^2 2z(x,y)} = 0$$

$$z'_x\left[-2z\cdot(x+y) - \frac{2}{\cos^2 2z}\right] = z^2 - y$$

$$z'_x\left[-2zx - 2zy - 2 - 2\tan^2 2z\right] = z^2 - y$$

$$\Rightarrow \boxed{z'_x = \frac{y - z^2}{2(1 + (x+y)z + \tan^2 2z)}}$$

Deriverar nu (☆) m a p y:

$$x - 2z(x,y)\cdot z'_y(x+y) - (z(x,y))^2 - \frac{2z'_y(x,y)}{\cos^2 2z(x,y)} = 0$$

$$z'_y\left[-2z(x+y) - \frac{2}{\cos^2 2z}\right] = z^2 - x$$

$$z'_y\left[-2z(x+y) - 2 - 2\tan^2 2z\right] = z^2 - x$$

$$\boxed{z'_y = \frac{x - z^2}{2(1 + (x+y)z + \tan^2 2z)}}$$

Vi ser att $z(1,-1) = \pi$,

$$z'_x(\underset{x}{1}, \underset{y}{-1}) = \left[z(1,-1) = \overset{z}{\pi}\right] = \frac{-1-\pi^2}{2(1 + \underbrace{(1-1)\cdot\pi}_{=0} + \underbrace{\tan^2 2\pi}_{=0})}$$

$$= \frac{-1-\pi^2}{2}$$

$$z'_y(1,-1) = \frac{1-\pi^2}{2(1 + \underbrace{(1-1)\pi}_{=0} + \underbrace{\tan^2 2\pi}_{=0})} = \frac{1-\pi^2}{2}$$

3.15

a) Låt $F(x,y) = y^3 + y - e^x + x - 9 = 0$.

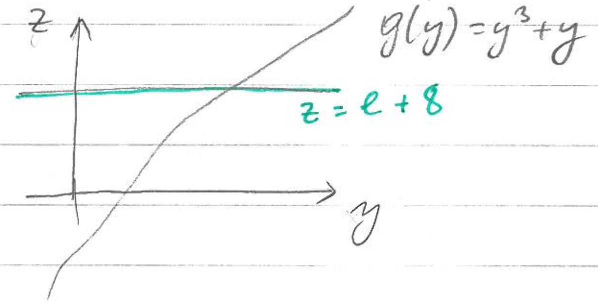
Om $x = 1$, ekvationen blir

$$y^3 + y - e + 1 - 9 = 0 \iff$$

$$y^3 + y = e + 8.$$

Observera att $g(y) = y^3 + y$ satisfierar

$g'(y) = 3y^2 + 1 > 0 \Rightarrow$ vänsterledet i ekvationen är en strängt växande funktion, $\lim_{y \to \pm\infty} g(y) = \pm\infty$.

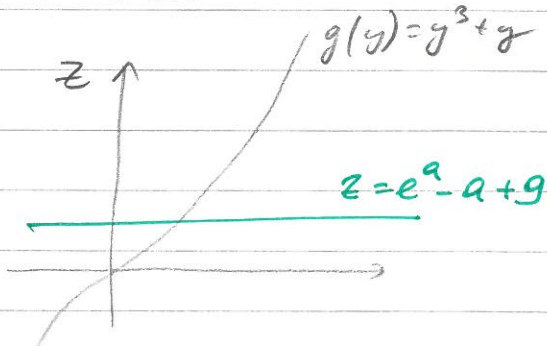


Uppenbarligen har ekvationen en lösning.

b) Låt $x = a = $ konst. Ekvationen blir

$$y^3 + y - e^a + a - 9 = 0 \iff$$

$$y^3 + y = \underbrace{e^a - a + 9}_{= \text{konst}}$$



Vi har sett i a) att vänsterledet är en strängt växande funktion som antar alla värden mellan $-\infty$ och $+\infty$ $\Rightarrow$ ekvationen har exakt en lösning y för varje x.

c) För alla $x=a$ och $y=b$ är

$F'_y(a,b) = (3y^2+1)\big|_{(a,b)} > 1 \neq 0 \Rightarrow$ lösningen $y=f(x)$ (definierad enligt b) i ngn omgivning till $x=a$) är C^1 i någon omgivning till $x=a$ (d v s C^1 lokalt).

d) $y=f(x)$ är definierad i varje punkt $x=a$ och är C^1 i någon omgivning till $x=a$ enligt c). I så fall är $y=f(x)$ deriverbar i varje punkt $x=a \in \mathbb{R}$, och derivatan i denna punkt är kontinuerlig $\Rightarrow$ $y=f(x)$ är C^1 globalt, d v s för alla $x \in \mathbb{R}$

e) Vi har redan sett att definitionsmängden

$D_f = \mathbb{R}.$

Vi nu låter $y=f(x)$ i den ursprungliga ekvationen

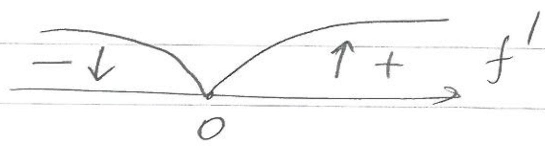
$$(f(x))^3 + f(x) - e^x + x - 9 = 0 \qquad (*)$$

och deriverar

$$\left((f(x))^3 + f(x) - e^x + x - 9\right)' = 0$$

$$3(f(x))^2 f'(x) + f'(x) - e^x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{\underbrace{3(f(x))^2 + 1}_{\text{alltid } > 0\,!}}$$

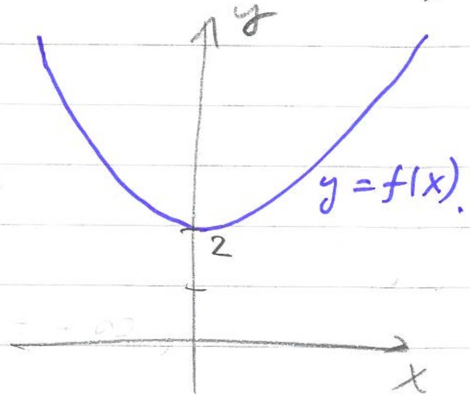


Eftersom $e^x > 1$ då $x > 0$ och $e^x < 1$ då $x < 0$ ser vi att $f\uparrow$ på $(-\infty; 0]$ och $f\downarrow$ på $[0; +\infty)$

Värdet $f(0)$ kan fås av $(*)$ då $x=0$!

$(f(0))^3 + f(0) + 1 - 9 = 0 \Leftrightarrow f(0)^3 + f(0) = 8 \Rightarrow$

$f(0) = 2$ (det finns inga andra lösningar: se b)).



Från $(f(x))^3 + f(x) = e^x - x + 9$

och $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (e^x - x + 9) = +\infty$

ser vi att $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

Vi kan skissera grafen $y = f(x)$, och det är uppenbart att värdemänden $V_f = [2; +\infty)$

Implicita funktionssatsen för skärningen mellan två nivåytor:

Låt $\begin{cases} F(x,y,z) = C \\ G(x,y,z) = D \end{cases}$ $(*)$ vara skärningen mellan två nivåytor

Om $\dfrac{d(F,G)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$ innebär att tangenten till skärningskurvan ~~är~~ inte är parallell med (x,y)-planet

vinkelrätt mot Oz

i (a,b,c) på skärningen $\Rightarrow$ det finns en omgivning av (a,b,c) där $(*)$ bestämmer två C^1-funktioner

$\begin{cases} x = f(z) \\ y = g(z) \end{cases}$.

D vs skärningen $(*)$ kan parametrizeras som

$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = t \end{cases}$, $f, g \in C^1$

Se boken, s. 153–156 för mer information.

3.18

Betrakta nivåytorna (låt deras skärning vara γ)

$$(*)\quad \begin{cases} \overbrace{x+y+z}^{=F(x,y,z)} = 6 \\ \underbrace{xyz}_{=G(x,y,z)} = 6 \end{cases}$$

$\nabla F(x,y,z) = (1,1,1)$
$\nabla G(x,y,z) = (yz, xz, xy)$

$\Rightarrow \nabla F(1,2,3) = (1,1,1)$ och
$\nabla G(1,2,3) = (6,3,2)$

Både $\nabla F(1,2,3)$ och $\nabla G(1,2,3)$ är vinkelräta mot skärningskurvan $\gamma \Rightarrow \gamma$s tangentlinje har riktningsvektor

$$\nabla F(1,2,3) \times \nabla G(1,2,3) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} =$$

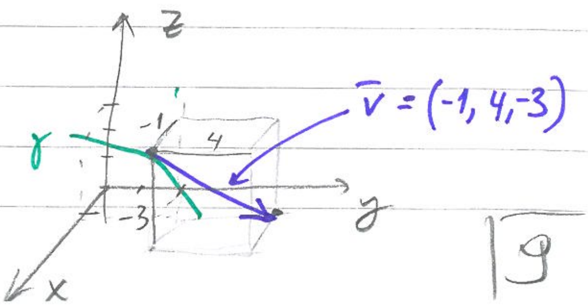
$$= \bar{i}(2-3) - \bar{j}(2-6) + \bar{k}(3-6) =$$

$$= -\bar{i} + 4\bar{j} - 3\bar{k} = (-1, 4, -3)$$

Eftersom $(-1,4,-3)\cdot\underbrace{(0,1,0)}_{\text{y-axelns riktning}} = 4 \neq 0 \Rightarrow$

tangenten till γ i $(1,2,3)$ inte är vinkelrät mot y-axeln $\Rightarrow \gamma$ kan parametriseras nära denna punkt som

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = t \\ z = z(t) \end{cases}$$



Låt $y = 2$ i $(*)$ => vi kan beräkna $x(2)$ och $z(2)$:

$$\begin{cases} x + 2 + z = 6 \\ 2xz = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - z \\ z(4-z) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - z \\ z^2 - 4z + 3 = 0 \end{cases}$$

Vilket ger oss $x = 1$ och $z = 3$
(Det andra paret $x = 3$ och $z = 1$ ger punkten $(3, 2, 1)$ vilket ligger inte så nära $(1, 2, 3)$, så det är inte så säkert att kurvan kan parametriseras där på samma sätt).

Låt nu $x = x(y)$, $z = z(y)$ i $(*)$ =>

$$\begin{cases} x(y) + y + z(y) = 6 \\ y \cdot x(y) \cdot z(y) = 6 \end{cases} \underset{\substack{\text{deriverar} \\ \text{m a p } y}}{\Rightarrow} \begin{cases} x'(y) + 1 + z'(y) = 0 \\ x(y)z(y) + y\big(x'(y)z(y) + \\ \quad + x(y)z'(y)\big) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1 - z' \\ xz + yz \cdot x' + xy \cdot z' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x' = -1 - z' \\ xz + yz(-1 - z') + xyz' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1 - z' \\ z'(-yz + xy) = yz - xz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1 - z' \\ z' = \dfrac{z(y-x)}{y(x-z)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1 - \dfrac{zy - xz}{yx - yz} = \dfrac{-yx + \cancel{yz} - \cancel{yz} + xz}{yx - yz} = \dfrac{x(z-y)}{y(x-z)} \\ z' = \dfrac{z(y-x)}{y(x-z)} \end{cases}$$

Vi ser att

$$\boxed{\begin{aligned} x'(y) &= \frac{x(z-y)}{y(x-z)} \\ z'(y) &= \frac{z(y-x)}{y(x-z)} \end{aligned}}$$

Speciellt gäller det i $y=2$ (dvs i $(1,2,3)$) att

$$\underline{x'(2)} = \frac{1(3-2)}{2(1-3)} = \frac{1}{-4} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

$$\underline{z'(2)} = \frac{3(2-1)}{2(1-3)} = \frac{3}{-4} = \underline{\underline{-\frac{3}{4}}}$$

<u>3.19</u>

Vi betraktar skärningen γ mellan ytorna

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2 = 2 \\ x+y = 2e^z \end{cases} \iff \begin{cases} \overbrace{x^2+y^2-z^2}^{=F(x,y,z)} = 2 \\ \underbrace{x+y-2e^z}_{=G(x,y,z)} = 0 \end{cases}$$

$$\nabla F(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)$$
$$\nabla G(x,y,z) = (1, 1, -2e^z) \Rightarrow$$

$$\nabla F(1,1,0) = (2,2,0)$$
$$\nabla G(1,1,0) = (1,1,-2)$$

både är vinkelräta mot $\gamma \Rightarrow \nabla F(1,1,0) \times \nabla G(1,1,0)$ är γs riktningsvektor

Vi beräknar kryssprodukten

$\nabla F(1,1,0) \times \nabla F(1,1,0) =$

$= (2,2,0) \times (1,1,-2) =$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\bar{i} + 4\bar{j} + 0 \cdot \bar{k} = (-4,4,0) = 4 \cdot (-1,1,0) \parallel (-1,1,0)$$

vilket inte är vinkelrätt mot x-axeln, då $(-4,4,0) \cdot (1,0,0) = -4 \neq 0$

I så fall kan skärningen γ nära $(1,1,0)$ parametriseras med x som parameter så att $y(x)$ och $z(x)$ är C^1- funktioner.

Vi kan ta $(-1,1,0)$ som γs tangentvektor.

Extra

3.13c Dessa punkter är de punkter där $\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3y^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm y$,

vilket måste kombineras med $x^3 - 3xy^2 = 1$.

$x = y \Rightarrow y^3 - 3y^3 = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$x = -y \Rightarrow -y^3 + 3y^3 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Ekvationen definierar inte lokalt C^1- funktioner $x = x(y)$ kring $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \pm\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$. Eftersom

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \pm\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = -6xy\Big|_{\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \pm\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)} \neq 0$$

är $y = y(x)$ definierad kring dessa punkten och är en C^1 funktion.

<u>3.16</u> Betrakta $F(t, v) = 0$ där

$$F(t,v) = t - v + e \sin v \quad , \quad e = \text{konst} \in [0; 1)$$

Eftersom $F'_v = -1 + \underbrace{e\cos v}_{\in[-1;1]} \in [-1-e; -1+e]$ $\not\ni 0$

där $e \in [0;1)$ är F'_v aldrig noll,
så (på samma sätt som i <u>3.15</u>)

ekvationen definierar en C^1 funktion
$v = v(t)$ med $D_v = \mathbb{R}$.

Från $t - v(t) + e \sin v(t) = 0 \Rightarrow$

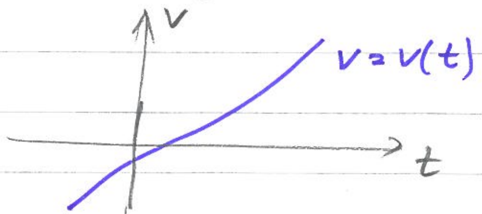
$$\left(t - v(t) + e \sin v(t)\right)' = 0 \Rightarrow$$

$$1 - v'(t) + e \cos v(t) \cdot v'(t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$v'(t) = \frac{1}{1 - e\cos v(t)} > 0,$$

eftersom $|e \cos v(t)| \le |e| < 1$

så $v(t)$ är en strängt växande funktion.
Eftersom



$$t = v - \underbrace{e \sin v}_{\text{begränsad}}$$

ser vi att $\lim\limits_{t \to \pm\infty} v(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \Big(t + \underbrace{e \sin v}_{\text{begr.}}\Big) = \pm\infty$

så pga satsen om mellanliggande värden
$D_v = \mathbb{R}$.

3.17 Betrakta $F(x,y,z) = (y^2+z^4)x + x^5$
och ekvationen $F(x,y,z) = 1$.

$$F'_x = y^2+z^4+5x^4.$$

Vi ser att $F'_x = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$ men den här punkten tillhör inte ytan $(y^2+z^4)x + x^5 = 1$. Det betyder att

$F'_x = y^2+z^4+5x^4 \neq 0$ för alla (x,y,z) som satisfierar $F(x,y,z) = 1$.

I så fall definierar ekvationen $F(x,y,z) = 1$ en C^1-funktion $x(y,z)$ i hela yz-planet.

Vi skriver om ekvationen till

$(y^2+z^4)x(y,z) + (x(y,z))^5 = 1$ och deriverar.

1) map y:

$$2y \cdot x(y,z) + (y^2+z^4)x'_y + 5(x(y,z))^4 \cdot x'_y = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x'_y(y,z) = \frac{-2xy}{y^2+z^4+5x^4}}$$

2) map z:

$$4z^3x(y,z) + (y^2+z^4)x'_z + 5(x(y,z))^4 z'_z = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x'_z(y,z) = \frac{-4xz^3}{5x^4+y^2+z^4}}$$