Envariabelanalys 2 TATA 42

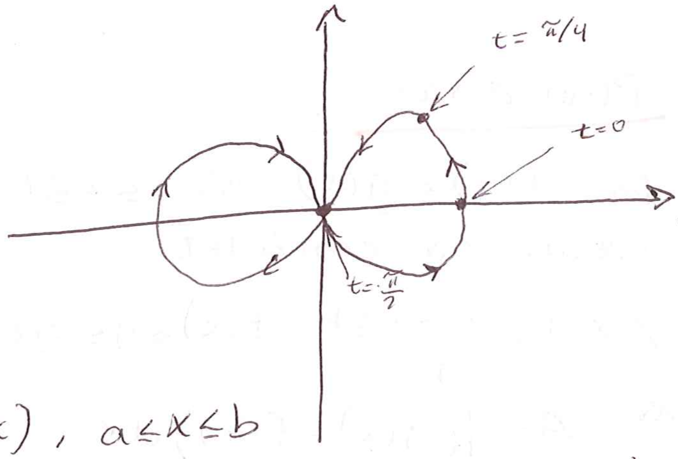
FÖ 1

Tillämpningar av integraler

Men först: Kurvor i planet

- Parameterform: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $a \leq t \leq b$ (t parameter)

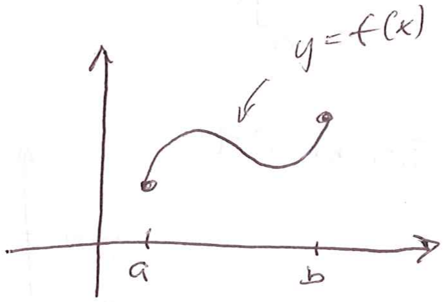
Ex. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin 2t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$



- Funktionskurva: $y=f(x)$, $a \leq x \leq b$

  Kan ses som par. kurva:

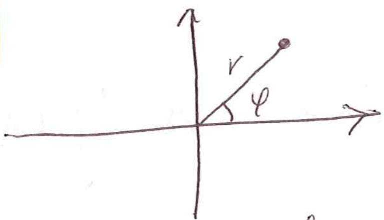
  $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$, $a \leq t \leq b$



- Funktionskurva i polära koordinater:

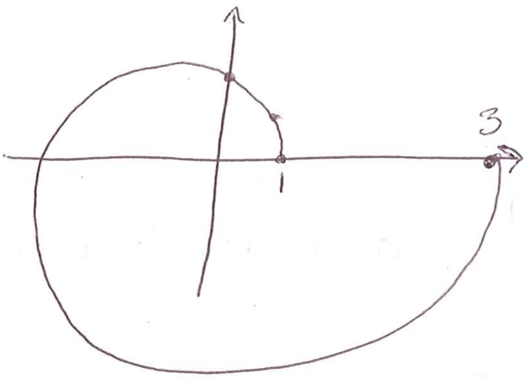
  $r = f(\varphi)$, $u \leq \varphi \leq v$

Kom ihåg:



$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

Ex. $r = 1 + \frac{\varphi}{\pi}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$



$\left(\Rightarrow r(0) = 1, \; r\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \; r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}, \ldots \right)$

Kan ses som par. kurva:

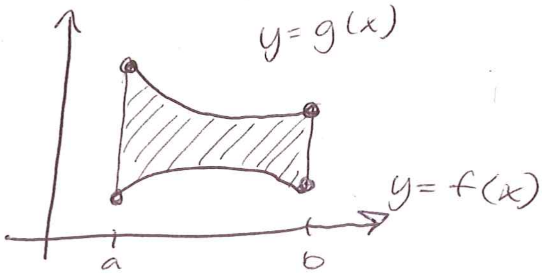
$$\begin{cases} x = f(t)\cos t \\ y = f(t)\sin t \end{cases}, \quad u \le t \le v$$

Plan area

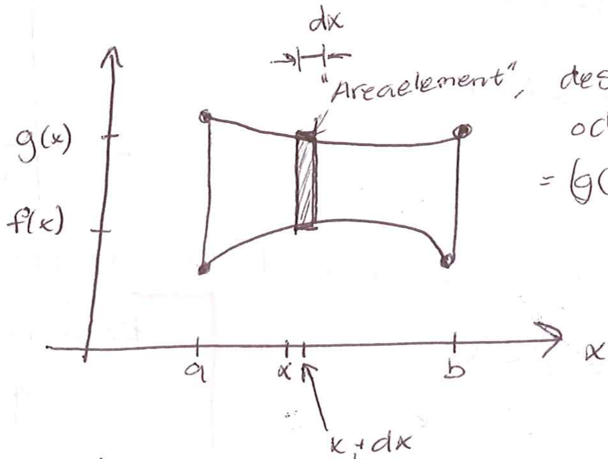
Om $f(x) \le g(x)$ då $a \le x \le b$ ges arean av området

$$\{x, y \,;\, a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$$

av $A = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$



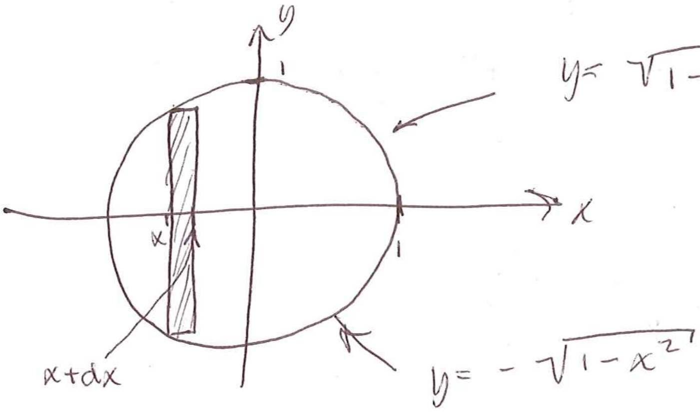
Tankesätt



"Areaelement", dess area betecknas dA och ges av $dA = \text{höjd} \cdot \text{bredd} = (g(x) - f(x)) \cdot dx$

Vi skriver $A = \text{"}\int dA\text{"} = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$

Ex. Arean innanför enhetscirkeln $x^2+y^2=1$



$dA=$

$$dA=\left(\sqrt{1-x^2}-\left(-\sqrt{1-x^2}\right)\right)dx$$

Så $A=\int dA=$

$$=\int_{-1}^{1}2\sqrt{1-x^2}\,dx=$$

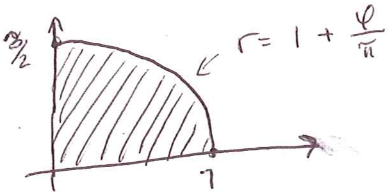
$$=\left/\!\!\left/\begin{matrix}x=\sin t\\ dx=\cos t\,dt\end{matrix}\right/\!\!\right/=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}2\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt=$$

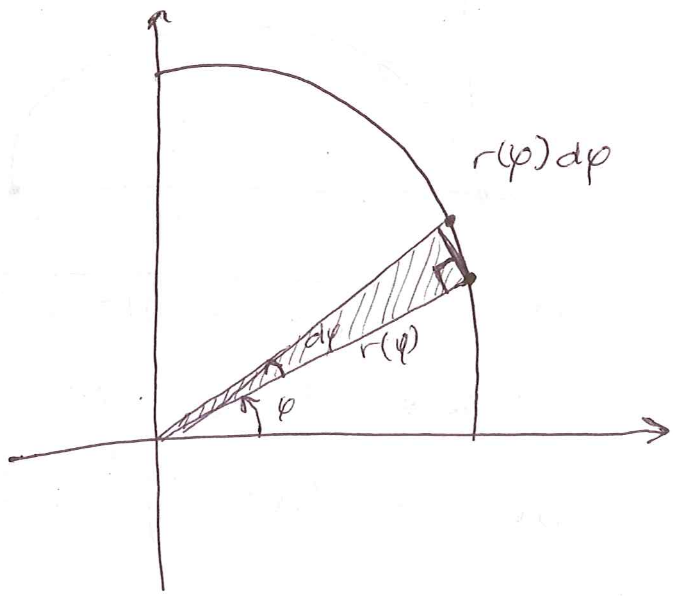
$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}2\cos^2 t\,dt=\ldots=\pi$$

dubbla vinkeln

Areaelementet på polär form

Ex. Bestäm arean av området





$$dA=\frac{\text{bas}\cdot\text{höjd}}{2}=$$

$$=\frac{r(\varphi)\cdot r(\varphi)d\varphi}{2}=$$

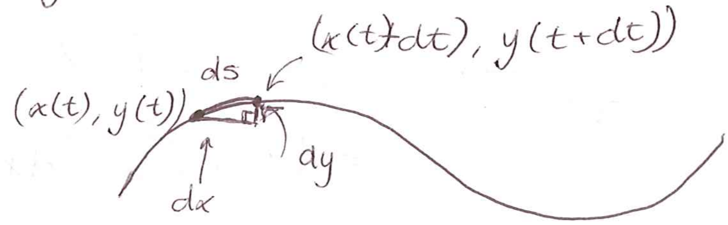
$$=\frac{1}{2}r(\varphi)^2\,d\varphi$$

$$A=\int dA=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(1+\frac{\varphi}{\pi}\right)^2 d\varphi=\ldots=\frac{19\pi}{48}$$

Kurvlängd

Bågelement (längdelement) för par. kurva

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

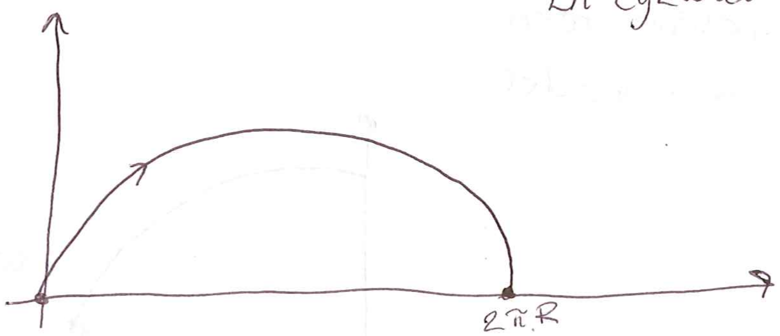


$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2} =$$

$$= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Ex. $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

En cykloid.

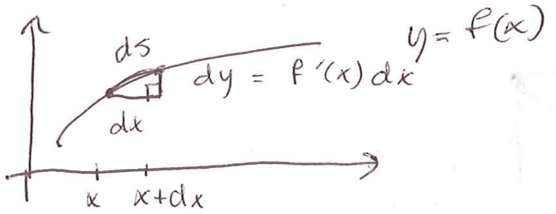


$$ds = \sqrt{(R(1-\cos t))^2 + (R\sin t)^2}\, dt = \ldots =$$

$$= 2R \sin \frac{t}{2}\, dt, \quad \text{om } 0 \leq t \leq 2\pi$$

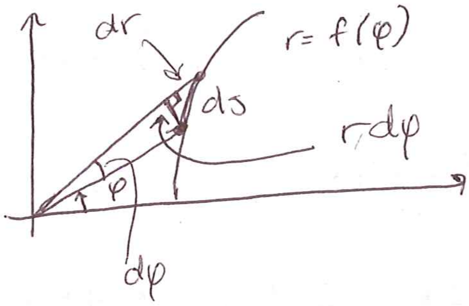
Så $L = \int ds = \int_0^{2\pi} 2R \sin\frac{t}{2}\, dt = 2R\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{8R}}$

Bågelement för funktionskurva:



$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (f'(x)dx)^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

Bågelement i polära koordinater

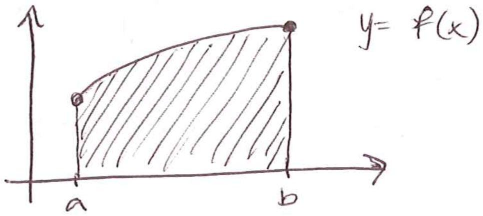


$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (r(\varphi)d\varphi)^2} = \sqrt{(f'(\varphi)d\varphi)^2 + (f(\varphi)d\varphi)^2} = \sqrt{f(\varphi)^2 + f(\varphi)^2}\,d\varphi$$

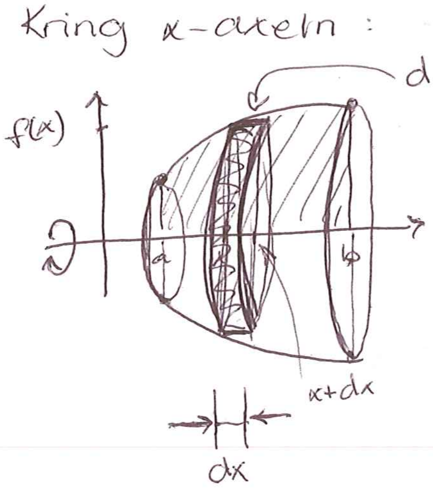
Rotationsvolymer

Låt $f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$.

Rotation av området:



Kring x-axeln:



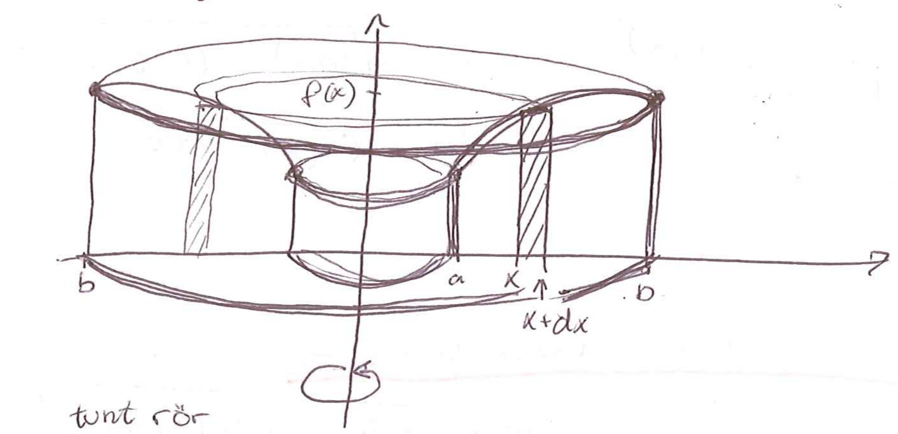
$dV =$ snittarea $\cdot$ tjocklek $=$ (tunn skiva)

$= \pi f(x)^2 \cdot dx$

så volymen

$$V = \text{"}\int dV\text{"} = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

Kring y-axeln (antag $a \geq 0$)

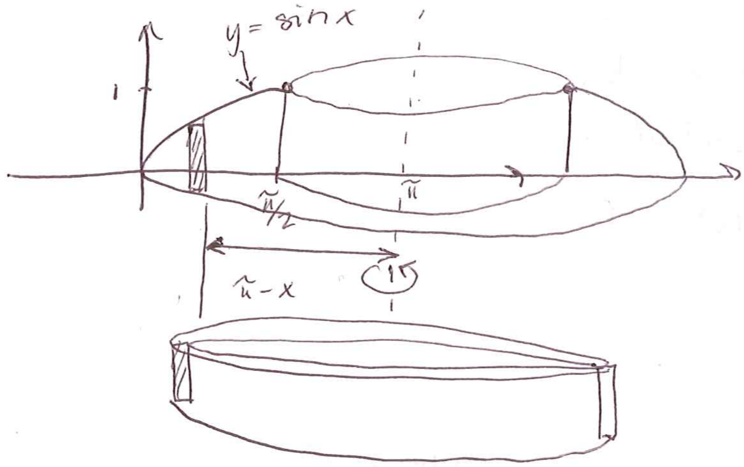


tunt rör

$dV \doteq$ omkrets · höjd · tjocklek $= 2\pi x \cdot f(x) \cdot dx$,

så volym $V = \int dV = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx$

Ex. Volymen då området $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \sin x$ roterar kring axeln $x = \pi$.



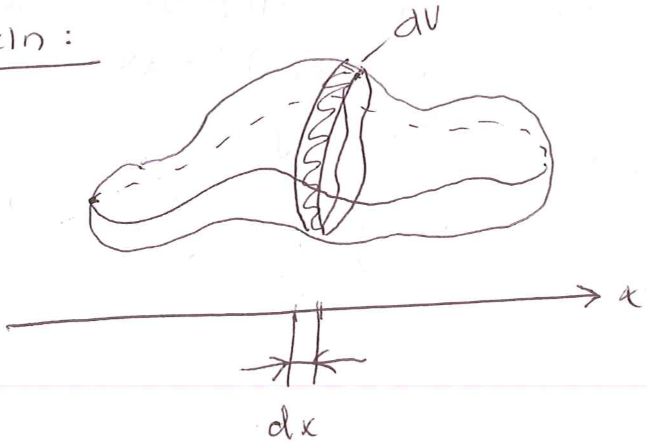
$dV =$ omkrets · höjd · tjocklek

$= 2\pi(\pi - x) \cdot \sin x \cdot dx$

så $V = 2\pi \int_0^{\pi/2} (\pi - x) \sin x\, dx \overset{\text{P.I.}}{=}$

$= \ldots = 2\pi(\pi - 1)$

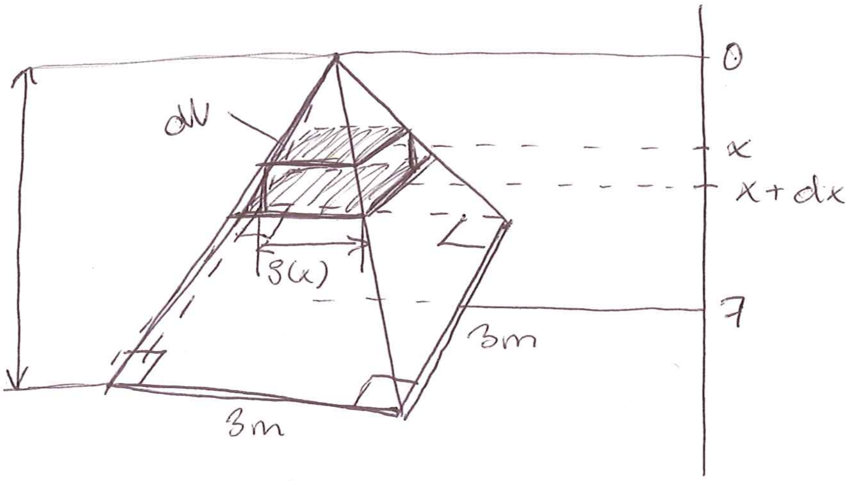
Skivformeln:



$dV =$ snittarean · tjocklek $= A(x)\, dx$ så

$V = \int dV = \int_a^b A(x)\, dx$

Ex.



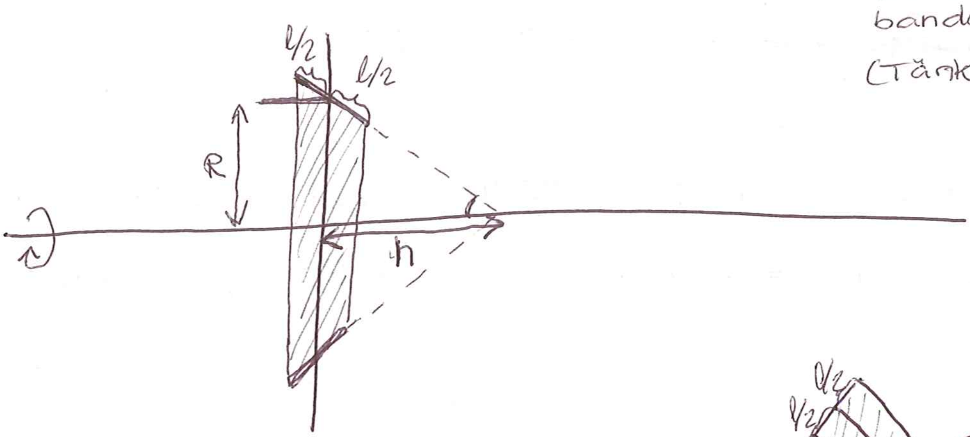
$$dV = A(x)\,dx = \Big/\!\!\Big/ \; A(x) = s(x)^2 = \left(\frac{3x}{7}\right)^2 \Big/\!\!\Big/ =$$

$$= \frac{9x^2}{49}\,dx \quad \text{så} \quad V = \int_0^7 \frac{9x^2}{49}\,dx = \dots = 21\ m^3$$

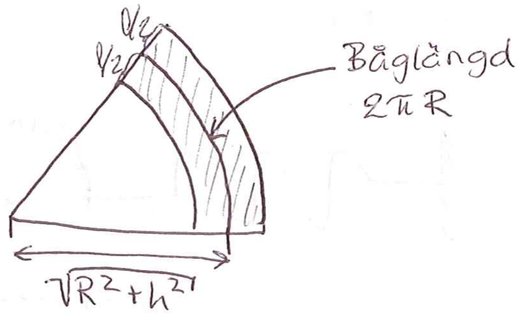
$$\left(\frac{7 \cdot 3^2}{3} = 21 \right)$$

Fö 2

Rotationsarea



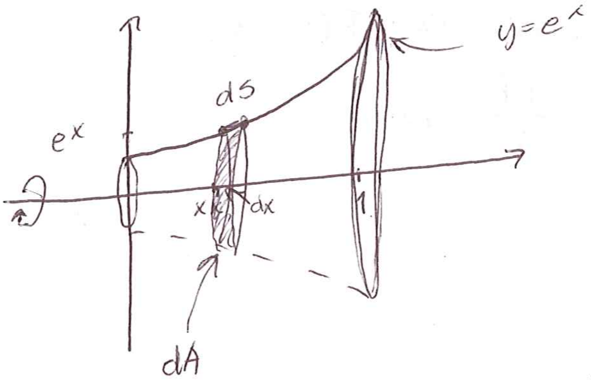
Vad blir arean av bandet?
(Tänk kon)



Klipp ut, vik ut!

Ger bandarean $= 2\pi R l$
(Övning!)

<u>Ex.</u> Rotationsarean då kurvan $y=e^x$, $0 \le x \le 1$ roterar kring x-axeln.



$dA = 2\pi R\, ds$

$R = e^x$ och $ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx =$

$= \sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

Så $A = \int dA =$

$= \int_0^1 2\pi e^x \sqrt{1+e^{2x}}\,dx =$ // se kap 5. //

$= \pi\left(e\sqrt{1+e^2} + \ln\left(e+\sqrt{1+e^2}\right) - \sqrt{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$

Andra tillämpningar

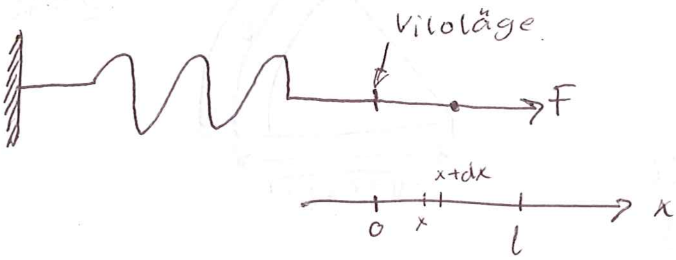
Ex. En tråd mellan $x=0$ och $x=1$

har densitet $\rho(x) = 2-x$ kg/m. Vad är dess massa?

Masselement: $dm = \rho(x)\,dx$, så $m = \int dm = \int_0^1 (2-x)\,dx =$

$= \frac{3}{2}$ kg

Ex.



$F = kx$ (fjäderekvation)

↑ fjäderkonstant [N/m]

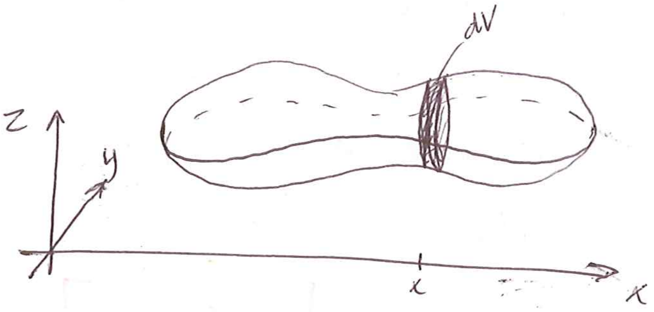
Hur mycket arbete W (= kraft · väg) uträttas då fjädern dras ut från $x=0$ till $x=l$?

"Från x till $x+dx$ uträttas arbetet $dW = F(x)\,dx$"

Så $W = \int dW = \int_0^l kx\,dx = \frac{kl^2}{2}$ Nm

Tyngdpunkt

Homogen kropp

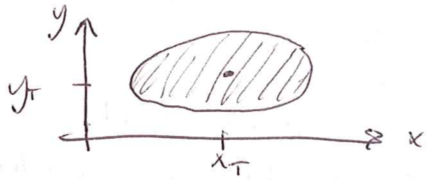


"Definition" av kroppens tyngdpunkts x-koordinat x_T:

$$x_T = \frac{1}{V}\int (x_T \text{ för } dV)\, dV$$

Analogt för y_T och z_T.

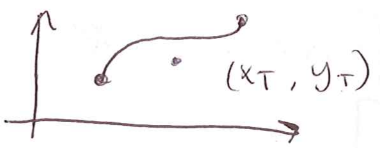
Tyngdpunkten för en area i xy-planet:



$$x_T = \frac{1}{A}\int (x_T \text{ för } dA)\, dA$$

$$y_T = \frac{1}{A}\int (y_T \text{ för } dA)\, dA$$

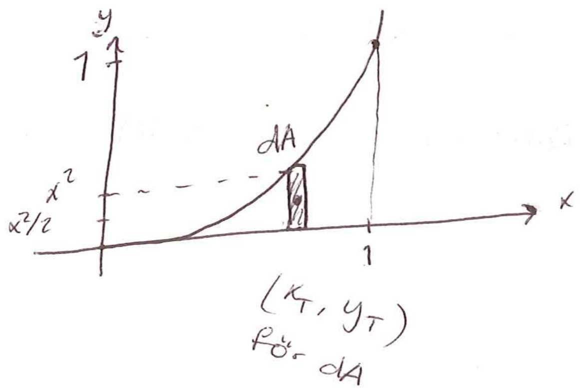
och för en kurva i xy-planet:



$$x_T = \frac{1}{L}\int (x_T \text{ för } ds)\, ds$$

$$y_T = \frac{1}{L}\int (y_T \text{ för } ds)\, ds$$

Ex. Tyngdpunkt för arean $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x^2$

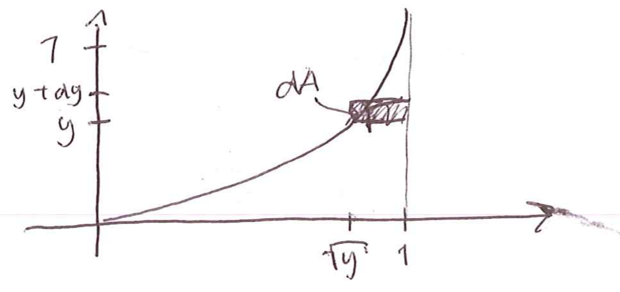


$$A = \int dA = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$x_T = \frac{1}{1/3}\int_0^1 x \cdot x^2\,dx = \frac{3}{4}$$

$$y_T = \frac{1}{1/3}\int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot x^2\,dx = \frac{3}{10}$$

Alt:



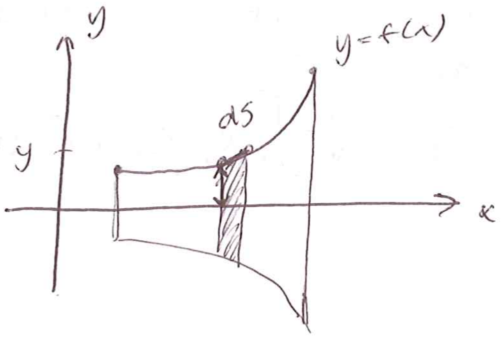
$dA = \text{bredd} \cdot \text{höjd} = (1-\sqrt{y})\,dy$

$$y_T = \frac{1}{1/3}\int_0^1 y\cdot(1-\sqrt{y})\,dy = \frac{3}{10}$$

$y = x^2$

$x = \sqrt{y}$

Guldins regler



Kurvan $y = f(x)$, där $f(x) \geq 0$

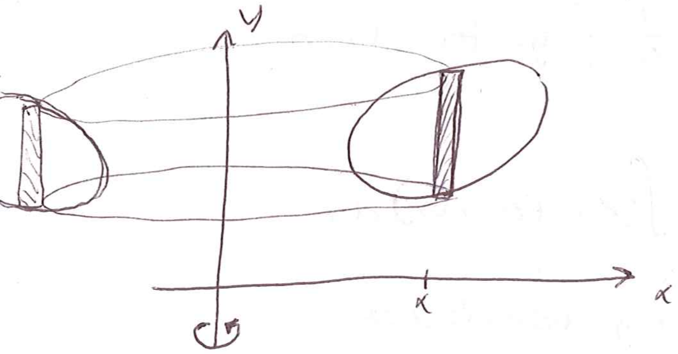
roterar kring x-axeln.

Rot. area $A = \int 2\pi y \, ds =$

$= 2\pi \int y \, ds = 2\pi L \cdot \frac{1}{L} \int y \, ds =$

$= 2\pi L \cdot y_T = \boxed{L \cdot 2\pi y_T}$

- Rotationsarean = kurvans längd gånger vägen av kurvans tyngdpunkt under ett varv.



En area i (högra halvan) xy-planet rot. kring y-axeln.

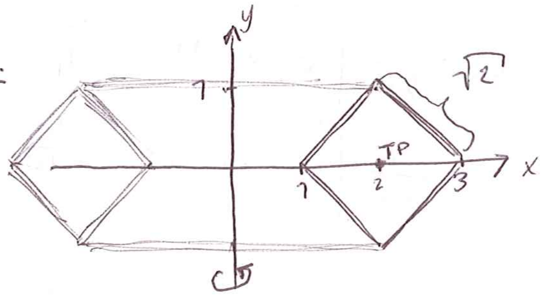
Rot. vol: $V = \int 2\pi x \, dA =$

$= 2\pi A \cdot \frac{1}{A} \int x \, dA = 2\pi A \cdot x_T =$

$= \boxed{A \cdot 2\pi x_T}$

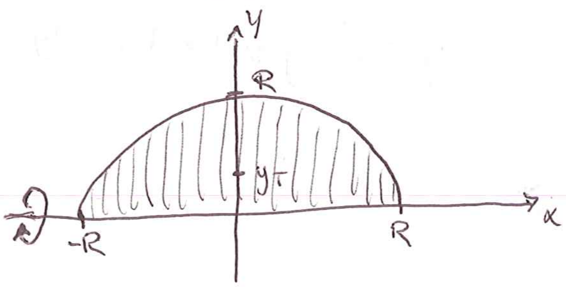
- Rotationsvolymen = områdets area gånger vägen av områdets tyngdpunkt under ett varv.

Ex.



Rotationsvolym $= (\sqrt{2})^2 2\pi 2 = 8\pi$

Ex. Vad är tyngdpunkten för en halvcirkelskiva?



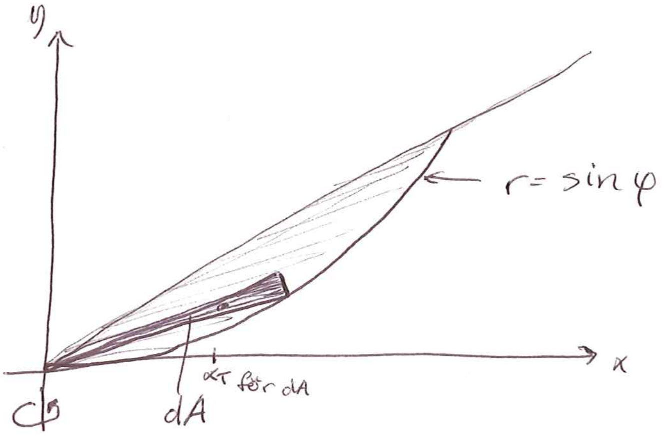
Vol. av klot

Guldin: $\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi y_T =$

area av skiva

så $y_T = \frac{4R}{3\pi}$

Ex. Rotationsvolym då området $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$, $0 \le r \le \sin\varphi$ roterar kring y-axeln.



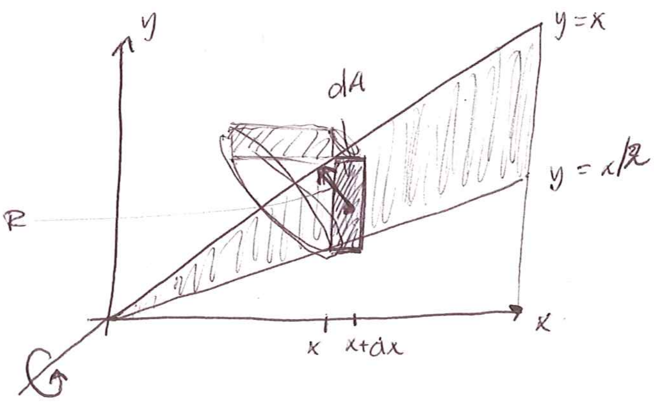
Tyngdpunkten för en triangel ligger på 1/3 (2/3) av höjden.

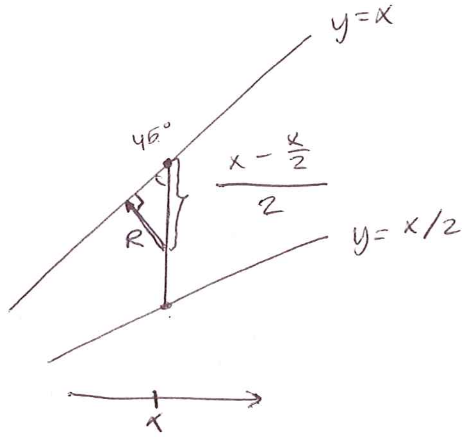
Guldin: $dV = dA \cdot 2\pi (x_T \text{ för } dA) = \frac{1}{2} r^2 d\varphi \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} r\cos\varphi =$

$= \frac{2\pi}{3} r^3 \cos\varphi \, d\varphi$

Så: $V = \int dV = \int_0^{\pi/6} \frac{2\pi}{3} \sin^3\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{96}$

Ex. Rotationsvolym då området $0 \le x \le 1$, $\frac{x}{2} \le y \le x$ roterar kring linjen $y = x$.





Guldin: $dV = dA \cdot 2\pi R =$

$= \left(x - \frac{x}{2}\right) dx \cdot 2\pi \cdot \frac{\left(x - \frac{x}{2}\right)}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{(\sin 45^\circ)} = \frac{\pi x^2}{4\sqrt{2}} dx$

Så $V = \int dV = \int_0^1 \frac{\pi x^2}{4\sqrt{2}} dx = \frac{\pi}{12\sqrt{2}}$

$$= 4\pi \left(\frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi/4} 1 - \cos 2x \, dx - \int_{\pi/2}^{\pi/4} -\frac{3}{4} - \frac{\cos 4x}{4} + \cos 2x \, dx \right) =$$

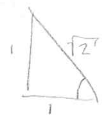
$$= 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi/4} 1 - \cos 2x \, dx - 4\pi \int_{\pi/2}^{\pi/4} -\frac{3}{4} - \frac{\cos 4x}{4} + \cos 2x \, dx =$$

$$= 2\pi \left[x - \sin 2x \cdot \frac{1}{2} \right]_{\pi/2}^{\pi/4} - 4\pi \left[-\frac{3}{4}x - \sin 4x \cdot \frac{1}{16} + \sin 2x \cdot \frac{1}{2} \right]_{\pi/2}^{\pi/4} =$$

$$= 2\pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \right) - 4\pi \left(-\frac{3}{16}\pi - 0 + \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{8}\pi - 0 + 0 \right) \right) =$$

$$= 2\pi \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) - 4\pi \left(\frac{3}{16}\pi + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= -\frac{\pi^2}{2} - \pi - \frac{3\pi^2}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi^2}{8} - 3\pi$$



Inte riktigt rätt!

Fel ordning?

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}$$

6

Fö 3 27/1

Taylorutvecklingar

Approximation av godtyckliga funktioner med polynom.

Sats (Maclaurins formel)

Anta att funktionen f och dess derivator t.o.m ordning $n+1$ är kontinuerliga i ett öppet intervall I som innehåller 0. För $x \in I$ är då:

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}_{\text{Maclaurinpolynom av ordning } n \text{ till } f} + \underbrace{r_{n+1}(x)}_{\text{restterm}}$$

$$\left(r_{n+1}(x) = \frac{\int_0^1 (n+1)(1-s)^n f^{(n+1)}(xs)\,ds}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{(integralform)} \right)$$

$$r_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1},$$ där ξ ligger mellan 0 och x. (Lagranges form)

$$= x^{n+1} b(x),$$ där $b(x)$ är begränsad i en omgivning av 0. (Ordoform)

Bevis: $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt =$

$= f(0) + \Big[(t-x)f'(t)\Big]_0^x - \int_0^x (t-x)f''(t)\,dt =$

$= f(0) + f'(0)x + \Big[-\frac{(x-t)^2}{2}f''(t)\Big]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}f'''(t)\,dt$

$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \Big[-\frac{(x-t)^3}{2\cdot 3}f'''(t)\Big]_0^x +$

$+ \int_0^x \frac{(x-t)^3}{2\cdot 3} f^{(4)}\,dt = \ldots =$

$= \ldots = f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n +$

$+ \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt}_{r_{n+1}(x)}$

Men: $r_{n+1}(x) = \Big/\!\!\Big/ \begin{matrix} t = xs \\ dt = x\,ds \end{matrix} \Big/\!\!\Big/ = \int_0^1 \frac{(x-xs)^n}{n!} f^{(n+1)}(xs)\,x\,ds =$

$= \frac{\int_0^1 (n+1)(1-s)^n f^{(n+1)}(xs)\,ds}{(n+1)!}\, x^{n+1} =$

$= \Big/\!\!\Big/$ Generella medelvärdessatsen för integraler $\Big/\!\!\Big/ =$

$= \frac{f^{(n+1)}(x\theta)\int_0^1 (n+1)(1-s)^n\,ds}{(n+1)!}\, x^{n+1}$, där $0 \le \theta \le 1$

$= x^{n+1} b(x)$, där $b(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ är begränsad,

ty $f^{(n+1)}$ är kontinuerlig.

Ex: Om $f(x) = \sin x$, är $f'(x) = \cos x$,
$f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, ...
så $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, ...

Detta ger:

ordning	Maclaurinpol. till sin x
0	0
1	$0 + 1 \cdot x = x$
2	$0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2!} x^2 = x$
3	$0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2!} x^2 + \frac{-1}{3!} x^3 = x - \frac{x^3}{6}$

Taylors formel är Maclaurins formel med punkten $x = 0$ ersatt av en godtycklig punkt $x = a$.

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{Taylorpol. av ordning } n \text{ till } f \text{ i } a.} + \underbrace{r_{n+1}(x)}_{\text{restterm, med former som i Maclaurins formel.}}$$

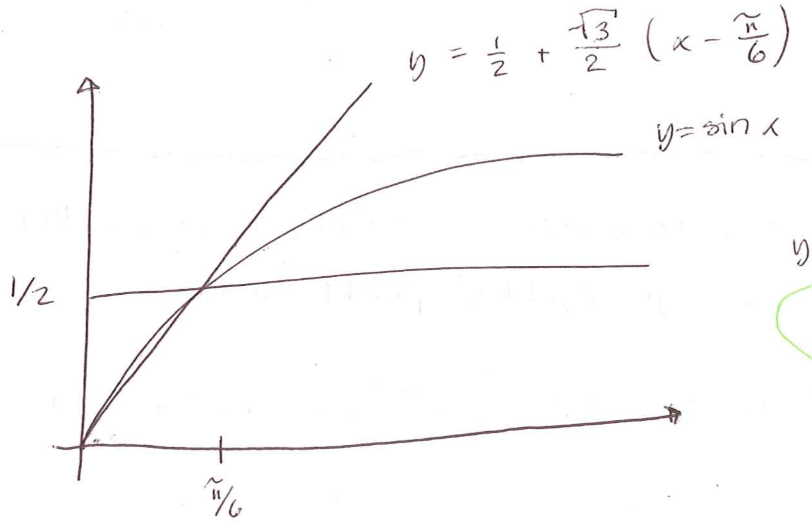
Ex: Bestäm taylorpolynom av ordning 2 till $f(x) = \sin x$ i $x = \frac{\pi}{6}$.

Vi har $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, så polynomet är:

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{-\frac{1}{2}}{2!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2$$



Ordning 1 ger tangenten

$y = 1/2$

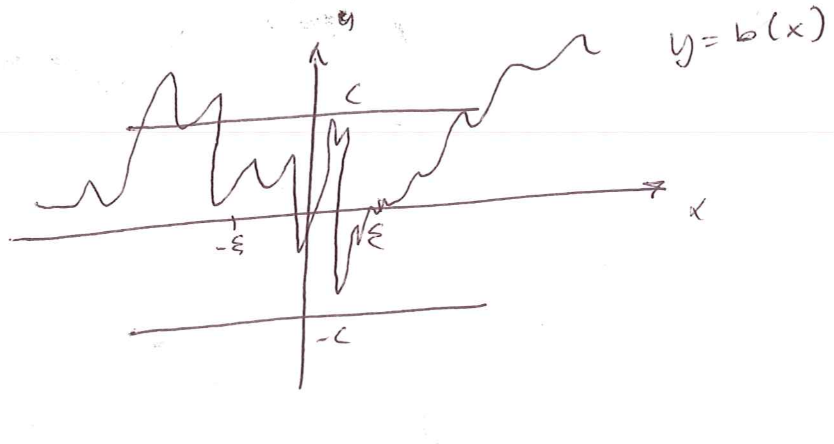
Ordning 0 ger värdet

Ordoform på resttermen

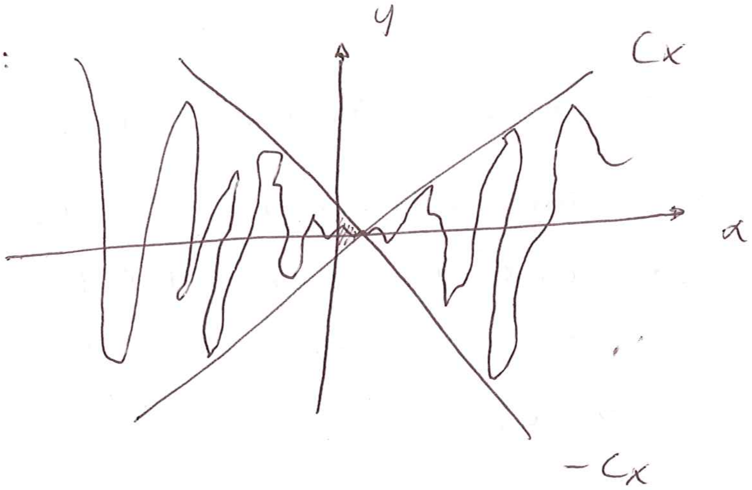
Def: Vi skriver $O(x^n)$, då x är nära 0, för att beteckna $x^n b(x)$, där $b(x)$ är någon funktion som är begränsad nära 0 (dvs. det finns konstanter $C > 0$, $\varepsilon > 0$ så att $|b(x)| \leq C$ då $|x| < \varepsilon$

Grafiskt:

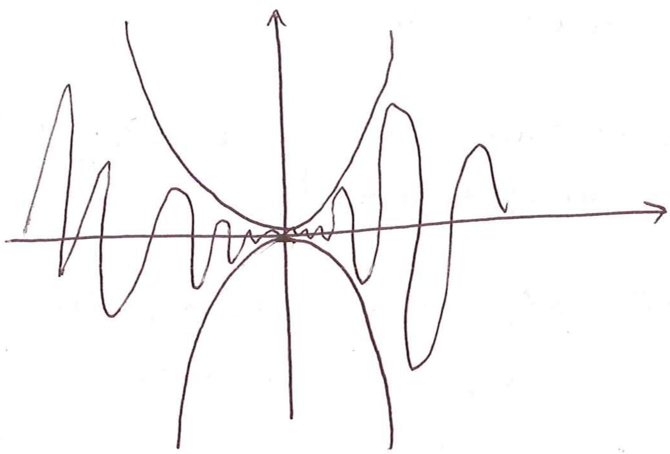
$O(1)$:



$\mathcal{O}(x)$:



$\mathcal{O}(x^2)$:



Ex: Bestäm Maclaurinutveckling av $f(x) = e^x$ av ordning 2 med restterm i ordoform.

$f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, så $f(0) = f'(0) = f''(0) = e^0 = 1$,

så (direkt av Maclaurins formel:)

$$e^x = 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2!}x^2 + \mathcal{O}(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$

Ex: Eftersom $(1-x)(1+x+x^2) = 1-x^3$, så är

$$\frac{1}{1-x} = \underbrace{1 + x + x^2}_{} + \frac{x^3}{1-x} = 1 + x + x^2 + \mathcal{O}(x^3),$$

då x är nära 0.

Är detta Maclaurinutv. av $\frac{1}{1-x}$ av ordning 2?

Ja!

Sats (Entydighet) Anta att funktionen f och dess derivator t.o.m. ordning $n+1$ är kontinuerlig och att $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + O(x^{n+1})$ då x är nära 0. Då är detta Maclaurinutveckling av f. (DVS. $c_0 = f(0)$, $c_1 = f'(0)$, $c_2 = \frac{f''(0)}{2!}$, ..., $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$)

Bevis Se bok sats 8.4.

Maclaurinutveckling m.h.a. standardutveckling (och entydighet)

Standardutv. för e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ och $\arctan x$, se sats 8.3.

EX: Bestäm maclaurinutveckling av ordn. 3, med rest i ordoform, till:

dvs. restterm av ordning minst 4

a) $x \cos x$ b) e^{x^2} c) $\frac{1}{\cos x}$

a) Standardutv: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4)$ så

$$x \cos x = x\left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right) = x - \frac{x^3}{2} + x\,O(x^4) =$$

$$= x - \frac{x^3}{2} + O(x^5), \quad \text{ty } x\,O(x^4) = x \cdot x^4 b(x) =$$

$$= x^5 b(x) = O(x^5)$$

b) Standardutv: $e^t = 1 + t + O(t^2)$

Sätt $t = x^2$: $e^{x^2} = 1 + x^2 + O((x^2)^2) = 1 + x^2 + O(x^4)$

c) Standardutv: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^4 b_1(x)$

Så: $$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + x^4 b_1(x)} =$$

"Standard" utv: $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 b_2(t)$

Sätt $t = \frac{x^2}{2} - x^4 b_1(x) = x^2\underbrace{\left(\frac{1}{2} - x^2 b_1(x)\right)}_{\text{begr. nära 0}} =$

$= x^2 b_3(x)$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 b_2(t) = 1 + \left(\frac{x^2}{2} - x^4 b_1(x)\right) + (x^2 b_3(x))^2 b_2 \cdot$$

$$\cdot (x^2 b_3(x)) = 1 + \frac{x^2}{2} + x^4\underbrace{\left(-b_1(x) + b_3(x)\, b_2(x^2 b_3(x))\right)}_{\text{begränsad nära 0.}} =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + x^4 b_4(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

Kortare: $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)} =$

$\Big/\!\Big/ \; t = \frac{x^2}{2} + O(x^4) = O(x^2) \; \Big/\!\Big/ = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4) + O\left(O(x^2)^2\right) =$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4) + O(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4).$$

$O(x^3) - O(x^3) = O(x^3)$

$O(x^2) + O(x^3) = O(x^2)$

Fö 4 29/1

Standardutvecklingar

Sats

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!}}_{O(x^{n+1})}$

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots +$
  $+ (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \underbrace{(-1)^n \frac{\cos \xi \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{O(x^{2n+1})}$

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} +$
  $+ (-1)^{n+1} \frac{\cos \xi \cdot x^{2n+2}}{(2n+2)!}$

- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} +$
  $+ (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)(n+1)}$

- $(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n +$
  $+ (1+\xi)^{\alpha-n-1} \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}$

- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} +$
  $+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(1+\xi^2)(2n+1)}$

ξ ligger mellan 0 o x (och beror på funktionen, n o x).

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

(Ordningen av utv. för e^x, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$: n, $\sin x$, $\arctan x$: $2n$, $\cos x$: $2n+1$)

Bevis: Utv. för e^x, $\sin x$, $\cos x$ o $(1+x)^\alpha$ fås direkt av Maclaurins formel (med Lagranges restterm)

För $\ln(1+x)$: $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + (-1)^{n} \frac{t^n}{1+t}\right) dt$, vilket ger utv. för

$\ln(1+x)$, m.h.a. gen. medelvärdessatsen för integraler. Analogt för $\arctan x =$
$= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \ldots$

OBS:

- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ syns: $\frac{d}{dx}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) =$
  $= 0 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$
- Syns också: $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$, $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
- Syns också: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$:
  $e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \ldots =$
  $= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots =$
  $= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)$
- $\sin x$ udda funktion (dvs. $\sin(-x) = -\sin x$)
  syns: bara udda potenser.
  $\cos x$ jämn funktion (dvs. $\cos(-x) = \cos x$)
  syns: bara jämna potenser.
- $(1+x)^\alpha$ är en generalisering av binomialsatsen.

Tillämpningar (med restterm i ordoform)

Gränsvärden

Ex: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right) - x}{x^3} = \frac{-\frac{x^3}{6} + O(x^5)}{x^3} =$$

$$= -\frac{1}{6} + O(x^2) \to -\frac{1}{6} \text{ då } x \to 0$$

Om man utvecklar för kort:

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{(x + O(x^3)) - x}{x^3} = \frac{O(x^3)}{x^3} = O(1) \to ?$$

Man får inget resultat.

Om man utvecklar "för långt":

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + O(x^9)\right) - x}{x^3} =$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} - \frac{x^4}{5040} + O(x^6) \to \frac{1}{6} \text{ då } \cancel{x} \to 0$$

Man får rätt men jobbigt...

Ex: $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$

$$\frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - \ln(1+x^2)}{\ln(1+x^2)\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right)^2 - \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6)\right)}{\left(x^2 + O(x^4)\right)\left(x + O(x^3)\right)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^6) - x^2 + \frac{x^4}{2}}{\left(x^2 + O(x^4)\right)\left(x^2 + O(x^4)\right)} = \frac{\frac{x^4}{6} + O(x^6)}{x^4 + O(x^6)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{6} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} \to \frac{1}{6}, \quad x \to 0$$

Ex:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x-1}-\sqrt[3]{x^6+3x^5}\right)$$

$$\frac{x^3}{x-1}-\sqrt[3]{x^6+3x^5}=\frac{x^3}{x(1-\frac{1}{x})}-x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)^{1/3}=$$

$$=x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\underbrace{O\left(\frac{1}{x^3}\right)}\right)-$$

dvs: $O(\frac{1}{x^3})$ då $x\to\infty$, dvs $\frac{1}{x^3}b(x)$, $b(x)$ är begränsad då x är stort.

$$-x^2\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x}+\binom{1/3}{2}\left(\frac{3}{x}\right)^2+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)=$$

$$=\cancel{x^2}+\cancel{x}+1+O\left(\frac{1}{x}\right)-\cancel{x^2}-\cancel{x}-\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}\cdot 9=$$

$$=1-(-1)+O\left(\frac{1}{x}\right)\to 2 \text{ då } x\to\infty$$

Ex:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(\ln(1+x))-2x+x^2}{x^3}$$

$$\sin(\ln(1+x))=\ln(1+x)-\frac{(\ln(1+x))^3}{3!}+O((\ln(1+x))^5)=$$

$$=\ /\!/\ \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+O(x^4)=x+O(x^2)=O(x)\ /\!/=$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+O(x^4)-\frac{(x+O(x^2))^3}{6}+O(O(x)^5)=$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+O(x^4)-\frac{x^3}{6}$$

Så:

$$\frac{2\sin(\ln(1+x))-2x+x^2}{x^3}=\frac{\cancel{2x}-\cancel{x^2}+\frac{x^3}{3}+O(x^4)-\cancel{2x}+\cancel{x^2}}{x^3}=$$

$$=\frac{1}{3}+O(x)\to\frac{1}{3} \text{ då } x\to 0.$$

Ex: Bestäm a så att $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x - \arctan ax}{x^3}$ existerar.

Vad blir då gränsvärdet?

$$\frac{\sin 2x - \arctan ax}{x^3} = \frac{1}{x^3}\left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5) - \right.$$

$$\left. - \left(ax - \frac{(ax)^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)\right)\right) = \frac{2-a}{x^2} + \frac{a^3-4}{3} + \mathcal{O}(x^2)$$

För att grv. ska existera måste $2-a=0$, dvs. $a=2$. Då fås:

$$\frac{2^3-4}{3} + \mathcal{O}(x^2) \to \frac{4}{3} \text{ då } x \to 0$$

Lokala extremvärden

Ex: Har $f(x) = 4\cos x + x \ln \frac{1+x}{1-x}$ lokalt extremvärde i $x=0$?

$f(x) = \ldots$ utveckla $\ldots = 4 + \frac{5x^4}{6} + \mathcal{O}(x^5)$

Så $f(0)=4$ och

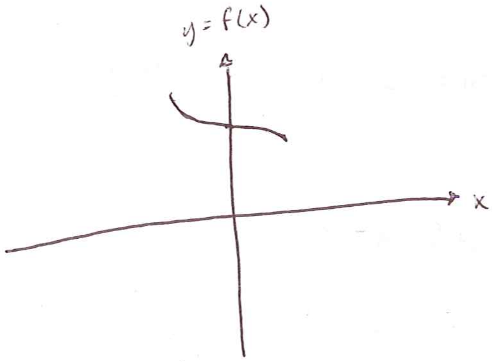
$$f(x) = 4 + x^4 \underbrace{\left(\frac{5}{6} + \mathcal{O}(x)\right)}_{\substack{>0 \\ \text{då } x \text{ är litet.}}} > 4 \text{ då } x \text{ är litet o } x \neq 0.$$

Så f har strängt lokalt minimum i $x=0$.

Ex: Har $f(x) = \sqrt{1-x} - \ln(1-\frac{x}{2})$ lok. extremvärde i $x=0$?

$f(x) = \ldots = 1 - \frac{x^3}{48} + O(x^4)$. Så $f(0)=1$ och

$f(x) = 1 - x^3 \underbrace{\left(\frac{1}{48} + O(x)\right)}_{>0 \text{ då } x \text{ är litet}}$ är $\begin{cases} <1 \text{ då } x \text{ är litet och } x>0 \\ >1 \text{ då } x \text{ är litet och } x<0 \end{cases}$.



Så f har varken lok. max eller lok. min i $x=0$.

Fö 5

Ex: Visa att $\left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right| \leq \frac{x^4}{24}$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{\cos \xi}{4!} x^4$, så $\left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right| =$

$= \left|\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{\cos \xi}{24} x^4\right) - 1 + \frac{x^2}{2}\right| = \left|\frac{\cos \xi}{24} x^4\right| =$

$= \frac{|\cos \xi|}{24} x^4 \leq \frac{x^4}{24}$

Ex: Approximera e^x med ett polynom så att felet är mindre än $\frac{1}{100}$ då $-1 \leq x \leq 1$.

Derivator av e^x: $e^x, e^x, e^x \ldots$ ger $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$

$\ldots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}}_{\text{fel}}$

om $|x| \leq 1$ är $\left|\frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{e^1 \cdot 1^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$

$n = 4$: $\frac{3}{5!} = \frac{3}{120} \not< \frac{1}{100}$

$n = 5$: $\frac{3}{6!} = \frac{3}{720} < \frac{1}{100}$ ok.

Svar: $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$

Ex: Beräkna $\sqrt{66}$ med ett fel mindre än $\frac{1}{1000}$.

$$\sqrt{66} = \sqrt{64+2} = \sqrt{64\left(1+\frac{2}{64}\right)} = 8\left(1+\frac{1}{32}\right)^{1/2}$$

Sätt $f(x) = (1+x)^{1/2}$, $f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$

Så $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{4}(1+\xi)^{-3/2}}{2!}x^2 =$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8(1+\xi)^{3/2}}x^2$$

$$\sqrt{66} = 8 f\left(\frac{1}{32}\right) = 8\left(1 + \frac{1/32}{2} - \frac{1}{8(1+\xi)^{3/2}}\frac{1}{32^2}\right) =$$

$$= 8 + \frac{1}{8} - \frac{1}{(1+\xi)^{3/2}}\frac{1}{32^2}$$

Men $0 \le \xi \le \frac{1}{32}$ så $(1+\xi)^{3/2} \ge 1^{3/2} = 1$, så

$$\left|\frac{1}{(1+\xi)^{3/2}} \cdot \frac{1}{32^2}\right| \le \frac{1}{32^2} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000} \quad \text{ok.}$$

Svar: $\sqrt{66} = 8 + \frac{1}{8} \quad \left(= \frac{65}{8}\right)$

Ex: Approximera $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{e^{x^2}-1}{x}\,dx$ med ett fel mindre än $\frac{1}{1000}$.

Vi har $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{e^{\xi} t^3}{3!}$, ($\xi$ mellan 0 och t).

Så $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{e^{\xi} x^6}{6}$, ($\xi$ mellan 0 och x^2).

Så $\frac{e^{x^2}-1}{x} = x + \frac{x^3}{2} + \frac{e^{\xi} x^5}{6}$ Detta ger:

$$\int_0^{1/2} \frac{e^{x^2}-1}{x}\,dx = \underbrace{\int_0^{1/2} \left(x + \frac{x^3}{2}\right) dx}_{\text{approx}} + \underbrace{\int_0^{1/2} \frac{e^{\xi} x^5}{6}\,dx}_{\text{fel}}$$

$$\left|\int_0^{1/2} \frac{e^{\xi} x^5}{6}\,dx\right| \leq \int_0^{1/2} \left|\frac{e^{\xi} x^5}{6}\right| dx = \int_0^{1/2} \frac{e^{\xi} x^5}{6}\,dx \leq$$

$$\leq \;//\; e^{\xi} \leq e^{(1/2)^2} = e^{1/4} \leq 2, \text{ ty } e < 2^4 \;//\; \leq$$

$$\leq \frac{2}{6} \int_0^{1/2} x^5\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{1}{1152} < \frac{1}{1000} \quad \text{ok.}$$

Så $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{e^{x^2}-1}{x}\,dx \approx \int_0^{1/2} \left(x + \frac{x^3}{2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}\right]_0^{1/2} = \frac{17}{128}$

Maclaurinserier

Ex: Vi har $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1} =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Fixera x och låt $n \to \infty$. Då fås att

$$\left| \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \underbrace{\max(1, e^x)}_{\text{konstant}} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$$

Så $e^x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, vilket vi skriver som:

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, eller som $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

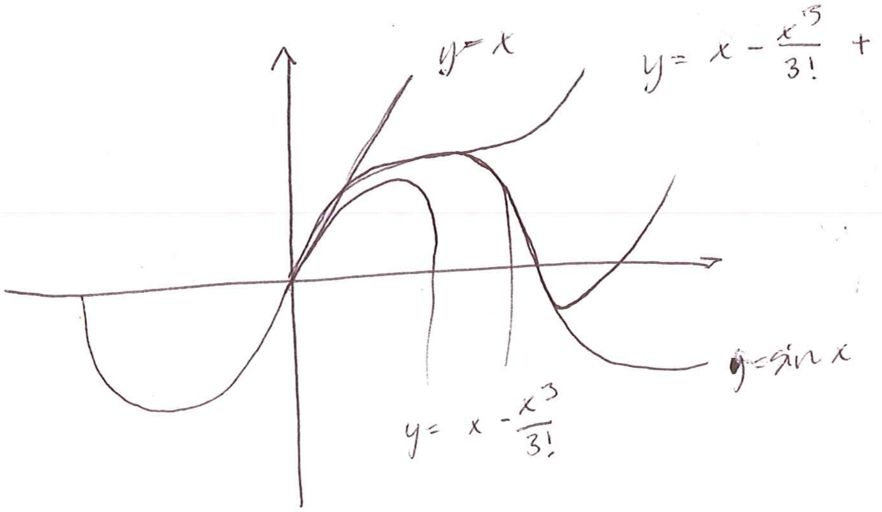
På samma sätt kan $\sin x$ och $\cos x$ behandlas så:

Sats

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$



Ex: $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} +$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(1+\xi^2)(2n+1)}, \quad \text{och}$$

$$\left| (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(1+\xi^2)(2n+1)} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \to 0 \text{ då } n \to \infty,$$

om $|x| \leq 1$!

Men om t.ex. $x=2$ är $|\text{restterm}| \approx \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \to \infty$ då $n \to \infty$

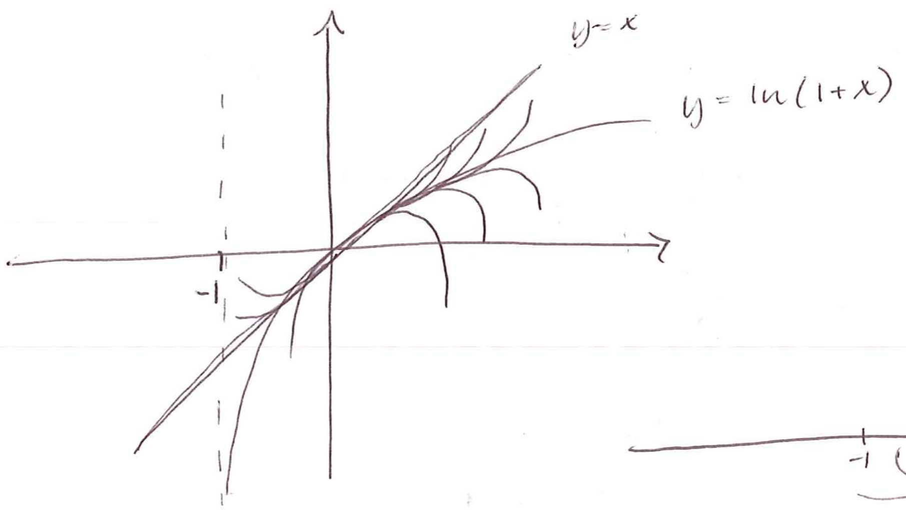
Sats $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \quad -1 < x \leq 1$

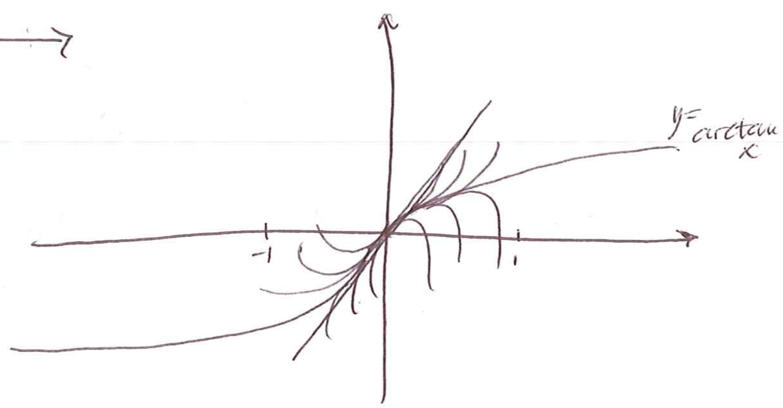
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots, \quad -1 < x < 1$ (Beroende på α kan likhet gälla i större intervall)

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots, \quad -1 \leq x \leq 1$

Bevis För $\ln(1+x)$ och $\arctan x$ räcker det att analysen standardutv. (som innan)

För $(1+x)^\alpha$ måste resttermen skrivas på intergralform och sedan uppskattas.



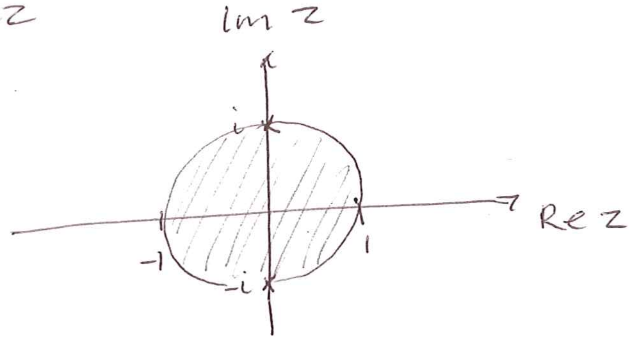


Varför ges inte arctan x av sin maclaurinserie, för alla $x \in \mathbb{R}$?

Jo, $\arctan z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz} =$

$= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots$

för $|z| \leq 1$



FÖ 6 10/2

Differentialekvationer

Ett samband $y' = f(x,y)$ mellan en funktion, $y(x)$, dess derivata, $y'(x)$, och den oberoende variabeln, x, kallas en ordinär differentialekvation av första ordningen.

Ex: $y' = y - x$ (Kan lika gärna skrivas: $y'(x) = y(x) - x$.)

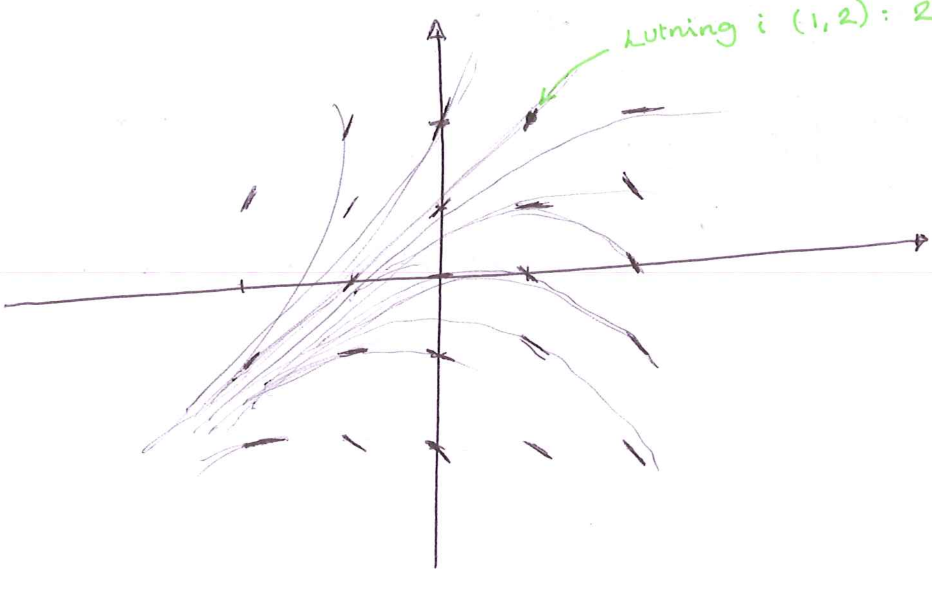
En lösning till $y' = f(x,y)$ är en funktion $y = y(x)$ vars definitionsmängd är ett intervall $a < x < b$ och som är deriverbar och uppfyller $y'(x) = f(x, y(x))$, $a < x < b$.

Ex: Funktionen $y(x) = x + 1 + Ce^x$, $x \in \mathbb{R}$, där C är en godt. konstant, är lösningar till $y' = y - x$.

Ty: $y'(x) = 1 + 0 + Ce^x$, och $y(x) - x = x + 1 + Ce^x - x = 1 + Ce^x$

En bild av lösningarna till ~~y' Ex~~ $y' = f(x,y)$ ges av differentialekvationens riktningsfält.

Ex: En lösning till $y' = y - x$ som går genom punkten (a,b) i xy-planet, dvs $y(a) = b$, har där lutningen $y'(a) = y(a) - a = b - a$.



Ett villkor $y(x_0) = y_0$ kallas ett begynnelsevillkor och diff ekv. + beg. villk. kallas ett begynnelsevärdesproblem.

Ex: $\begin{cases} y' = y - x \\ y(0) = 0 \end{cases}$ (som har lösningen $y(x) = x + 1 - e^x$)

Kolla att det stämmer!

Allmän sats om begynnelsevärdesproblem:

(Ingår ej i denna kurs!)

Problemet $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ har en lösning om f är kontinuerlig (Existens)

Om dessutom f är "Lipschitz-kont. i y" är lösningen entydigt bestämd (Entydighet).

Linjära diff. ekv. av första ordningen:

$y' + f(x)y = g(x)$

Lösningsgång: Bestäm primitiv funktion $F(x)$ till $f(x)$ och multiplicera ekv. med den integrerande faktorn $e^{F(x)}$:

$e^{F(x)} y' + e^{F(x)} f(x) y = e^{F(x)} g(x)$. Vänsterledet blir en derivata: $(e^{F(x)} y)' = e^{F(x)} g(x)$, så

$e^{F(x)} y = \int e^{F(x)} g(x)\, dx$, alltså:

$$y(x) = e^{-F(x)} \underbrace{\int e^{F(x)} g(x)\, dx}$$

innehåller godt. konstant.

Ex: Lös differentialekvationen $y' = y - x$.
(Dvs. bestäm alla lösningar till den)

$y' - y = -x$, så linjär.
Primitiv till -1 är t.ex. $-x$, så int. fakt:
e^{-x}. Vi får:

$e^{-x}y' - e^{-x}y = -xe^{-x}$, $\quad (e^{-x}y)' = -xe^{-x}$,

$e^{-x}y = -\int xe^{-x}\,dx = //\text{P.I.}// =$

$= -\left(x(-e^{-x}) - \int 1(-e^{-x})\,dx\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \; e^{-x}y = xe^{-x} + e^{-x} + C$,

$y = x + 1 + Ce^{x}$ där C är godt. konstant.

Så: $\cancel{y'(x) = x+1+Ce^{-x}}$, $\cancel{x \in \mathbb{R}}$

$y(x) = x + 1 + Ce^{x}$, $x \in \mathbb{R}$

Separabla diff. ekv.: $\cancel{g(y) = y}$

$g(y)y' = h(x)$

Om $G(y)$ är en primitiv funktion till $g(y)$
fås att $\frac{d}{dx}(G(y)) = h(x)$, så $G(y) = \underbrace{\int h(x)\,dx}_{\text{innehåller godt. konst.}}$

Sedan kan man (kanske) lösa ut y.
Skrivsätt:

$g(y)\frac{dy}{dx} = h(x)$, $\quad \int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx$, ...

Ex: Bestäm den lösning till $y' - \frac{y^2}{x^3} = 0$ som
uppfyller a) $y(1) = 1$ b) $y(1) = -1$ c) $y(-1) = 0$

OBS: Ekv. ej def. då $x = 0$!

Vi har $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^3}$, så $\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^3}$ <u>om $y \neq 0$</u>

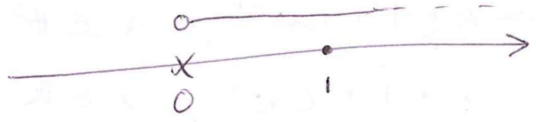
Å andra sidan: Om $y(x) = 0$ (konstant) så är y en lösning. (ses genom insättning).

Om $y \neq 0$: $\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^3}$, $-\frac{1}{y} = -\frac{1}{2x^2} + C$

a) $y(1) = 1$ ger $-\frac{1}{1} = -\frac{1}{2 \cdot 1^2} + C$ dvs. $C = -\frac{1}{2}$,

så $-\frac{1}{y} = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} = -\frac{1+x^2}{2x^2}$, så

$y = \frac{2x^2}{1+x^2}$. Beg. värdet antas i $x = 1$:



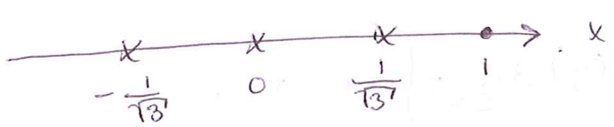
<u>Svar:</u> $y = \frac{2x^2}{1+x^2}$, $x > 0$.

b) $y(1) = -1$ ger $-\frac{1}{-1} = -\frac{1}{2 \cdot 1^2} + C$ dvs. $C = \frac{3}{2}$,

så $-\frac{1}{y} = -\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2} = -\frac{1-3x^2}{2x^2}$, så

$y = \frac{2x^2}{1-3x^2}$

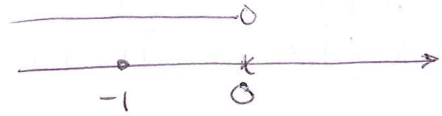
Beg. villk. i $x = 1$, och i nämnaren $= 0$ i $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$



<u>Svar:</u> $y = \frac{2x^2}{1-3x^2}$, $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$

c) $y(-1)=0$ ger $\cancel{-\frac{1}{0}=}$ Nejvisst: $y(x)=0$ är ju en lösning.

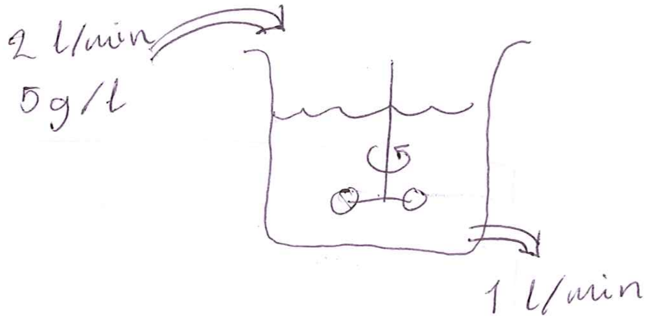
Beg. villk. antas i -1: ...



Svar: $y(x)=0$, $x<0$.

Fysikaliskt exempel:

En tank innehåller 10 l rent vatten. Man börjar fylla på 2 l/min av saltlösning med koncentration 5 g/l. Samtidigt tappar man ur 1 l/min av tankens innehåll, som hela tiden är väl blandat. Vad är koncentrationen salt i tanken efter 10 min?



Låt tiden $t=0$ min då man börjar fylla på

Låt V = volym av tankens innehåll, [l].
m = mängd salt i tanken [g]
c = koncentration salt i tanken [g/l].

Vi har $V(0)=10$ och $V'=2-1$ [l/min], så $V(t)=10+t$ l.

Diff. ekv. för m: $\begin{cases} m' = 2\cdot 5 - 1\cdot c = 10 - \frac{m}{V} = \\ \quad = 10 - \frac{m}{10+t} \\ m(0)=0 \end{cases}$

Så $m' + \frac{m}{10+t} = 10$ (linjär).

$\int \frac{1}{10+t}\,dt = \ln|10+t| + C$, så ta int. fakt. $e^{\ln(10+t)} =$

$= 10+t$.

$(10+t)m' + m = (10+t)\cdot 10$, $((10+t)m)' = 100+10t$,

$(10+t)m = \int (100+10t)\,dt = 100t + 5t^2 + C$

→

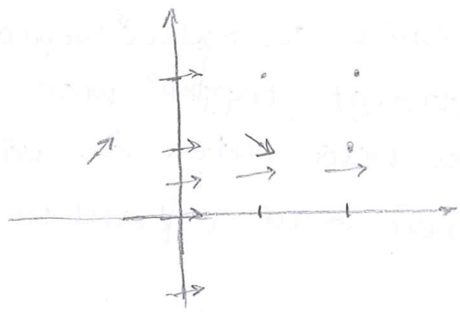
$m(0) = 0$ ger $C = 0$, så $m(t) = \dfrac{100t + 5t^2}{10+t}$, och

$$c(t) = \frac{m(t)}{V(t)} = \frac{100t + 5t^2}{(10+t)^2} \quad \#$$

<u>Svar</u>: $c(10) = \dfrac{1500}{400} = \dfrac{15}{4}$ g/l.

Ex: Boken 9.10, 9.12

$y' + 2xy = x$



$y' = x - 2xy =$

$= x(1-2y)$

$1(1-2\cdot 1) = -1$

$-1(1-2\cdot 1) = 1$

$y' + f(x)y = g(x)$

$e^{F(x)}$: integrerande faktor

$$\boxed{\begin{array}{l} y' + f(x)y = g(x) \\ \text{Multiplicera med} \\ \text{integrerande faktorn!} \end{array}}$$

$\frac{d}{dx}(e^{x^2} y) = x e^{x^2}$

$y' e^{x^2} + 2x e^{x^2} y = x e^{x^2}$

$y' + 2xy = x \quad \Leftrightarrow \quad e^{x^2} > 0$

$y' e^{x^2} + 2x e^{x^2} y = e^{x^2} x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(e^{x^2} y\right) = e^{x^2} x$

$e^{x^2} y = \int e^{x^2} x \rightarrow e^{x^2} y = \frac{1}{2} e^{x^2} + C \quad \Leftarrow \quad e^{x^2} > 0$

$(e^{x^2} \neq 0)$

$y = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$

Fö 8

Linjära diffekvationer ~~av~~ andra ordningen

Partikulärlösningar till $y'' + ay' + by = f(x)$

(1.) $f(x) = p(x)$, p ett polynom

(2.) $f(x) = p(x)e^{\alpha x}$, p ett polynom

(3.) $f(x) = p(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ eller
$f(x) = p(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$, p ett polynom

1. Ansätt, om $b \neq 0$ $\quad y_p = q(x)$
om $b = 0$, $a \neq 0$ $\quad y_p = x\,q(x)$
om $a = b = 0$ $\quad y_p = x^2 q(x)$ (eller integrera två gånger)

där q är ett godt. polynom av samma grad som p.

Ex: Lös ekv. $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$
Hom: Karaktäristiska ekv. $r^2 - 3r + 2 = 0$, så $r = 1, 2$,
så $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.
Part: Ansätt $y_p = Ax + B$, vilket ger $y_p' = A$,
$y_p'' = 0$
Sätt in: $0 - 3A + 2(Ax + B) = 2x + 1$ & identifiera koeff.
"x": $2A = 2$ dvs $A = 1$
"1": $-3A + 2B = 1$ dvs $B = 2$ så $y_p = x + 2$

Svar: $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x + 2$

Ex: Lös $y'' - y' - x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Hom: $r^2 - r = 0$ ger $r = 0, 1$ så $y_h = C_1 e^{0x} + C_2 e^x =$
$= C_1 + C_2 e^x$

Part: Ansätt $y_P = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$,
vilket ger $y_P' = 2Ax + B$, $y_P'' = 2A$, så
$2A - (2A + B) = x$, så $-2A = 1$ o $2A - B = 0$,
dvs. $A = -\frac{1}{2}$, $B = -1$

Så $y_P = -\frac{x^2}{2} - 1$

Allmän lösning: $y = C_1 + C_2 e^x - \frac{x^2}{2} - x$, så

$y' = C_2 e^x - x - 1$

$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ ger nu $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_2 - 1 = 0 \end{cases}$ dvs $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$

Svar: $y(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x$

---

2. Återförs till 1. genom substitutionen $y = e^{\alpha x} z$

Ex: Lös ekv. $y'' - 3y' + 2y = (2x + 1)e^{3x} + 8$ Linjäritet!
Hom: $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ som ovan.
Part: Bestäm y_{P1} som löser $y'' - 3y' + 2y = (2x+1)e^{3x}$
och y_{P2} som löser $y'' - 3y' + 2y = 8$ och lägg ihop.

Den senare är fall 1. men vi ser ju att
$y_{P2} = 4$

Den första är fall 2. Sätt $y = e^{3x} z$

Då är $y' = e^{3x} z' + 3e^{3x} z = e^{3x}(z' + 3z)$
$y'' = e^{3x}(z'' + 3z') + 3e^{3x}(z' + 3z) =$
$= e^{3x}(z'' + 6z' + 9z)$

Detta ger $e^{3x}(z'' + 6z' + 9z) - 3e^{3x}(z' + 3z) +$
$+ 2e^{3x}z = (2x+1)e^{3x}$

så $z'' + 3z' + 2z = 2x + 1$

(Fall 2. återfört till fall 1.)

Ansätt $z_p = Ax + B$, så $z_p' = A$, $z_p'' = 0$

sätt in : $0 + 3A + 2(Ax + B) = 2x + 1$, så
$2A = 2$ dvs. $A = 1$, och $3A + 2B = 1$, dvs. $B = -1$.

så $z_p = x - 1$, så $y_p = e^{3x} z_p = e^{3x}(x+1)$.

<u>Svar</u>: $y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + e^{3x}(x-1) + 4$.

---

3. Bestäm en partikulärlösning u_p till
<u>hjälpekvationen</u> $u'' + au' + bu = p(x)e^{(\alpha+\beta)x}$
((genom substitutionen) $u = e^{(\alpha+i\beta)x} z$
och sedan fall 1.)

Om a, b och p är <u>reella</u> blir $y_p = \operatorname{Im} u_p$ om
$f(x) = p(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ och $y_p = \operatorname{Re} u_p$ om
$f(x) = p(x)^{\alpha x}\cos\beta x$

(Annars löser man också $u'' + au' + bu = p(x)e^{(\alpha - i\beta)x}$
och använder Eulers formler)

Ex: Lös ekv. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$

Hom: $C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ som ovan.

Part: Hjälpekv. är $u'' - 3u' + 2u = e^{ix}$

Sätt $u = e^{ix} z$. Då är $u' = e^{ix} z' + i e^{ix} z =$

$= e^{ix}(z' + iz)$ och $u'' = e^{ix}(z'' + iz') + i e^{ix}(z' + iz) =$

$= e^{ix}(z'' + 2iz' - z)$, vilket ger att

$e^{ix}(z'' + 2iz' - z) - 3e^{ix}(z' + iz) + 2e^{ix} z = e^{ix}$

$z'' + (2i - 3)z' + (1 - 3i)z = 1$

Vi ser att $z_p = \frac{1}{1-3i}$, så $u_p = e^{ix} \frac{1}{1-3i}$,

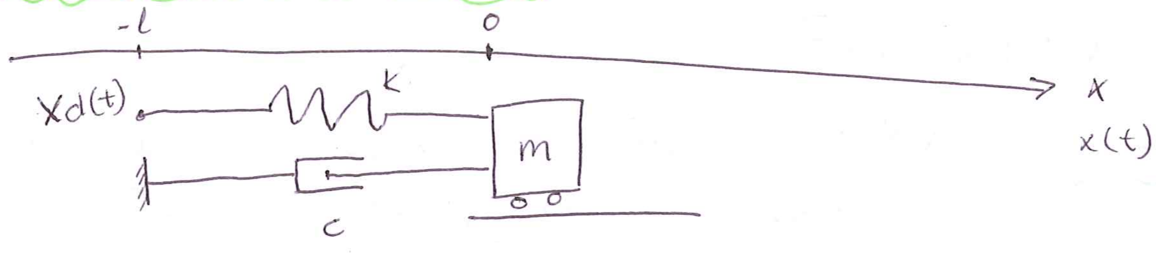
och $y_p = \operatorname{Im} u_p = \operatorname{Im} \frac{1}{1-3i} e^{ix} =$

$= \operatorname{Im} \frac{1+3i}{10} (\cos x + i \sin x) =$

$= \frac{1}{10} \sin x + \frac{3}{10} \cos x$

Svar: $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{10} \sin x + \frac{3}{10} \cos x.$

Fysikaliskt exempel: Resonans



Viloläge

Fjäderkraft på klumpen: $-k(x - x_d - \ell)$

Dämpkraft: $-cx'$

"F = ma" ger $-k(x - x_d - \ell) - cx' = mx''$,

dvs. $mx'' + cx' + kx = k(x_d + \ell)$

Anta att $x_d(t) = -\ell + C\sin\omega t$

Då får vi: $x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}C\sin\omega t$

(Specialfall: $c = 0$, $C = 0$ (dvs. ingen dämpning och fjäderänden hålls stilla):

$x'' + \frac{k}{m}x = 0$, $r^2 + \frac{k}{m} = 0$, $r = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$

så $x(t) = C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$)

Vi antar $k, c, m, C, \omega > 0$, och inför $\lambda = \frac{c}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$x'' + 2\lambda x' + \omega_0^2 x = \omega_0^2 C\sin\omega t$$

(λ mäter styrkan av dämpningen, och ω_0 är den vinkelfrekvens odämpade systemet svänger med.)

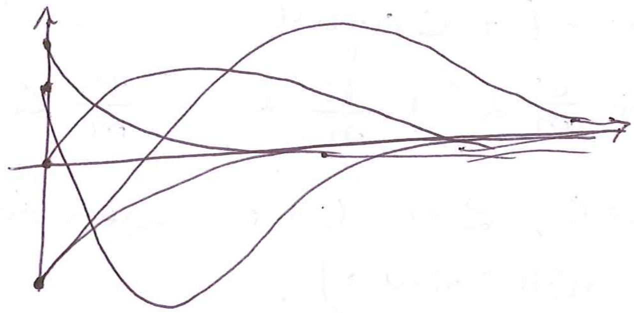
Hom: Kar. ekv. $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$, så

$r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

Tre fall: $\lambda > \omega_0$. Rötterna r_1 o r_2 är reella och negativa, $x_h(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$

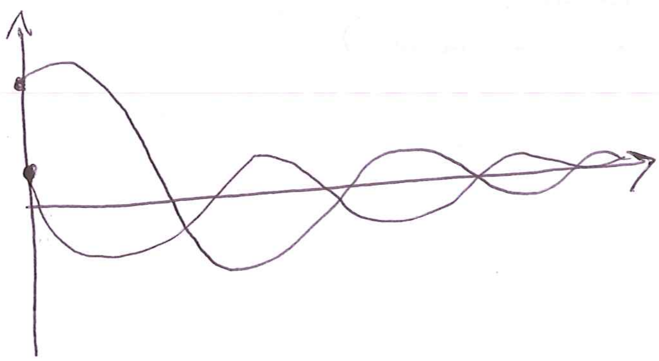
$\lambda = \omega_0$ Reell negativ dubbelrot $-\lambda$,
$x_h(t) = (C_1 t + C_2) e^{-\lambda t}$

Båda dessa fall ger utseenden i stil med:
(Beroende på beg. värden $x(0)$, $x'(0)$)



$\lambda < \omega_0$: $r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} =$
$= -\lambda \pm i\omega_s$, där $\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$
$x_h(t) = e^{-\lambda t}(C_1 \cos \omega_s t + C_2 \sin \omega_s t)$

Ger dämpade svängningar:



Vi har att $x_h(t) \to 0$ då $t \to \infty$, så lösningens utseende efter lång tid ges av partikulärlösningen.

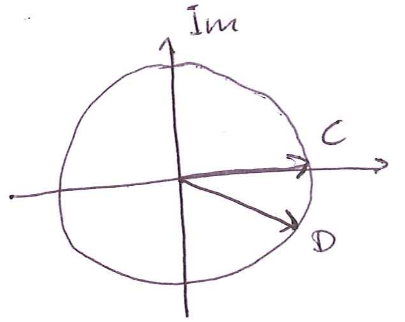
Part: Hjälpekv. $u'' + 2\lambda u' + \omega_0^2 u = \omega_0 C e^{i\omega t}$.

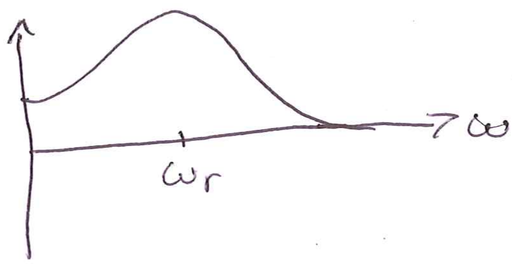
sätt $u = e^{i\omega t} z$, ..., sätt in ... hitta z_p ... ger u_p ger ...

Resultat: $x_p(t) = \operatorname{Im} D e^{i\omega t}$, där

$$D = \frac{C\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\lambda\omega}.$$

Kan ses som insignal $C \sin \omega t$, dvs $\operatorname{Im} C e^{i\omega t}$ ger utsignal $\operatorname{Im} D e^{i\omega t}$





FÖ 9

Linjära diffekv.

Operatorn D Vi låter D beteckna derivering:

$Dy = y'$, $D^2y = D(Dy) = Dy' = y''$, etc. och

t.ex. $(D+1)y = Dy + 1y = y' + y$

För vanliga polynom gäller t.ex. $r^2 + 3r + 2 =$
$= (r+1)(r+2)$

Är "$D^2 + 3D + 2 = (D+1)(D+2)$" ?

$(D^2 + 3D + 2)y = y'' + 3y' + 2y$, och

$(D+1)(D+2)y = (D+1)((D+2)y) = (D+1)(y'+2y) =$

$= D(y'+2y) + 1(y'+2y) = y'' + 2y' + y' + 2y =$

$= y'' + 3y' + 2y$

Ja! Funkar bra!

Förskjutningsregeln:

$D(e^{\alpha x}z) = e^{\alpha x}(D+\alpha)z$

Bevis: $D(e^{\alpha x}z) = e^{\alpha x}z' + \alpha e^{\alpha x}z = e^{\alpha x}(z' + \alpha z) =$

$= e^{\alpha x}(D+\alpha)z$

Ex: Bestäm en partikulärlösning till
$y'' - 3y' + 2y = (2x+1)e^{3x}$.

Sätt $y = e^{3x}z$. Vi har $y'' - 3y' + 2y = (D^2 - 3D + 2)y =$

$= (D-1)(D-2)y$ (faktorisering från lösn. av hom. ekv.)

så: $(D-1)(D-2)(e^{3x}z) = (2x+1)e^{3x}$,

$\cancel{e^{3x}}((D+3)-1)((D+3)-2)z = (2x+1)\cancel{e^{3x}}$,

$(D+2)(D+1)z = 2x+1$ dvs. $z'' + 3z' + 2z = 2x+1$

Ansätt $z_p = Ax + B$, ... $z_p = x - 1$, så

$y_p = e^{3x}(x-1)$

Ex: Bestäm en part. lösn. till $y'' - 3y' + 2y = \sin x$.

Hjälpekv: $u'' - 3u' + 2u = e^{ix}$. sätt $u = e^{ix}z$.

Det ger $(D-1)(D-2)(e^{ix}z) = e^{ix}$,

$\cancel{e^{ix}}(D+i-1)(D+i-2)z = \cancel{e^{ix}}$, $z'' + (-3+2i)z' + (i-1)(i-2)z = 1$

så $z_p = \dfrac{1}{(i-1)(i-2)} = \dfrac{1}{1-3i}$,

$u_p = \dfrac{1}{1-3i}e^{ix}$ och $y_p = \operatorname{Im} u_p = \ldots =$

$= \dfrac{1}{10}(\sin x + 3\cos x)$

Högre ordningens ekvationer

$y^{(n)} + c_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + c_1 y' + c_0 y = f(x)$, där

$c_{n-1}, \ldots, c_0 \in \mathbb{C}$ kallas en n:te ordningens linjär diff. ekv. med konstanta koefficienter.

Låt $p(r) = r^n + c_{n-1}r^{n-1} + \ldots + c_1 r + c_0$, det karakteristiska polynomet till diffekvationen.

Eftersom $y^{(n)} + c_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + c_0 y_0 =$

$= D^n y + c_{n-1}D^{n-1}y + \ldots + c_0 y = (D^n + c_{n-1}D^{n-1} + \ldots + c_1 D + c_0)y =$

$= p(D)y$ kan ekvationen skrivas: $p(D)y = f$.

$p(D)$ är en linjär operator, så alla lösningar till $p(D)y = f$ ges av $y = y_h + y_p$, där y_h är alla lösn. till den homogena ekv. $p(D)y = 0$, och y_p är en partikulärlösning, dvs. $p(D)y_p = f$.

Sats Anta att det karakteristiska polynomet har de distinkta rötterna $r_1, \dots, r_k$ med multipliciteter $n_1, \dots n_k$, så att $p(r) = (r-r_1)^{n_1} \dots (r-r_k)^{n_k}$, där $n_1, \dots, n_k \geq 1$.

Då ges samtliga lösningar till $p(D)y = 0$ av $y = p_1(x)e^{r_1 x} + \dots + p_k(x)e^{r_k x}$, där $p_1, \dots, p_k$ är komplexa polynom med grad $p_i < n_i$, $i = 1, \dots, k$.

Bevis: $p(D)y = 0$ betyder $(D-r_1)^{n_1} \dots (D-r_k)^{n_k} y = 0$.

Eftersom $(D-r_i)^{n_i}(p_i(x)e^{r_i x}) = //\text{förskjutning}// = e^{r_i x} D^{n_i} p_i(x) = e^{r_i x} \cdot 0 = 0$ om grad $p_i < n_i$ följer att $p_1(x)e^{r_1 x} + \dots + p_k(x)e^{r_k x}$ __är__ en lösning om grad $p_i < n_i$, $i = 1, \dots, k$.

Omvänt visar vi med induktion att varje lösning har denna form:

Intro / rep. till induktionsbevis

Anta att vi har påståenden $P_1, P_2, P_3, \dots$ som kan vara sanna eller falska.

Om vi visar att:

Basfall → • P_1 är sant

Ind. steg → • För varje $k \geq 1$ gäller: om P_k är sant, så är P_{k+1} sant

så följer "enligt induktionsprincipen" att $P_1, P_2, P_3, \dots$ alla är sanna

- Om $k=1$ har vi $(D-r_1)^{n_1}y=0$, dvs. $e^{r_1x}D^{n_1}(e^{-r_1x}y)=0$, så $e^{-r_1x}y$ är ett polynom p_1 med grad $p_1 < n_1$, dvs. $y=e^{r_1x}p_1(x)$

- Anta att satsen är sann för något $k \geq 1$. ("induktionsantagande").
Om då $p(r)=(r-r_1)^{n_1}\dots(r-r_k)^{n_k}$ och y uppfyller $p(D)y=0$, så har vi att

$$(D-r_1)^{n_1}\dots(D-r_k)^{n_k}\left((D-r_{k+1})^{n_{k+1}}y\right)=0,$$

så ind. ant. ger att:

$$(D-r_{k+1})^{n_{k+1}}y=\tilde{p}_1(x)e^{r_1x}+\dots+\tilde{p}_k(x)e^{r_kx},$$ där

grad $\tilde{p}_i < n_i$. Enligt förskjutningsregeln är

$$(D-r_{k+1})^{n_{k+1}}y=e^{r_{k+1}x}D^{n_{k+1}}(e^{-r_{k+1}x}y),$$ så

$$D^{n_{k+1}}(e^{-r_{k+1}x}y)=\tilde{p}_1(x)e^{(r_1-r_{k+1})x}+\dots+\tilde{p}_k(x)e^{(r_k-r_{k+1})x}$$

Det finns polynom $p_1,\dots,p_k$ med grad p_i = grad $\tilde{p}_i$ så att $D^{n_{k+1}}(p_i(x)e^{(r_i-r_{k+1})x})=$

$$=\tilde{p}_i(x)e^{(r_i-r_{k+1})x}$$ (övn!)

Detta ger $D^{n_{k+1}}\left(e^{-r_{k+1}x}y-p_1(x)e^{(r_1-r_{k+1})x}-\dots-p_k(x)e^{(r_k-r_{k+1})x}\right)=0$

Så det finns ett polynom p_{k+1}, med grad $p_{k+1}<n_{k+1}$, sådant att parantesen $=p_{k+1}(x)$.

Detta ger till slut: $y=p_1(x)e^{r_1x}+\dots+p_k(x)e^{r_kx}+p_{k+1}(x)e^{r_{k+1}x}$.

Klart.

Reell form fungerar som för andra ordn. ekv.

Partikulärlösningar till högre ordn. bestäms med samma metoder som för andra ordn. ekv.

Ex: Lös ekv $y^{(6)} - y^{(5)} - 4y^{(4)} + 2y''' + 5y'' - y' - 2y = e^x$

Hom: Kar. ekv. $r^6 - r^5 - 4r^4 + 2r^3 + 5r^2 - r - 2 = 0$,

dvs ... $(r+1)^3(r-1)^2(r-2) = 0$

så $y_h = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{-x} + (C_4 + C_5x)e^x + C_6e^{2x}$.

Part: Sätt $y = e^x z$: $(D+1)^3(D-2)(e^x z) = e^x$,

$\cancel{e^x}(D+2)^3 D^2(D-1)z = \cancel{e^x}$

(Högre ordn. derivator av z) $- 8z'' = 1$

Vi ser att $z_p = -\frac{x^2}{16}$,

(Detta "fusk" funkar ty bara konstant i H.L.)

så $y_p = -\frac{x^2}{16}e^x$

Svar: $y(x) = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{-x} + (C_4 + C_5x)e^x + C_6e^{2x} - \frac{x^2}{16}e^x$.

Eulerekvationer

$$x^n y^{(n)} + c_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + c_1xy' + c_0y = f(x), \quad x > 0.$$

Genom variabelbyte $x = e^t$, dvs. $t = \ln x$, fås en ekv. med konst. koeff.

Ex: Lös $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2x, \quad x > 0.$

$t = \ln x$ ger:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x}, \quad \text{så}$$

$$xy' = \frac{dy}{dt}, \quad \text{och} \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) \cdot \frac{1}{x} + \frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{1}{x} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x^2}, \quad \text{så}$$

$$x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

Alltså: $\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) - 4\frac{dy}{dt} + 6y = 2e^t,$

$\frac{d^2y}{dt^2} - 5 \cdot \frac{dy}{dt} + 6y = 2e^t$ som har lösn.

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + e^t$$

Svar: $y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^3 + x, \quad x > 0.$

Fö 10

Generaliserade integraler

Kom ihåg: Om $-\infty < a < b < \infty$ och $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ är begränsad o styckvis kontinuerlig existerar Riemann-integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ (def. mha. över- och undersummor etc...)

Låt nu $-\infty \le a < b \le \infty$ och låt $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ vara styckvis kontinuerlig.

Def: $\int_a^b f(x)\,dx$ är generaliserad i ∞ $(-\infty)$ om $b = \infty$ $(a = -\infty)$, den är generaliserad i c om $a \le c \le b$ och f inte är begränsad i någon omgivning av c, om den är generaliserad om den är generaliserad i någon punkt enligt ovan.

Ex: $\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x-1)(x-2)}\,dx$ är gen. i 0, 2 och ∞. (men inte i 1)

Def: Om $\int_a^b f(x)$ är gen. endast i b sägs den vara konvergent om $\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$ existerar ändligt. Gränsvärdet sägs då vara integralens värde.
Analogt om $\int_a^b f(x)\,dx$ är gen. enbart i a.
Om $\int_a^b f(x)\,dx$ är gen. i flera punkter delas $]a,b[$ upp så att varje delintegral är gen. endast i en ändpunkt. Om alla dessa delintegraler är konvergenta (enl. ovan) sägs $\int_a^b f(x)\,dx$ vara konvergent och dess värde är då summan av delintegralernas värden.
Om $\int_a^b f(x)\,dx$ är gen. och inte är konvergent kallas den divergent.

Ex: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x-1)(x-2)}\,dx$ är konv. om och endast om

$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^{1/2} \frac{\ln x\,dx}{(x-1)(x-2)}, \quad \lim_{b\to 2^-} \int_{1/2}^{b} \frac{\ln x\,dx}{(x-1)(x-2)},$$

$$\lim_{a\to 2^+} \int_a^{3} \frac{\ln x\,dx}{(x-1)(x-2)} \;\underline{o}\; \lim_{b\to \infty} \int_{3}^{b} \frac{\ln x\,dx}{(x-1)(x-2)}$$

alla existerar ändligt, annars är den divergent.

Sats (Linjäritet) Om $\int_a^b f(x)\,dx$ $\underline{o}$ $\int_a^b g(x)\,dx$ är konvergenta gen. integraler är

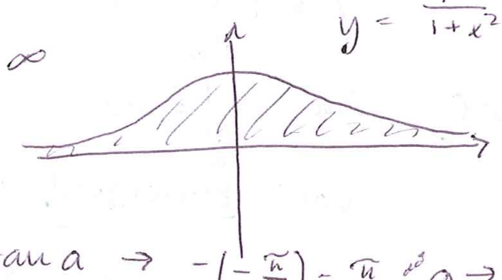
$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx$ $\underline{o}$ $\int_a^b c\,f(x)\,dx$ också konvergenta

$\underline{o}$ $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ $\underline{o}$

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

Bevis: Följer av gränsvärdesregler och linjäritet för vanliga integraler.

Ex: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ Gen. i $-\infty$ och ∞

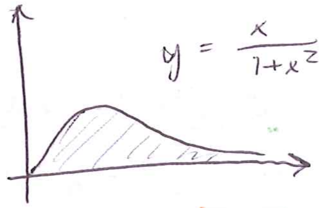


$$\int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_a^0 = 0 - \arctan a \to -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ då } a \to -\infty$$

$$\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_0^b = \arctan b - 0 \to \frac{\pi}{2} \text{ då } b \to \infty$$

så $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ är konv. och $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

Ex: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}$ Gen i ∞.



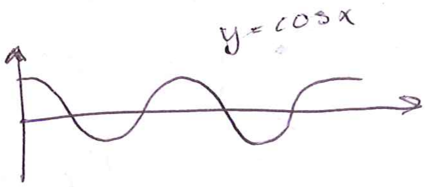
$$\int_0^{b} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^b =$$

$= \frac{1}{2}\ln(1+b^2) \longrightarrow \infty$ då $b \to \infty$, så

$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}$ är divergent.

(Arean under kurvan är alltså oändligt stor.)

Ex: $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x\,dx$. Gen i ∞

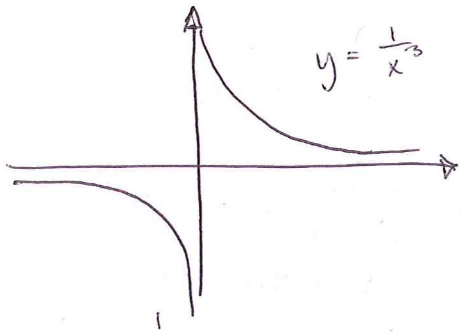


$$\int_0^{b} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_0^b = \sin b$$

har inte gränsvärde då $b \to \infty$, så $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x\,dx$ är divergent.

Ex: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$. Gen i 0.

$$\cancel{\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3} = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.}$$



$$\int_a^{1} \frac{dx}{x^3} = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_a^1 = \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2} \to \infty$$

då $a \to 0+$

så $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$ är div.

Jämförelsesatser

OBS: Om $f(x) \geq 0$ är $\int_a^b f(x)\,dx$ konv. om och endast om arean

är ändlig.

Sats: Om $0 \leq f(x) \leq g(x)$ då $a<x<b$ så gäller:

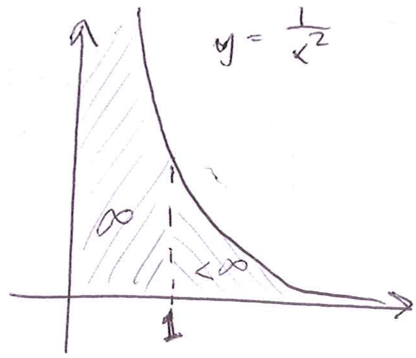
- $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergent $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ konv, och $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.
- $\int_a^b f(x)\,dx$ divergent $\Rightarrow$ $\int_a^b g(x)\,dx$ div.

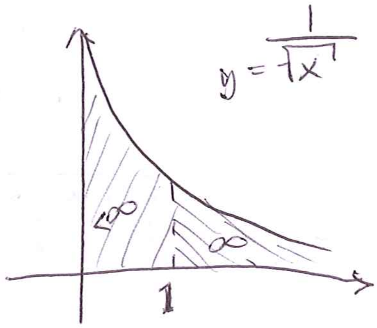
Bevis: se GNP

Sats: Om $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ då $a < x < b$, och integralerna $\int_a^b f(x)\,dx$ och $\int_a^b g(x)\,dx$ är gen. endast i b och om $0 < \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$ så är integralerna antingen båda konv. eller båda div. Analogt för vänstra ändpunkten (Bevis: se GNP)

För jämförelse:

- $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ är konvergent $\iff$ $\alpha > 1$.
- $\int_0^{1} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ är konvergent $\iff$ $\alpha < 1$.





Ex: $\int_1^{\infty} \frac{1+\cos x}{x^3}\,dx$. Gen i ∞.

$0 \le \frac{1+\cos x}{x^3} \le \frac{2}{x^3}$ då $x \ge 1$,

och $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ är konv., så

$\int_1^{\infty} \frac{1+\cos x}{x^3}\,dx$ är konv.

Ex: G 8 h) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x-\sin x}}{x^2}\,dx$. Gen i 0 & ∞, så undersök

$\int_0^1$ och $\int_1^{\infty}$.

(integranden är väldef. och ≥ 0 ty $x \ge \sin x$ då $x \ge 0$.)

$\int_0^1$: $\frac{\sqrt{x-\sin x}}{x^2} = \frac{\sqrt{x-(x-\frac{x^3}{6}+O(x^5))}}{x^2} = \frac{\sqrt{\frac{x^3}{6}+O(x^5)}}{x^2} =$

$= \frac{x^{3/2}\sqrt{1/6+O(x^2)}}{x^2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{6}+O(x^2)}}{x^{1/2}}$

så: $\frac{\left(\frac{\sqrt{x-\sin x}}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)} \to \sqrt{1/6}$ då $x \to 0^+$, och

$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ är konv. så $\int_0^1 \frac{\sqrt{x-\sin x}}{x^2}$ är konv.

$$\int_1^\infty : \quad \frac{\sqrt{x-\sin x}}{x^2} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{\sin x}{x}}}{x^2} = \frac{\sqrt{1-\frac{\sin x}{x}}}{x^{3/2}}$$

Så:
$$\frac{\left(\frac{\sqrt{x-\sin x}}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)} \to 1 \text{ då } x \to \infty,$$

och $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ är konvergent, så

$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x-\sin x}}{x^2}\,dx$ är konvergent.

Alltså är $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x-\sin x}}{x^2}\,dx$ konvergent.

Absolutkonvergens

Def: En gen. integral $\int_a^b f(x)\,dx$ kallas absolutkonvergent om $\int_a^b |f(x)|\,dx$ är konv.

Sats: Om $\int_a^b f(x)\,dx$ är absolutkonv. är den konv. och

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \quad \text{(Bevis: Se GNP)}$$

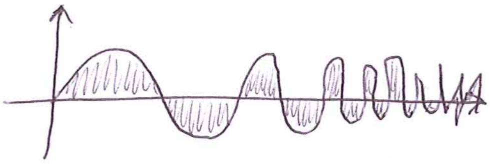
Ex: $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ Gen. i ∞.

$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ och $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ är konvergent, så

$\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$ är konv., så $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ är absolutkonvergent,

och $\left|\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx\right| \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 1$

Ex: $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ Gen i ∞.



$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \overbrace{\int_0^1 \sin x^2\,dx}^{\text{ei gen.}} + \int_1^\infty \sin x^2\,dx, \text{ så}$$

undersök $\displaystyle\int_1^\infty$:

$$\int_1^b \sin x^2\,dx = \int_1^b \frac{1}{x}\cdot x\sin x^2\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}\cos x^2\right)\right]_1^b - \int_1^b \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{1}{2}\cos x^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos 1 - \frac{\cos b^2}{b}\right) - \frac{1}{2}\int_1^b \frac{\cos x^2}{x^2}\,dx \to$$

$$\to \frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos x^2}{x^2}\,dx \text{ då } b\to\infty,$$

ty $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x^2}{x^2}\,dx$ är absolutkonv.

$$\left|\frac{\cos x^2}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2} \text{ och } \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \text{ är konv.}$$

Så $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ är konv.

Fö 11

Numeriska serier

Låt $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vara en följd av tal.

Def: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kallas en serie (kan även skrivas $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$)

$a_1, a_2, a_3 \ldots$ kallas seriens termer och

$s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \ldots$

kallas dess delsummor.

Om $\lim_{n\to\infty} s_n$ existerar ändligt kallas serien konvergent och gränsvärdet kallas dess ~~delsumma~~ summa, annars kallas serien divergent.

Sats (Linjäritet)

Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konv., är

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ och $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ konv., och

vi har att $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

och $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (Bevis: övning)

Sats om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent är $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Med andra ord: Om termerna i en serie inte går mot noll är serien divergent (Divergenstestet)

Bevis Anta att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent med summan A.

Då har vi $a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \to A - A = 0$ då $n \to \infty$.

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} e^{1/n}$ är div. enligt divergenstestet.

Ex: För $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

ger divergenstestet ingen information.

Men den är divergent: $1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{> \frac{1}{2}}$ etc.

Så delsummorna går mot ∞.

Geometriska serien

Av formeln för en geometrisk summa följer:

Sats: $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots$ är

$$\begin{cases} = \frac{a}{1-q} & \text{om } |q| < 1. \quad \text{(konvergent)}. \\ \text{divergent} & \text{om } |q| \geq 1. \quad (\text{och } a \neq 0) \end{cases}$$

Kvot: $-\frac{1}{2}$

Ex: $3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \dots = \frac{3}{1-(-\frac{1}{2})} = 2.$

Ex: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, om $|x| < 1$.

Jämförelsesatser

OBS: om $a_n \geq 0$ är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent omm följden av delsummor är uppåt begränsad.

Sats om $0 \leq a_n \leq b_n$ då $n \geq 1$ gäller:

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent $\rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent, och $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är divergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är divergent

Sats Om $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ då $n \geq 1$ och

$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$ så är serierna

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ antingen båda konv.

eller båda div.

För jämförelse: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ är konv. $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$.

Detta bevisas m.h.a.:

Sats (integralkriteriet)

Om $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ är positiv och avtagande

är serien $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent omm integralen

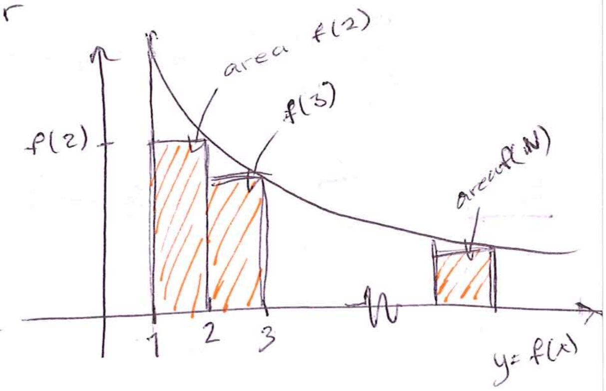
$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ är konv.

Bevis Om $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ är konv. är

$\sum_{n=1}^{N} f(n) = f(1) + \sum_{n=2}^{N} f(n)$

f (avt) $\rightarrow$ $\leq f(1) + \int_1^{N} f(x)\,dx$

$f \geq 0$ $\rightarrow$ $\leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$.



så seriens delsummor är uppåt begr.,

så $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ är konv. (omvänt: övning)

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{4^n}$. Vi har $0 \le \frac{|\cos n|}{4^n} \le \frac{1}{4^n}$

och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ är konvergent, med summan

$\frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}$, så $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{4^n}$ är konv.,

och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{4^n} \le \frac{1}{3}$.

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^{\sqrt{n}}}$. $\frac{n+1}{n^{\sqrt{n}}} = \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n^{\sqrt{n}}} =$

$= \frac{1+\frac{1}{n}}{n^{\sqrt{n}-1}}$.

Om $n \ge 9$ är $\sqrt{n} \ge 3$, så

$0 \le \frac{n+1}{n^{\sqrt{n}}} = \frac{1+1/n}{n^{\sqrt{n}-1}} \le \frac{2}{n^2}$ om $n \ge 9$ och

$\sum_{n=9}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ är konv., så $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{n+1}{n^{\sqrt{n}}}$ är konv., så

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^{\sqrt{n}}}$ är konv.

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{1}{n})$ $1-\cos\frac{1}{n} \ge 0$.

$1-\cos\frac{1}{n} = \cancel{1} - (\cancel{1} - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^4})) =$

$= \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^4})$.

OBS: $\ne 0$ och $< \infty$.

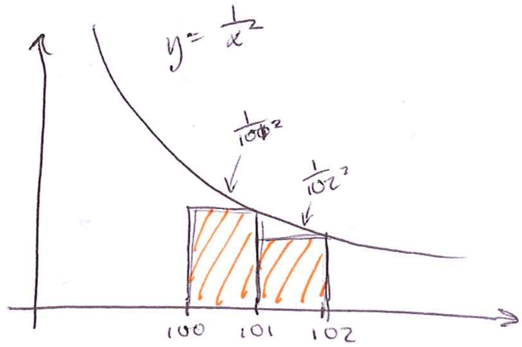
Så $\frac{1-\cos(\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n^2})} \to \frac{1}{2}$ då $n \to \infty$, och

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är konv., så $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{1}{n})$ är konv.

Ex: Uppskatta felet om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ approximeras med $\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq$$

$$\leq \int_{100}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{100}^{\infty} = \frac{1}{100}$$



Så felet $\leq \frac{1}{100}$.

Absolutkonvergens

Def: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kallas absolutkonvergent om $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ är konv.

Sats: Absolutkonvergenta serier är konv., och för dem gäller att $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

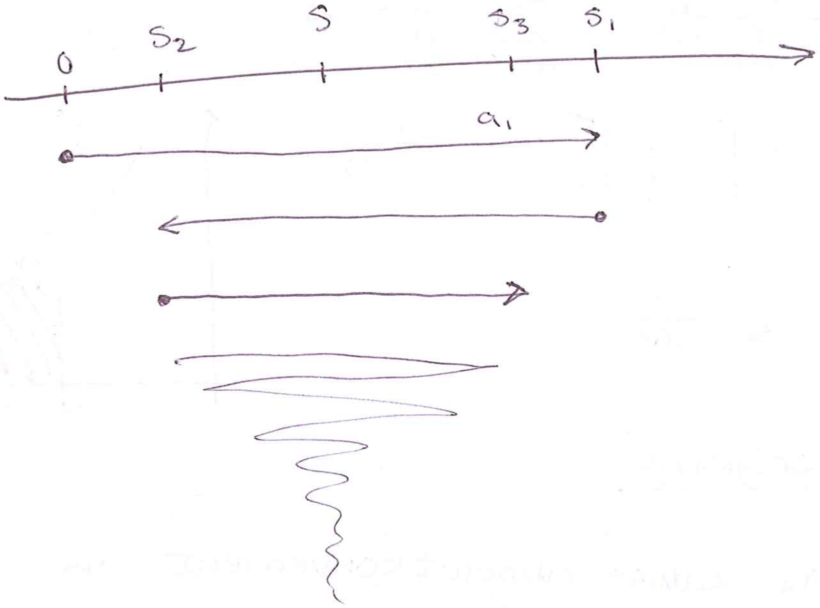
Alternerande serier

Def: serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kallas alternerande om varannan term är ≥ 0 och varannan är ≤ 0. $(+,-,+,-,+\dots)$

En alternerande serie där $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \dots$ och $|a_n| \to 0$ då $n \to \infty$ kallas en Leibniz-serie.

Sats (Leibniz kriterium)
Leibniz-serier är konvergenta, och för summan S gäller att $|S - S_n| \leq |a_{n+1}|$, där $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Bevis   Med figur : (anta $a_1 \geq 0$, så $a_2 \leq 0$, $a_3 \geq 0$...)



$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

⋮

$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ är konv.

enl. Leibniz, eftersom:

- serien är alternerande
- termernas belopp avtar
- termerna går mot 0.

måste skrivas på tenta för att vara Leibniz

Läs N. 5

Ex:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} -$$

$$- \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \ldots$$

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \ldots$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} \ldots$$

$$S + \frac{S}{2} = 1 + 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} +$$

$$+ 0 + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + 0 \ldots$$

$$\frac{3S}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} -$$

$$- \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8}$$

samma termer men
olika summor!

Teutan 2009-06-11