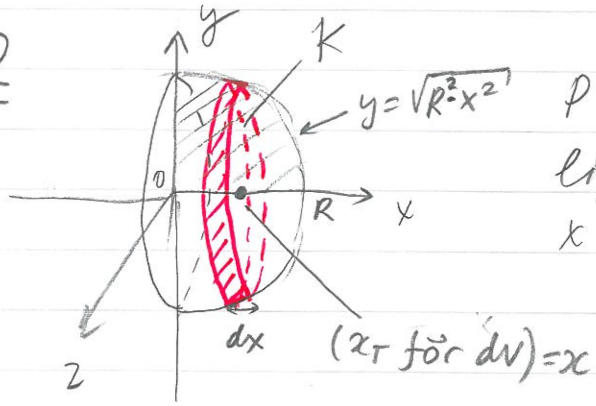
Lektion 5

$\boxed{B7}$ **30**



P g a kroppens symmetri ligger tyngdpunkten på x-axeln, d v s $y_T = z_T = 0$.

$$x_T = \frac{\int_K (x_T \text{ för } dV)\, dV}{\int_K dV}, \text{ där}$$

$(x_T$ för $dV)$ är x-koordinaten av tyngdpunkten hos volymelement dV.

Eftersom kroppen K fås då vi roterar området

$$\mathcal{D} = \{0 \le x \le R,\quad 0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}\}$$

ett varv runt x-axeln => Ks volymelement dV

$$\text{är } \underbrace{dV}_{\text{cylinders volym}} = \underbrace{\pi(R^2 - x^2)}_{\text{arean av basen}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{höjden}}.$$

Observera att tyngdpunkten hos volymelement är i mitten av skivan så man antar att $(x_T \text{ för } dV) = x$ då dx är liten. Vi ser att

$$\int_K (x_T \text{ för } dV)\, dV = \int_0^R x\, \pi (R^2 - x^2)\, dx =$$

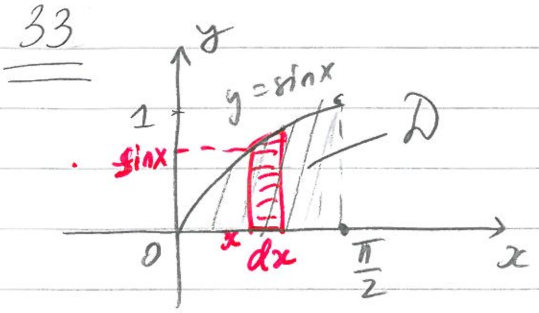
$$= \pi \left[\frac{R^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=R} = \pi \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \underbrace{\frac{\pi R^4}{4}}.$$

$$\int_K dV = \left\langle \begin{matrix} \text{volym} \\ \text{av } \tfrac{1}{2} \text{ klot} \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = \underbrace{\frac{2\pi R^3}{3}} \Rightarrow$$

$$x_T = \frac{\frac{\cancel{\pi} R^4}{4}}{\frac{2\cancel{\pi} R^3}{3}} = \underline{\underline{\frac{3R}{8}}}.$$

$\Rightarrow$ Tyngdpunkten ligger på symmetriaxeln, $\frac{3R}{8}$ från den plana ytan.

<u>33</u>



Vi använder formlerna

$$x_T = \frac{\int_D (x_T \text{ för } dA)\, dA}{\int_D dA}$$

$$y_T = \frac{\int_D (y_T \text{ för } dA)\, dA}{\int_D dA},$$

där $(x_T$ för $dA)$ och $(y_T$ för $dA)$ är tyngdpunktens koordinater hos areaelement dA.

Areaelement är en rektangel (röd på bilden ovan)

$$\Rightarrow dA = \underbrace{\sin x}_{\text{höjden}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{bredden}},$$

och dess tyngdpunkt är placerat i $\left(x, \frac{\sin x}{2}\right)$ (då dx är liten).

Vi beräknar

$$\int_D dA = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} = \underset{\sim}{1},$$

$$\int_D (x_T \text{ för } dA)\, dA = \int_0^{\pi/2} \underbrace{x}_{=(x_T \text{ för } dA)} \cdot \underbrace{\sin x \, dx}_{=dA} =$$

$$= \cancel{\left[-x \cos x\right]_0^{\pi/2}} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx =$$

$$= \left[\sin x\right]_0^{\pi/2} = \underset{\sim}{1}$$

$$\int_{\mathcal{D}} (y_T \text{ för } dA)\, dA = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\frac{\sin x}{2}}_{=(y_T \text{ för } dA)} \underbrace{\sin x\, dx}_{=dA} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{2} dx =$$

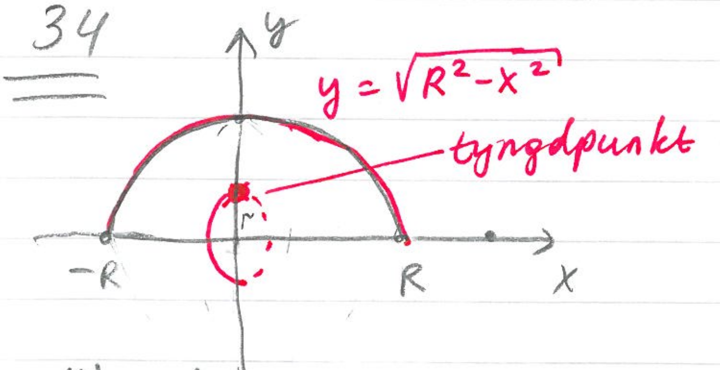
$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{4} dx =$$

$$= \left[\frac{1}{4}x - \frac{\sin 2x}{8}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}.$$

Vilket ger: $x_T = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}, \quad y_T = \frac{\pi/8}{1} = \underline{\underline{\frac{\pi}{8}}}$

Svar: $(1; \frac{\pi}{8})$.

34



Uppgiften handlar om att använda Guldins regel baklänges.

När kurvan roteras runt x-axeln så uppkommer en sfär vars area är $A = 4\pi R^2$

Kurvans längd är $L = \frac{2\pi R}{2} = \pi R$.

Guldins regel säger att $A = L \cdot l$, där l är tyngdpunktens väg.

Det är klart att tyngdpunktens väg ser ut som en cirkel, då tyngdpunkten går ett varv runt x-axeln. Låt radien vara r, så $l = 2\pi r$.

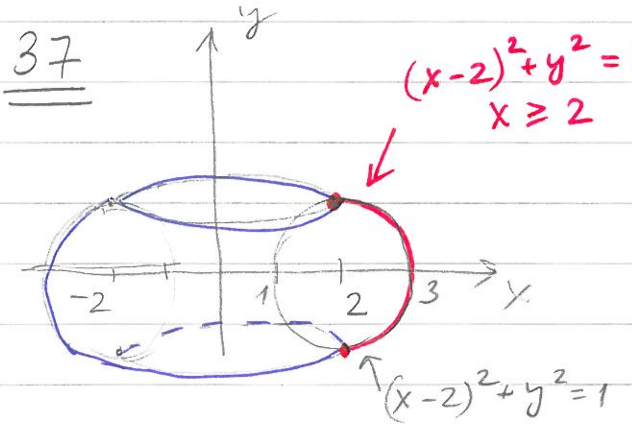
Vi har sambandet $A = L \cdot l \Leftrightarrow$

$$4\pi R^2 = \pi R \cdot 2\pi r \Rightarrow$$

$$r = \frac{\cancel{4}^{2}\cancel{\pi}R^{\cancel{2}}}{\pi \cancel{R} \cdot \cancel{2}\cancel{\pi}} = \frac{2R}{\pi}.$$

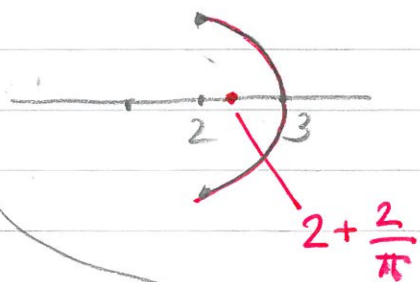
Om vi tittar på vår bild så ser vi att tyngdpunktens koordinater är $\left(0; \frac{2R}{\pi}\right)$.

37



Metod 1

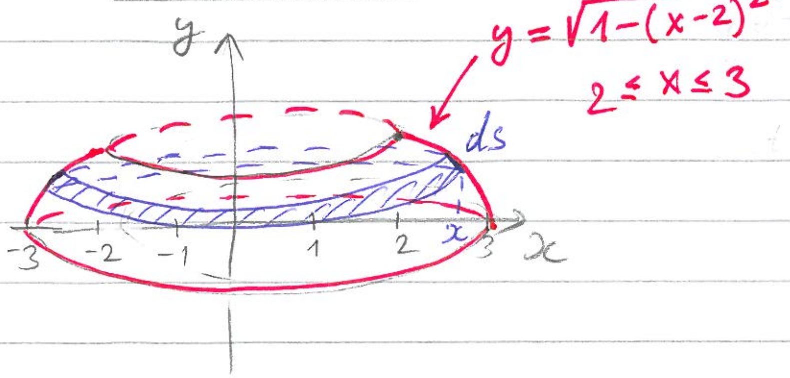
Från 34 vet vi att tyngdpunkten hos tråden är placerat så här!



Vid rotationen kring y-axeln är tyngdpunktens väg $2\pi\left(2+\frac{2}{\pi}\right)$, och trådens längd är $\frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow$ från Guldins regel följer det att arean blir

$$A = \underbrace{2\pi\left(2+\frac{2}{\pi}\right)}_{\text{tyngdp. väg}} \cdot \underbrace{\pi}_{\text{längd}} = 4\pi(\pi+1).$$

Metod 2



$A = 2A_1$ där A_1 uppkommer då vi roterar $1/4$ cirkel

$(x-2)^2 + y^2 = 1$
$x \geq 2$
$y \geq 0$

ett varv kring y-axeln.

dA_1 – arean av ett band med breden ds och längden $2\pi x \Rightarrow$

$$dA_1 = 2\pi x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\sqrt{1-(x-2)^2}\right)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{x-2}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\right)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi x \sqrt{1 + \frac{(x-2)^2}{1-(x-2)^2}}\, dx =$$

$$= 2\pi x \sqrt{\frac{1}{1-(x-2)^2}}\, dx =$$

$$= \frac{2\pi x\, dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} \Rightarrow$$

$$A = 2A_1 = 2\int_2^3 dA_1 = 2\pi \int_2^3 \frac{2x-4+4}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\, dx =$$

$$= \underbrace{2\pi \int_2^3 \frac{2x-4}{\sqrt{1-(x-2)^2}}}_{= I_1} + \underbrace{8\pi \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}}}_{= I_2} = \otimes$$

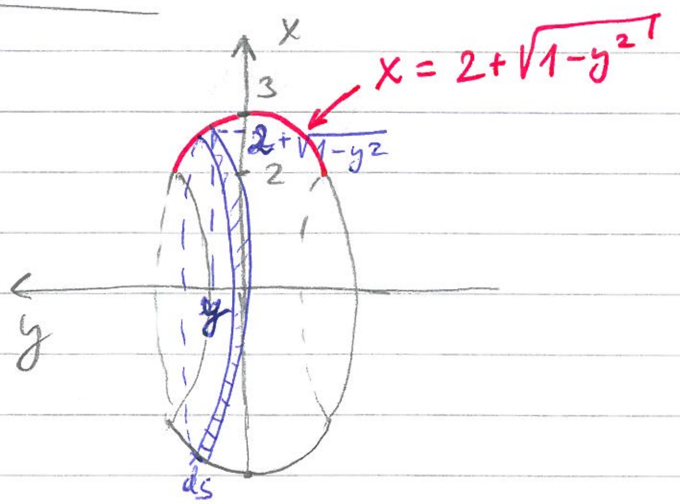
$$I_1 = \begin{bmatrix} 1-(x-2)^2 = t \\ dt = -(2x-4) \\ t \in (1, 0) \end{bmatrix} = -2\pi \int_1^0 \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= -2\pi \left[\frac{t^{1/2}}{1/2} \right]_1^0 = \underset{\sim\sim}{4\pi}.$$

$$I_2 = 8\pi \left[\arcsin(x-2) \right]_2^3 = 8\pi \arcsin 1 = 8\pi \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi^2$$

$$\Rightarrow \quad A = 4\pi^2 + 4\pi = \underset{\sim\sim\sim}{4\pi(1+\pi)}.$$

Metod 3



Kurvan
$x = 2 + \sqrt{1-y^2}$
$-1 \le y \le 1$
roteras ett varv kring y-axeln

$$\underbrace{dA}_{\text{arean av ett band}} = \underbrace{2\pi\left(2 + \sqrt{1-y^2}\right)}_{\text{längden}} \cdot \underbrace{ds}_{\text{bredden}}$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dy}\left(2 + \sqrt{1-y^2}\right)\right)^2}\, dy = \sqrt{1 + \left(\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2}\, dy =$$

$$= \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow dA = 2\pi\left(2 + \sqrt{1-y^2}\right) \cdot \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow$$

$$A = \int_{-1}^{1} \left(\frac{4\pi}{\sqrt{1-y^2}} + 2\pi \right) dy = 4\pi \left[\arcsin y \right]_{-1}^{1} + 4\pi =$$

$$= 4\pi\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + 4\pi = \underset{\sim\sim\sim}{4\pi(\pi+1)}.$$