Lektion 18

Vi säger att $\int_a^b f(x)dx$ är generaliserad om

* intervallet (a,b) är oändlig eller
* det finns en punkt $c \in [a,b]$ s a $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$.

En generaliserad integral som är generaliserad endast i punkt b (d v s antingen $b = \infty$ eller $\lim_{x \to b} f(x) = \infty$) kan beräknas som

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\beta \to b \\ \beta \leq b}} \int_a^\beta f(x)dx \qquad (*)$$

Om detta gränsvärdet existerar och är ändligt $\Rightarrow$ integralen är konvergent, annars är den divergent.

Man kan använda $(*)$ för att bevisa att

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ är } \begin{cases} \text{konvergent då } \alpha > 1 \\ \text{divergent då } \alpha \leq 1 \end{cases} \\ &\int_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ är } \begin{cases} \text{konvergent då } \alpha < 1 \\ \text{divergent då } \alpha \geq 1 \end{cases} \end{aligned}}$$

general. i ∞

general. i 0

Antag nu att $\int_a^b f(x)dx$ är generaliserad i b, och att $f(x) \geq 0$.

Då kan vi använda jämförelsesatser för att undersöka konvergensen

1a jämförelsesatsen

a) Antag att

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq f(x) \leq g(x) \\ \int_a^b g(x)\,dx \text{ - konvergent} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \text{ - konvergent}$$

b) Antag att

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq g(x) \leq f(x) \\ \int_a^b g(x)\,dx \text{ - divergent} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \text{ - divergent.}$$

2a jämförelsesatsen

Antag att $f(x) = g(x)h(x)$ där $\lim_{x \to b} g(x) = A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$. I så fall om

a) $\int_a^b h(x)\,dx$ är konverg. $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ är konv.

b) $\int_a^b h(x)\,dx$ är diverg. $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ är diverg.

$\boxed{\text{B10}}$ 16 a) $\int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$ – generaliserad i ∞

2a jämförelsesatsen:

$$\frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{x^2}{x^4} \cdot \frac{1+x^{-2}}{1+x^{-4}} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1+x^{-2}}{1+x^{-4}}.$$

Här är $\lim_{x\to\infty} \frac{1+x^{-2}}{1+x^{-4}} = 1$ och $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ är konvergent då $2 > 1 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$ är konv. $\boxed{2}$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sin x}$ är generaliserad i 0 då

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x+\sin x} = \infty$$

Vi kan igen använda 2a jämförelsesatsen!

$$\frac{1}{x+\sin x} = \frac{1}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}}$$

där $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{2}$ och $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ är divergent.

Då är $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sin x}$ divergent.

<u>Alternativ lösning</u>: vi kan också använda oss av Maclaurinutvecklingar när vi försöker tillämpa 2a jämförelsesatsen!

$$\frac{1}{x+\sin x} = \frac{1}{x+x+O(x^3)} = \frac{1}{2x+O(x^3)} =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2+O(x^2)}.$$

Här är $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2+O(x^2)} = 0$ och $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ divergent

Så $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sin x}$ är divergent med.

$\boxed{B10}$ 17

a) $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^4}$ – här är kanske enklast att tillämpa 1a jämförelsesatsen!

$0 \le \frac{1}{1+x^4} \le \frac{1}{x^4}$ och $\int_1^\infty \frac{dx}{x^4}$ är konverg.

Då är $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^4}$ konvergent.

c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$ är generaliserad i $x=0$.

Vi försöker skriva $\frac{1}{\sqrt{\tan x}}$ som en produkt av två funktioner där en har ändligt gränsv. i 0 och den andra har en konvergent integral.

$$\frac{1}{\sqrt{\tan x}} = \left[\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1\right] = \frac{1}{\sqrt{\frac{\tan x}{x}} \cdot \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\tan x}{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Här $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{\frac{\tan x}{x}}} = 1$ och

$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ är konvergent då $\frac{1}{2} < 1$.

$\Longrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$ också är konvergent.

enligt 2a jämf. satsen

e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$ är generaliserad i $x = 1$.

Vi försöker skriva $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$ som en produkt

produkt av två funktioner där den ena har ett ändligt gränsvärde $\neq 0$ i $x = 1$ och den andra har en konvergent integral:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}} = \underbrace{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}}_{\substack{\to \frac{1}{2} \text{ då} \\ x \to 1}} \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

$\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ kan undersökas för konvergens på olika sätt. T ex

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \left[\begin{array}{l} t = x-1, \\ 0 \leq t \leq 1,\ dx = dt \end{array}\right] = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^{1/2}}$$

vilket är konvergent då $\frac{1}{2} < 1$.

$\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$ är alltså konvergent p g a 2a jämf.satsen.

g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx$ är generaliserad i både $x = 0$ och ∞ då

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan\sqrt{x}}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x}\,(x+1)}_{\to 0}} = \infty$$

Vi måste därför splittra!

$$\int_0^\infty \frac{\arctan\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx = \int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx + \int_1^\infty \frac{\arctan\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx$$

Undersöker

$$\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx = I_1.$$

$$\frac{\arctan\sqrt{x}}{x(x+1)} = \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)} =$$

$$= \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(x+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ där}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan\sqrt{x}}{\underbrace{\sqrt{x}}_{\to 1}\underbrace{(x+1)}_{\to 1}} = 1 \text{ och}$$

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ är konvergent $\Rightarrow$ I_1 är också konvergent pga andra jämf. satsen.

Undersöker $\int_1^\infty \frac{\arctan\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx = I_2$.

$$\frac{\arctan\sqrt{x}}{x(x+1)} = \underbrace{\arctan\sqrt{x}}_{\to \frac{\pi}{2} \text{ då } x\to\infty} \cdot \frac{1}{x^2+x} =$$

$$= \arctan\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x^2(1+x^{-1})} =$$

$$= \underbrace{\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x^{-1}}}_{\to \frac{\pi}{2} \text{ då } x\to\infty} \cdot \frac{1}{x^2}$$ och $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ är konvergent.

Det betyder att I_2 är konvergent $\Rightarrow$

$$I_1 + I_2 = \int_0^\infty \frac{\arctan\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx \text{ är konvergent.}$$

Om integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ är generaliserad i $x=b$ (där b kan vara ∞), och $f(x)$ byter tecken (d vs är positiv på visa delar av $[a,b]$ och negativ på andra delar av $[a,b]$), så kan vi inte använda 1a och 2a jämförelse-satserna. Satsen nedan kan däremot hjälpa!

Absolutkonvergenssats

Om $\int_a^b f(x)\,dx$ är generaliserad i $x=b$ (där b kan vara ∞) och

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \text{ är konvergent} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \text{ är konvergent.}$$

OBS! Om $\int_a^b |f(x)|\,dx$ är divergent kan vi inte dra någon slutsats.

$\boxed{B10}$ **19**

a) $\frac{\sin x}{x^2}$ byter tecken då $x > \pi \Rightarrow$

jämförelsesatserna kan inte användas.

Vi försöker använda absolutkonvergenssatsen och undersöker istället

$$\int_\pi^\infty \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx = \int_\pi^\infty \frac{|\sin x|}{x^2}\,dx.$$

Nu är $\frac{|\sin x|}{x^2} \geq 0$ och dessutom

$0 \leq \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, där $\int_\pi^\infty \frac{dx}{x^2}$ är konvergent.

I så fall säger 1a jämförelsesatsen att

$\int_{\pi}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}\,dx$ är konvergent $\Rightarrow$

p g a absolutkonvergenssatsen är $\int_{\pi} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ konvergent.

b) Här hjälper absolutkonvergenssatsen inte så mycket: om vi undersöker

$$\int_{\pi}^{\infty} \left| \frac{\cos x}{x} \right| dx = \int_{\pi}^{\infty} \frac{|\cos x|}{x}\,dx \text{ – inte konvergent.}$$

(kommer att visas ~~let~~ senare i kursen)

Vi kan däremot använda partiell integration och resultatet som vi fick i a):

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx = \int_{\pi}^{\infty} \overset{\downarrow}{x^{-1}} \cdot \overset{\uparrow}{\cos x}\,dx =$$

$$= \lim_{B\to\infty} \int_{\pi}^{B} \overset{\downarrow}{x^{-1}} \overset{\uparrow}{\cos x}\,dx =$$

$$= \lim_{B\to\infty} \left(\left[x^{-1} \sin x \right]_{\pi}^{B} + \int_{\pi}^{B} x^{-2} \sin x\,dx \right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{B\to\infty} \left(\frac{\sin B}{B} - \frac{\sin \pi}{\pi} \right)}_{\text{existerar och ändligt}} + \underbrace{\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx}_{\text{konvergent.}}$$

$$\Rightarrow \int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx \text{ är konvergent.}$$

Visar att

$\in (0;1]$

c) $\int_1^\infty \sin\frac{1}{x^2}\cos x^2\,dx$. $\sqrt{}$ $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\cos x^2 \geq 0$

$\Rightarrow$ jämförelsesatser kan användas.

$$\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\cos x^2 = \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}}_{\to 1 \text{ då } x\to\infty} \cdot \frac{1}{x^2}\cdot\cos x^2,$$

där $\frac{1}{x^2} \to 0$ då $x \to \infty$

och $\int_1^\infty \frac{\cos x^2}{x^2}$ är konvergent p g a 1a jämfsatsen:

$0 \leq \frac{\cos x^2}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ och $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ konvergerar.

Det betyder att $\int_1^\infty \sin\frac{1}{x^2}\cos x^2\,dx$ konvergerar.

d) $\int_0^1 \frac{\cos x^{-1}}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

$\frac{\cos x^{-1}}{\sqrt{\sin x}}$ byter tecken när $x^{-1} > 1$.

Undersöker $\int_0^1 \left|\frac{\cos x^{-1}}{\sqrt{\sin x}}\right| dx$. Här

$$\left|\frac{\cos x^{-1}}{\sqrt{\sin x}}\right| = \frac{|\cos x^{-1}|}{\sqrt{\sin x}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\frac{\sin x}{x}}}}_{\to 1 \text{ då } x\to 0} \cdot \frac{|\cos x^{-1}|}{\sqrt{x}}$$

och $\int_0^1 \frac{|\cos x^{-1}|}{\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent p g a

1a jämförelsesatsen: $0 \leq \frac{|\cos x^{-1}|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$,

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ är konvergent.

Vi ser att $\int_0^1 \left| \frac{\cos x^{-1}}{\sqrt{\sin x}} \right| dx$ är konvergent $\Rightarrow$ absolutkonvergenssatsen säger att $\int_0^1 \frac{\cos x^{-1}}{\sqrt{\sin x}} dx$ också är konvergent.

Extra

$\boxed{B10}$ 38

b) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

ln x är negativ då $0 \leq x \leq 1$! Var försiktig om du ska använda jämf. satser!

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{t \to \infty} -\ln t \cdot \sqrt{t} = \infty$$

$x = \frac{1}{t}$

så integralen är generaliserad i $x = 0$.

Vi ska använda part. integration:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 x^{-1/2} \ln x \, dx =$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \left(\left[2x^{1/2} \ln x \right]_a^1 - \int_a^1 2x^{1/2} \cdot \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$= 0 - \lim_{a \to 0^+} \left(2\sqrt{a} \ln a + 2 \int_a^1 x^{-1/2} dx \right) =$$

$$= +\lim_{b \to \infty} \frac{2 \ln b}{\sqrt{b}} - 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \text{— konvergent.}$$

$= 0$ konvergent

$\boxed{B\,10}$ $\underline{\underline{38}}$ e) $\int_2^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx$ är generaliserad i $x=\infty$

$$0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sin\frac{1}{x}}{\ln x} \geq 0$$

och jämförelsesatser kan användas. Vi ser att

$$0 \leq \frac{\sin\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}.$$

$\to 1$ då $x \to \infty$.

Det går att beräkna

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \left[\begin{array}{ll} \ln x = t & \ln 2 \leq t \leq \infty \\ \frac{dx}{x} = dt & \end{array}\right] =$$

$$= \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t}$$ – vilket är divergent.

P g a andra jämförelsesatsen,
$\int_2^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx$ är alltså divergent.