Lektion 17

$\boxed{B9}$ 36

a) $y''' - 3y' + 2y = 0.$ $(*)$

Den karakteristiska ekvationen är

$r^3 - 3r + 2 = 0.$

Det är lätt att se att $r_1 = 1$ är en rot $\Rightarrow$

vi delar $r^3 - 3r + 2$ med $r - 1$:

$$
\begin{array}{l}
\quad r^2 + r - 2 \\
\hline
r^3 - 3r + 2 \;\; \big| \; r - 1 \\
-(r^3 - r^2) \\
\hline
\quad r^2 - 3r + 2 \\
\quad -(r^2 - r) \\
\hline
\qquad -2r + 2 \\
\qquad -(-2r + 2) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow r^3 - 3r + 2 = (r^2 + r - 2)(r - 1)$

Ekvationen blir

$(r^2 + r - 2)(r - 1) = 0$

eller

$(r - 1)(r + 2)(r - 1) = 0.$

Rötterna är $\underbrace{r_1 = r_2 = 1}_{\text{dvs rot 1 har multiplicitet 2}}, \; r_3 = -2.$

Sats 9.4 säger att i så fall

$y = (C_1 x + C_2)e^x + C_3 e^{-2x}$

är samtliga lösningar till $(*)$.

Svar $y = (C_1 x + C_2)e^x + C_3 e^{-2x}$

b) $y^{(4)} - 3y'' - 4y = 0 \quad (*)$

Den karakteristiska ekvationen är

$r^4 - 3r^2 - 4 = 0$. Låt $t = r^2 \Rightarrow$

$t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -1,\ t_2 = 4 \Rightarrow$

$r_1 = i,\ r_2 = -i,\ r_3 = 2,\ r_4 = -2.$

Lösningarna till $(*)$ i komplex form är

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x} =$$

$$= C_1(\cos x + i\sin x) + C_2(\cos x - i\sin x) + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x} =$$

$$= \underbrace{(C_1 + C_2)}_{\text{ny konst. } C_1}\cos x + i\underbrace{(C_1 - C_2)}_{\text{ny konst. } C_2}\sin x + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}.$$

Vi kan skriva detta på reell form vilket ger

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}.$$

Svar: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}.$

$\boxed{B9}$ 38

a) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 2 - 4x$

Först löser vi den homogena ekvationen

$y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$. Den karakteristiska ekvationen blir $r^3 + r^2 - 4r - 4 = 0$, $r_1 = -1$

$$\begin{array}{l} \quad r^2-4 \\ \hline r^3+r^2-4r-4 \;\big|\; r+1 \\ -\;(r^3+r^2) \\ \qquad -4r-4 \\ \qquad -4r-4 \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$\Rightarrow (r+1)(r^2-4)=0 \iff$

$(r+1)(r-2)(r+2)=0$

$\Rightarrow r_1=-1,\ r_2=2,\ r_3=-2$

Och $y_h = C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}$.

Vi söker nu y_p. Högerledet är ett polynom av grad 1 $\Rightarrow$ gör ansatsen $y_p = Ax+B$ och sätter detta in i ekvationen

$$-4A-4Ax-4B = 2-4x$$

$\iff$ $4A=4$, $-4A-4B=2$; $A=1$, $4B=-4-2$; $A=1$, $B=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$

Så $y_p = x-\frac{3}{2}$ och $y=y_p+y_h = x-\frac{3}{2}+C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}$

Svar $y = x-\frac{3}{2}+C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}$.

b) $y'''-y''-2y' = 4x+3$.

Löser först den homogena ekvationen

$y'''-y''-2y'=0$. Den karakteristiska ekvationen är $r^3-r^2-2r=0 \iff$

$r(r^2-r-2)=0 \iff$

$r(r+1)(r-2)=0 \Rightarrow$

rötterna är $r_1=0,\ r_2=-1,\ r_3=2$.

Det följer att $y_h = C_1e^{0x}+C_2e^{-x}+C_3e^{2x} \iff$

$$y_h = C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}$$

Söker nu y_p. Högerledet är ett polynom av grad 1, men ansatsen $y_p = Ax + B$ fungerar inte:

$$0 - 0 - 2A = 4x + 3 \text{ är aldrig sant.}$$

Vi tar då $y_p = Ax^2 + Bx + C$ – polynom av grad 2. Eftersom C försvinner ändå vid derivering, kan vi anta $C = 0$ dvs $y_p = Ax^2 + Bx$. Insättning ger

$$0 - 2A - 2(2Ax + B) = 4x + 3$$
$$-4Ax - 2A - 2B = 4x + 3$$

$$\begin{cases} -4A = 4 \\ -2A - 2B = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = \dfrac{-2A-3}{2} = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Vi ser att $y_p = -x^2 - \frac{1}{2}x \Rightarrow$

$$y = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} - x^2 - \frac{x}{2}.$$

Svar: $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} - x^2 - \frac{x}{2}$.

c) $y''' - y = e^x + \sin x$.

En annan lösning finns på s. 9–11

Problemet kan lösas i tre steg.

1) Löser $y''' - y = 0$. Den karakt. ekv. är $r^3 - 1 = 0$. En rot är $r_1 = 1$. Division med $r - 1$ ger

$$\begin{array}{l} \quad r^2 + r + 1 \\ \hline r^3 - 1 \;\big|\; r - 1 \\ -(r^3 - r^2) \\ \hline \quad r^2 - 1 \\ -(r^2 - r) \\ \hline \quad\quad r - 1 \\ \quad -(r - 1) \\ \hline \quad\quad 0 \end{array}$$

$r^2 + r + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$r_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y_h = C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

(vilket man kan få genom att betrakta de komplexa lösningarna

$$y_h = C_1 e^x + C_2 \exp\left[\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot x\right)\right] + C_3 \exp\left[\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} x\right])$$

2) Löser $y''' - y = e^x$ (för att få y_{p_1})

Vi söker y_{p_1} på formen $e^x \cdot z$, där $z = z(x)$.

y_{p_1}''' kan beräknas med hjälp av förskjutningsregel (se boken, s. 411): $\left(D = \frac{d}{dx} \text{ - derivatan}\right)$

$$D^3(e^x \cdot z) = e^x(D+1)^3 z =$$

$$= e^x(D^3 + 3D^2 + 3D + 1) z$$

$$= e^x D^3 z + 3e^x D^2 z + 3e^x D z + z e^x =$$

$$= e^x z''' + 3e^x z'' + 3e^x z' + z e^x .$$

Det går lika bra att derivera 3 gånger om man inte vill memorera formeln!

Alternativt kan man använda formeln

$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

där $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ är binomialkoefficienter.

(om man vill, detta ingår inte i kursen!)

Detta ser ut mycket likt binomialformeln (se boken, s. 44), och man kan använda Pascals triangel. T.ex.

$$(f\cdot g)^{(4)} = f^{(4)} + 4f^{(3)}g' + 6f''g'' + 4f'g^{(3)} + g^{(4)}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Insättning ger:

$$\cancel{e^x} z''' + 3\cancel{e^x} z'' + 3\cancel{e^x} z' + \cancel{e^x z} - \cancel{e^x z} = \cancel{e^x}\, 1$$

$$z''' + 3z'' + 3z' = 1$$

Högerledet är ett polynom av grad 0 ⇒ provar $z_p = C$. Insättning ger $0 = 1$. ⇒ detta fungerar inte. Provar därför $z_p = Ax + B$ eller $z_p = Ax$, då B försvinner ändå vid derivering. Insättning ger

$$0 + 0 + 3A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}, \text{ så } z_p = \frac{1}{3}x$$

Det följer att $\underline{y_{p_1} = \frac{1}{3}xe^x}$.

3) Löser nu $y''' - y = \sin x$ för att få y_{p_2}.

Låt $y_{p_2} = A\cos x + B\sin x \Rightarrow$

$\cos' = -\sin$
$\cos'' = -\cos$
$\cos''' = \sin$

$$\underbrace{A\sin x - B\cos x}_{y_{p_2}'''} - \underbrace{A\cos x - B\sin x}_{y_{p_2}} = \sin x$$

$\sin' = \cos$
$\sin'' = -\sin$
$\sin''' = -\cos$

$$\cos x(-A - B) + \sin x(A - B) = \sin x \Rightarrow$$

$$+\begin{array}{l} -A - B = 0 \\ A - B = 1 \\ \hline -2B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2}. \end{array}$$

Det följer att $\underline{y_{p_2} = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x}$.

Totalt: $y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{x}{3}e^x + \frac{\cos x - \sin x}{2}$

Svar: $y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{x}{3}e^x +$

$+ \dfrac{\cos x - \sin x}{2}$

En annan lösning finns på s. 9–11

$\boxed{P8}$ 48

Lösningen har formen $y = (A + x)e^x + (B + Cx)e^{-x} \Leftrightarrow$

$$y = \underbrace{xe^x}_{y_p} + \underbrace{Ae^x + (B + Cx)e^{-x}}_{y_h}$$

Vi skriver först den homogena delen av ekvationen. Från formeln för y_h är det lött att se att den karakteristiska ekvationen har rötter. $r_1 = 1$, $r_2 = r_3 = -1$

$\Rightarrow$ kan skrivas som $(r-1)(r+1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$(r^2-1)(r+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$r^3 + r^2 - r - 1 = 0$$

Den homogena ekvationen är alltså

$$y''' + y'' - y' - y = 0.$$

Vi söker nu den inhomogena ekvationen $y''' + y'' - y' - y = f(x)$ som har en lösning xe^x.

Insättning ger

$$(xe^x)''' + (xe^x)'' - (xe^x)' - xe^x = f(x) \Rightarrow$$

$$f(x) = -\cancel{xe^x} - (\cancel{e^x} + \cancel{xe^x}) + (\cancel{e^x} + e^x + \cancel{xe^x}) +$$

$$+ (2e^x + e^x + \cancel{xe^x}) = 4e^x \Rightarrow$$

Den sökta ekvationen är $\underline{y''' + y'' - y' - y = 4e^x}$

Extra

$\boxed{B9}$ 44

$x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^2 \quad x > 0$

Låt $t = \ln x$, och $y = z(t)$ d v s $y = z(\ln x)$

I så fall $\frac{dy}{dx} = z'(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = z'(t) \cdot \frac{1}{x}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(z'(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\right)' =$$

$$= z''(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + z'(\ln x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= z''(t) \cdot \frac{1}{x^2} + z'(t) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Insättning i ekvationen ger

$$\underbrace{z''(t) - z'(t)}_{x^2y''} \underbrace{- 2z'(t)}_{-2xy'} + \underbrace{2z(t)}_{2y} = \underbrace{2e^{2t}}_{2x^2}$$

$$z'' - 3z'(t) + 2z(t) = 2e^{2t}$$

$z_h = C_1e^t + C_2e^{2t}$ då den karakt. ekvationen ($r^2 - 3r + 2 = 0$) har rötter 1 och 2.

Låt $z_p = u \cdot e^{2t} \Rightarrow u''e^{2t} + 2u' \cdot 2e^{2t} \cancel{+ 4ue^{2t}} \cancel{- 6ue^{2t}}$
$\cancel{+ 2ue^{2t}} = 2e^{2t} \Rightarrow$

$u'' + 4u' = 2$, och $u = 2t$ passar $\Rightarrow$

$z_p = 2te^{2t}$

Vi ser att $z(t) = 2te^{2t} + C_1e^t + C_2e^{2t}$

Låt nu $t = \ln x \Rightarrow y(x) = z(\ln x) = 2\ln x \cdot x^2 + C_1x + C_2x^2$

<u>Svar</u>: $y = 2x^2\ln x + C_1x + C_2x^2$

$\boxed{B9}$ 38

c) $y''' - y = e^x + \sin x$.

Metod från Föreläsning 8:

1) y_h hittar man på samma sätt, se s. 4.

Vi vet att $r^3 - 1 = 0$ – den karakt. ekvationen har rötter $r_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$, $r_1 = 1$ $\Rightarrow$

$$y_h = C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2 \cos \tfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin \tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

2) Söker y_{P_1} – en partikulär lösning till

$$y''' - y = e^x.$$

Vi kan skriva detta som $\left(D = \frac{d}{dx}\right)$

$$(D-1)\left(D - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(D - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)y = e^x$$

(se den karakteristiska ekv. ovan).

Eftersom högerledet är e^x gör vi ansatsen $y = z \cdot e^x$, där $z = z(x)$. Insättning ger

$$(D-1)\left(D - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(D + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)(ze^x) = e^x \Leftrightarrow$$

$$\cancel{e^x}\left(D+1-1\right)\left(D+1-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(D+1+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)(z) = \cancel{e^x}\,1$$

(se häftet "Förskjutningsregeln").

eller $D\left(D + \frac{3-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(D + \frac{3+\sqrt{3}i}{2}\right)(z) = 1$

$$D\left(\left(D+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2\right)(z)=1$$

$$D\left(D^2+3D+\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\right)(z)=1$$

$$D(D^2+3D+3)(z)=1$$

$$(D^3+3D^2+3D)z=1 \Leftrightarrow z'''+3z''+3z'=1$$

Högerledet är ett polynom av grad 0, men $z=C$ passar inte. $z_{p_1}=Ax$ passar: $3A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{3}$.

Vi ser att $z_{p_1}=\frac{1}{3}x$ och $y_{p_1}=\frac{1}{3}xe^x$

3) Söker y_{p_2} – en partik. lösning till

$$y'''-y=\sin x.$$

Observera att $\sin x=\operatorname{Im}(\cos x+i\sin x)=\operatorname{Im}e^{ix} \Rightarrow$ studerar hjälpekvation

$u'''-u=e^{ix}$. Ansatsen $u=z\cdot e^{ix}$ ger

$$(D-1)\left(D-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(D+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)(ze^{ix})=e^{ix} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{e^{ix}}(D+i-1)\left(D+i-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(D+i+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)(z)=\cancel{e^{ix}}\,1$$

$$(D+i-1)\left(D+\frac{1}{2}+i-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(D+\frac{1}{2}+i+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z)=1$$

$$(D+i-1)\left(\left(D+\frac{1}{2}+i\right)^2+\frac{3}{4}\right)(z)=1$$

$$(D+i-1)\left(D^2+2D\left(\frac{1}{2}+i\right)+\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{1}+i+\cancel{\frac{3}{4}}\right)(z)=1$$

$$(D+i-1)(D^2+(1+2i)D+i)(z)=1$$

$$\left[D^3+(i-1+1+2i)D^2+\big(\underbrace{i+(i-1)(1+2i)}_{i+i-1*2-2i}\big)D+i(i-1)\right](z)=1$$

$$(D^3+3iD^2-3D+(-1-i))(z)=1$$

$$z'''+3iz''-3z'+(-1-i)z=1$$

Vi kan ta $z_p = C \Rightarrow (-1-i)C = 1 \Rightarrow$

$$C = -\frac{1}{1+i} = -\frac{1-i}{1+1} = -\frac{1-i}{2} = \frac{-1+i}{2}$$

$$\Rightarrow u = \left(\frac{-1+i}{2}\right)(\cos x + i\sin x).$$

$$y_{p_2} = \operatorname{Im} u = \frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2}.$$

Svar! $y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{x}{3}e^x + \frac{\cos x - \sin x}{2}.$