Lektion 15

$\boxed{P8}$ **34**

a) $y'' + 2y' + 5y = 0$ är en homogen diffekvation med den karakteristiska ekvationen

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \iff r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

Den allmäna lösningen är $y = e^{-1\cdot x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$

Använder nu $y(0) = 1$ och $y'(0) = -2$ för att hitta A och B.

$y(0) = 1$ ger $1 = A\cos 0 + B\sin 0 \Rightarrow \underline{A = 1}$ och

$$y(x) = e^{-x}(\cos 2x + B\sin 2x).$$

Observera att $y'(x) = -e^{-x}(\cos 2x + B\sin 2x) +$
$+ e^{-x}(-2\sin 2x + 2B\cos 2x).$

$y'(0) = -2$ ger

$$-2 = -(\cos 0 + \underbrace{\cancel{B\sin 0}}_{=0}) + (\underbrace{\cancel{-2\sin 0}}_{=0} + 2B) \iff$$

$$-2 = -1 + 2B \Rightarrow \underline{B = -\frac{1}{2}}$$

<u>Svar</u> $y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$ och denna lösning som satisfierar $y(0) = 1$ och $y'(0) = -2$ är

$$y = e^{-x}\left(\cos 2x - \tfrac{1}{2}\sin 2x\right).$$

b) $y'' + 2y = 0$ är en homogen ekvation med den karakteristiska ekvationen

$$r^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -2 \Leftrightarrow r_{1,2} = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}\, i \Rightarrow$$

$$y = e^{0\cdot x}\left(A\cos\sqrt{2}\,x + B\sin\sqrt{2}\,x\right) \Leftrightarrow$$

$$y = A\cos\sqrt{2}\,x + B\sin\sqrt{2}\,x.$$

$y(0) = 1$ ger $1 = A\underbrace{\cos 0}_{=1} + \cancel{B\underbrace{\sin 0}_{=0}} \Rightarrow A = 1,$

så vi kan skriva $y = \cos\sqrt{2}\,x + B\sin\sqrt{2}\,x.$

Observera att $y' = -\sqrt{2}\sin\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}B\cos\sqrt{2}\,x.$

$y'(0) = -2$ ger $-2 = \cancel{-\sqrt{2}\underbrace{\sin 0}_{=0}} + \sqrt{2}B\underbrace{\cos 0}_{=1} \Rightarrow$

$$B = -\sqrt{2}$$

Svar $y = A\cos\sqrt{2}\,x + B\sin\sqrt{2}\,x$ och denna lösning som satisfierar $y(0) = 1$ och $y'(0) = -2$ är

$$y = \cos\sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}\,x.$$

$\boxed{B9}$ 24 Vi söker en differentialekvation

$$y''(x) + a y'(x) + b y(x) = p(x)$$

där a, b = konst.

Vi vet att $y = 5e^{-4x}$ och $y = -2e^{3x}$ är lösningar till den homogena

ekvationen $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$
vilket ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} (5e^{-4x})'' + a(5e^{-4x})' + b(5e^{-4x}) = 0 \\ (-2e^{3x})'' + a(-2e^{3x})' + b(-2e^{3x}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 80\cancel{e^{-4x}} - 20a\cancel{e^{-4x}} + 5b\cancel{e^{-4x}} = 0 & \Big| \cdot e^{4x} \\ -18\cancel{e^{3x}} - 6a\cancel{e^{3x}} - 2b\cancel{e^{3x}} = 0 & \Big| \cdot e^{-3x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$+\begin{cases} 16 - 4a + b = 0 \\ -9 - 3a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -9 - 3a = -12 \end{cases}$$

$$7 - 7a = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$\boxed{\begin{matrix} a = 1 \\ b = -12 \end{matrix}}$$

Vi vet nu att ekvationen ser ut så här

$$y'' + y' - 12y = p(x)$$

så det återstår att hitta $p(x)$. Vi vet att $y = x^3 - x$ är en lösning $\Rightarrow$

$$(x^3 - x)'' + (x^3 - x)' - 12(x^3 - x) = p(x) \Leftrightarrow$$

$$p(x) = 6x + 3x^2 - 1 - 12x^3 + 12x \Leftrightarrow$$

$$\underline{p(x) = -12x^3 + 3x^2 + 18x - 1} \Rightarrow$$

Den sökta ekvationen är

$$\underline{y'' + y' - 12y = -12x^3 + 3x^2 + 18x - 1.}$$

$\boxed{B9}$ $\underline{\underline{27}}$ $y'' + y' - 6y = e^{3x}$.

Söker först y_h, den allmäna lösningen av

$y'' + y' - 6y = 0$.

Den karakteristiska ekvationen är

$r^2 + r - 6 = 0$ med rötter $r_1 = 2$ och $r_2 = -3 \Rightarrow$

$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$

För att hitta en partikulär lösning till ekvationen $y'' + y' - 6y = e^{3x}$ gör vi ansats

$y = z(x) e^{3x}$, där $z(x)$ är en obestämd funktion.

I så fall $y'(x) = z'(x) e^{3x} + 3z(x) e^{3x}$ och

$y''(x) = z''(x) e^{3x} + 3z'(x) e^{3x} + 3z'(x) e^{3x} + 9z(x) e^{3x}$.

Vi sätter detta in i ekvationen!

$z''(x) \cancel{e^{3x}} + 6z'(x)\cancel{e^{3x}} + 9z(x)\cancel{e^{3x}} + z'(x)\cancel{e^{3x}} + 3z(x)\cancel{e^{3x}} - 6z(x)\cancel{e^{3x}} = \cancel{e^{3x}}\ 1$

$z'' + 7z'(x) + 6z(x) = 1$

Vi behöver bara en lösning till denna ekvation, och det är klart att $z(x) = \frac{1}{6}$ passar.

Det betyder att $y_p = \frac{1}{6} e^{3x} \Rightarrow$

$$y = y_p + y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{6} e^{3x}$$

Eftersom $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x)$ är ändligt $\Rightarrow$ $C_2 = 0$, så

$$y = C_1 e^{2x} + \frac{1}{6} e^{3x}.$$

Vi hittar C_1 från villkoret $y(0) = 2 \Leftrightarrow$

$$2 = C_1 + \frac{1}{6} \Rightarrow C_1 = \frac{11}{6}.$$

Svar: $y = \frac{11}{6} e^{2x} + \frac{1}{6} e^{3x}.$

i den här uppgiften

Anmärkning: det är ganska uppenbart att man kan söka y_p på formen $y_p = Ce^{3x}$. Då slipper man göra ansatsen $y_p = z(x) e^{3x}$.

C = konst

$\boxed{39}$ 28

a) Problemet kan delas i tre steg!

1) Lös den homogena ekvationen

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Från den karakteristiska ekvationen

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1, \; r_2 = 2$$

följer att $y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}.$

OBS! Högerledet är $e^x + 4x \Rightarrow$ man hittar y_p som en summa $y_{p_1} + y_{p_2}$ där y_{p_1} löser $y'' - 3y' + 2y = e^x$, och y_{p_2} löser $y'' - 3y' + 2y = 4x$.

2) Hitta y_{p_1} - en partikulär lösning för $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

Vi gör ansats $y = z(x)e^x$. Vi beräknar

$$y'(x) = z'(x)e^x + z(x)e^x \quad \text{och}$$
$$y''(x) = z''(x)e^x + 2z'(x)e^x + z(x)e^x \Rightarrow$$

ekvationen blir

$$z''\cancel{e^x} + 2z'(x)\cancel{e^x} + \cancel{z(x)e^x} - 3z'(x)\cancel{e^x} - \cancel{3z(x)e^x} + \cancel{2z(x)e^x} = \cancel{e^x}\,1$$

$$\Rightarrow z'' - z' = 1$$

Högerledet är polynom av grad 0, men $z = \overset{\text{konst}}{C}$ kan aldrig vara en partikulär lösning. Vi kan därför testa ett polynom av grad 1 $\Rightarrow$ $z = Ax + B$ eller bara $z = Ax$ (då B försvinner ändå vid derivering).

Sätter in $z = Ax$ i $z'' - z' = 1 \Rightarrow$

$$-A = 1 \Rightarrow A = -1, \text{ så } z = -x.$$

Det följer att $y_{p_1} = -xe^x$.

3) Hitta y_{p_2} - en partikulär lösning för

$$y'' - 3y' + 2y = 4x$$

Högerledet är $4x \Rightarrow y_{p_2}$ kan sökas som ett polynom av grad 1 dvs $y_{p_2} = Ax + B$.

Insättning i ekvationen ger

$$0 - 3A + 2(Ax+B) = 4x \quad \Rightarrow$$

$$2Ax + (2B - 3A) = 4x \text{ , så ,} \quad \begin{array}{l} 2A = 4 \Rightarrow \underline{A = 2} \\ 2B - 3A = 0 \Rightarrow \\ \underline{B = \frac{3A}{2} = 3} \end{array}$$

Vi ser att $y_{p_2} = 2x + 3$

Slutligen, $y = y_h + y_p = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} \Rightarrow$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - xe^x + 2x + 3$$

Svar: $y = (C_1 - x)e^x + C_2 e^{2x} + 2x + 3$.

b) Problemet delas också i tre steg.

1) Lös $y'' + 2y' + y = 0$

Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (r+1)^2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = -1$, så

$$y_h = (C_1 x + C_2)e^{-x}$$

2) Hitta en lösning y_{p_1} till $y'' + 2y' + y = e^x$

Här kan vi faktiskt slippa göra ansats $y = z(x)e^{x}$.
Om vi sätter $y(x) = Ce^{x}$ in i ekvationen så

$$C\cancel{e^{x}} + 2C\cancel{e^{x}} + C\cancel{e^{x}} = \cancel{e^{x}} \quad \text{ger} \quad 4C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{4}$$

fungerar.

Alltså, $y_{p_1} = \frac{1}{4}e^{x}$.

3) Hitta en lösning y_{p_2} till $y'' + 2y' + y = -e^{-x}$.

/ $y(x) = Ce^{-x}$ fungerar inte! $\underbrace{+Ce^{-x} - 2Ce^{-x} + Ce^{-x}}_{=0} \neq -e^{-x}$ /

Vi gör ansats $y(x) = z(x)e^{-x}$

$$\Rightarrow \quad y'(x) = z'(x)e^{-x} - z(x)e^{-x},$$
$$y''(x) = z''(x)e^{-x} - 2z'(x)e^{-x} + z(x)e^{-x}$$

Insättning i ekvationen ger

$$z''e^{-x} - \cancel{2z'e^{-x}} + \cancel{ze^{-x}} + \cancel{2z'e^{-x}} - \cancel{2ze^{-x}} + \cancel{ze^{-x}} = -e^{-x}$$

$\Rightarrow \quad z'' = -1$. Tex $z(x) = -\frac{x^2}{2}$ fungerar.

Alltså, $y_{p_2} = -\frac{x^2}{2}e^{-x}$.

Slutligen, $y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2}$ vilket ger

$$y = (C_1x + C_2)e^{-x} + \frac{1}{4}e^{x} - \frac{x^2}{2}e^{-x}$$

Svar: $y = e^{-x}\left(C_1x + C_2 - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{e^{x}}{4}$.

Extra

$\boxed{P8}$ **56** a) Antag att vi vet en lösning $y = v(x)$ till $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, d v s
$v'' + a(x)v' + b(x)v(x) = 0$. $(*)$

Vi gör nu ansatsen $y = v(x)z$ för att hitta en lösning till ekvationen

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x).$$

Insättning ger

$$v''z + 2v'z' + vz'' + a(x)(v'z + vz') + b(x)v\cdot z = f(x)$$

$$\underbrace{\cancel{z(v'' + a(x)v' + b(x)v)}}_{=0 \text{ pga } (*)} + vz'' + z'(2v' + a(x)\cdot v) = f(x)$$

Vi ser att $z = z(x)$ är en lösning till ekvationen

$$vz'' + z'(2v' + a(x)\cdot v) = f(x).$$

Man kan göra substitutionen $u = z'$, vilket leder till en linjär ekvation av ordning 1:

$$vu' + (2v' + a(x)\cdot v)u = f(x).$$

Kan lösas, om man delar med $v(x) \neq 0$ och beräknar den integrerande faktorn.

b) Vi använder oss av uppgift P8.1 som säger att $v(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x$ är en lösning till Bessels ekvation, d v s

$$v'' + \frac{1}{x} v' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) v = 0 \qquad (*)$$

Insättning $y(x) = v(x)\, z(x)$ i ekvationen

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0 \qquad \text{ger}$$

$$\underline{\underline{v''z}} + \underset{\sim}{2v'z'} + vz'' + \frac{1}{x}\left(\underline{\underline{v'z}} + \underset{\sim}{vz'}\right) +$$

$$+ \underline{\underline{\left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) vz}} = 0$$

$$\underbrace{\cancel{z\left(v'' + \frac{1}{x} v' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) v\right)}}_{=0 \text{ pga } (*)} + vz'' + z'\left(2v' + \frac{v}{x}\right) = 0$$

För $v(x) \neq 0$ vi har $z'' + z'\left(\frac{2v'}{v} + \frac{1}{x}\right) = 0$.

Vi beräknar $v'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{x}} \cos x \Rightarrow$

$\frac{v'}{v} = -\frac{1}{2x} + \text{cotan } x \Rightarrow$ ekvationen blir

$$z'' + z'\left(-\cancel{\frac{1}{x}} + 2\,\text{cotan } x + \cancel{\frac{1}{x}}\right) = 0.$$

Låt $u = z' \Rightarrow u' + 2u \,\text{cotan } x = 0 \Rightarrow$

$\frac{du}{dx} = -2u \,\text{cotan } x \Rightarrow$ för $u \neq 0$

testa!

$\frac{du}{u} = -\frac{2\cos x \, dx}{\sin x} \Rightarrow$

$$\ln|u| = -2\ln|\sin x| + C$$

$$|u| = (\sin x)^{-2} \cdot \underbrace{e^{C}}_{\text{konst}>0} \Rightarrow u = \underbrace{\pm e^{C}}_{\text{konst}\neq 0} \cdot \frac{1}{(\sin x)^2} .$$

Observera att $u = 0$ också är en lösning $\Rightarrow$

$$u = \frac{C_1}{(\sin x)^2} \Leftrightarrow z' = \frac{C_1}{\sin^2 x} \Rightarrow z(x) = C_1 \operatorname{cotan} x + C_2 .$$

Då vet vi att $y(x) = v(x)\, z(x) \Leftrightarrow$

$$y(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(C_1 \frac{\cos x}{\sin x} + C_2 \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x \right)$$

Svar: $y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x \right)$.