Lektion 14

$\boxed{B9}$ **20**

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$

Den karakteristiska ekvationen är

$r^2 - 3r + 2 = 0$, med lösningarna

$r_1 = 1$, $r_2 = 2$ $\Rightarrow$ samtliga lösningar

är $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

b) $y'' + 4y = 0$

Den karakteristiska ekvationen är

$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r^2 = -4 \Rightarrow r_{1,2} = \pm\sqrt{-1 \cdot 4} = \pm 2i$

$r_{1,2} = 0 \pm 2i$ ger oss

$$y = e^{0 \cdot x}(A\cos 2x + B\sin 2x) \Leftrightarrow$$

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

c) $y'' + 2y' + y = 0$

Den karakteristiska ekvationen är

$r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -1$

$$\Rightarrow \quad y = (C_1 x + C_2)e^{-x}$$

d) $y'' + 6y' + 25y = 0$

Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + 6r + 25 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-1 \cdot 64}}{2} = \frac{-6 \pm 8i}{2}$$

$$r_{1,2} = -3 \pm 4i \Rightarrow$$

Samtliga lösningar är

$$y = e^{-3x}(A \cdot \cos 4x + B \cdot \sin 4x).$$

21

Vi bestämmer först samtliga lösningar till ekvationen

$$y'' - y' - 6y = 0 :$$

den karakteristiska ekvationen är $r^2 - r - 6 = 0$ med lösningarna $r_1 = -2$, $r_2 = 3$.

$$\Rightarrow y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}.$$

Om $C_2 \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} (C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}) =$

$$= \lim_{x \to \infty} e^{3x}(C_2 + C_1 e^{-5x}) = \infty$$

Vilket betyder att C_2 måste vara 0.

Om $C_2 = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} C_1 \underbrace{e^{-2x}}_{\to 0} = 0$ oavsett värdet på C_1.

Svar: $y = C e^{-2x}$, $C = \text{konst.}$

23

a) $y'' - y = x^2$ är icke-homogen $\Rightarrow$

lösningen $y = y_h + y_c$, där

y_h är den allmäna lösningen till $y'' - y = 0$

y_p är någon lösning till $y'' - y = x^2$.

Söker y_h: $y'' - y = 0$ har den karakt. ekvationen $r^2 - 1 = 0$ med rötter $r_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow$

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}.$$

Söker y_p: eftersom högerledet är ett polynom av grad 2, söker y_p på formen

$$y_p = Ax^2 + Bx + C,$$

dvs y_p är ett polynom av grad 2 med odefinierade koefficienter.

För att bestämma A, B, C, sätter vi y_p i ekvationen:

$$(Ax^2 + Bx + C)'' - (Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

$$2A - Ax^2 - Bx - C = x^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -A = 1 \\ B = 0 \\ 2A - C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \\ C = -2 \end{cases} \Rightarrow y_p = -x^2 - 2$$

Svar: $y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - x^2 - 2.$

3

b) $y'' + 2y' - 3y = 1 - 6x$

Söker y_h – den allmäna lösningen till

$y'' + 2y' - 3y = 0.$

Den karakt. ekvationen är $r^2 + 2r - 3 = 0$, med rötterna $r_1 = 1$, $r_2 = -3 \Rightarrow$

$$\underline{y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x}.}$$

Eftersom högerledet är ett polynom av grad 1 $\Rightarrow$ söker y_p på formen

$y_p = Ax + B$, dvs y_p också är ett polynom av grad 1.

Sätter y_p in i ekvationen!

$$\underbrace{(Ax+B)''}_{=0} + 2(Ax+B)' - 3(Ax+B) = 1 - 6x$$

$$2A - 3Ax - 3B = 1 - 6x \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} -3A &= -6 \\ 2A - 3B &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 2 \\ B &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{y_p = 2x + 1.}$$

Slutligen, $y = y_h + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x} + 2x + 1.$

c) $y'' - 3y' = x^2$

Söker y_h - den allmäna lösningen till

$y'' - 3y' = 0$.

Den karakt. ekvationen är $r^2 - 3r = 0 \Rightarrow$

$r_1 = 3,\ r_2 = 0 \Rightarrow y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{0 \cdot x} \Rightarrow$

$$\underline{y_h = C_1 e^{3x} + C_2}$$

Söker y_p i formen $y_p = Ax^2 + Bx + C$, men det går inte! $(y_p)'' - 3y_p'$ är ett polynom av grad 1, medan högerledet $= x^2$ är ett polynom av grad 2!

Därför provar vi $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, d vs y_p är ett polynom av grad 3.

$y_p'' - 3y_p' = x^2$ blir

$6Ax + 2B - 3(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2$

$-9Ax^2 + (6A - 6B)x + (2B - 3C) = x^2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} -9A = 1 \\ 6A - 6B = 0 \\ 2B - 3C = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{9}, \quad B = A = -\frac{1}{9}, \quad C = \frac{2}{3}B = -\frac{2}{27}$$

D förblir obestämd $\Rightarrow$ kan ta $D = 0$

$\Rightarrow y_p = -\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x$

$y = y_h + y_p$ kan skrivas som

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x$$

då ~~[illegible]~~

<u>Svar</u> $y = C_1 e^{3x} + C_2 - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x.$

d) $4y'' - 12y' + 9y = 9(x^2 - x).$

Söker y_h – den allmäna lösningen till

$4y'' - 12y' + 9y = 0.$

Den karakteristiska ekvationen är

$$4r^2 - 12r + 9 = 0 \Leftrightarrow (2r-3)^2 = 0 \Leftrightarrow r_{1,2} = \frac{3}{2}.$$

Det följer att $y_h = (C_1 x + C_2)e^{\frac{3}{2}x}.$

Söker y_p i formen $y_p = Ax^2 + Bx + C$:

$$4y_p'' - 12y_p' + 9y_p = 9(x^2 - x) \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot 2A - 12(\underline{2Ax} + B) + 9(Ax^2 + \underline{Bx} + C) = 9(x^2 - x)$$

$$9A \cdot x^2 + (-24A + 9B)x + (8A - 12B + 9C) = 9x^2 - 9x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9A = 9 \\ -24A + 9B = -9 \\ 8A - 12B + 9C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ 24 = 9B + 9 \\ 8 = 12B - 9C \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \\ C = \frac{8 - \cancel{12}^{4} \cdot \frac{5}{\cancel{3}}}{-9} = -\frac{\cancel{12}^{4}}{\cancel{9}3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p = x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$y = y_p + y_h = (C_1x + C_2)e^{\frac{3x}{2}} + x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}.$$

<u>Svar</u> $y = (C_1x + C_2)e^{\frac{3x}{2}} + x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}.$

<u>Extra</u>

$\boxed{B9}$ <u>22</u>

$$y''(x) + k^2y(x) = 0 \quad y(0) = 0, \; y(1) = 0. \quad \boxed{k > 0}$$

Detta är en homogen ekvation, och den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + k^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -k^2 \Leftrightarrow r_{1,2} = \pm\sqrt{-1\cdot k^2} = \pm ik$$

$$\Rightarrow y = A\cos kx + B\sin kx.$$

Vi använder nu vilkoren $y(0)=0$ och $y(1)=0$ för att bestämma A och B. $y(0)=0$ ger

$$0 = A\underbrace{\cos(k\cdot 0)}_{=1} + B\underbrace{\sin(k\cdot 0)}_{=0} \Leftrightarrow 0 = A \Rightarrow$$

$y = B\sin kx.$ $y(1) = 0$ ger

$0 = B\sin k \Leftrightarrow$ antingen $B=0$ eller $\sin k = 0$. Situationen $B=0$ är ointressant då $y=0$ är en trivial lösning. $\sin k = 0$ leder däremot till $k = \pi n$, $n = 1, 2, 3 \ldots$, vilket ger $y = B\sin(\pi n x)$, $n = 1, 2, 3\ldots$,

B = valfri konstant.

<u>Svar</u>: $k = \pi n$ ger icke-triviala lösningar $y = B\sin\pi n x$.