Lektion 10

Maclaurinutveckling med restermen i Lagranges form:

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{P_n(x) \text{ – Maclaurinpolynomet av ordning } n}$$

$$+ \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}}_{r_n(x) \text{ – resttermen på Lagranges form}}, \quad \text{för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } x.$$

Detta är ett noggrannare uttryck för resttermen $O(x^{n+1})$!!

Exempel

$$\cos x = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}_{P_{2n}(x)} + \underbrace{\frac{\cos^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2}}_{r_{2n}(x)}$$

där ξ är mellan 0 och x

$\boxed{P7}$ 17

a) Vill approximera $\cos\frac{1}{10}$ med felet högst 10^{-2}. Från Maclaurinutvecklingen ovan vet vi att

$$\cos\frac{1}{10} = \underbrace{1 - \frac{1}{2!\,10^2} + \frac{1}{4!\,10^4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!\,10^{2n}}}_{P_{2n}(\frac{1}{10})} +$$

$$+ \underbrace{\frac{\cos^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!\,10^{2n+2}}}_{r_{2n}(\frac{1}{10})}$$

$p_{2n}\left(\frac{1}{10}\right)$ kan man beräkna utan problem för vilket n som helst, och $\cos\frac{1}{10} \approx p_{2n}\left(\frac{1}{10}\right)$,

där felet ges av $r_{2n}\left(\frac{1}{10}\right) = \cos\frac{1}{10} - p_{2n}\left(\frac{1}{10}\right)$.

Vi behöver alltså hitta n sådan att

$\left|r_{2n}\left(\frac{1}{10}\right)\right| < 10^{-2}$.

Vi testar alla $n = 0, 1, 2\ldots$ tills att vi hittar det rätta värdet.

$n=0$: $\quad r_0\left(\frac{1}{10}\right) = \dfrac{\cos''(\xi)}{2!\,10^2} = \dfrac{-\cos\xi}{200}$

satisfierar $\left|r_0\left(\frac{1}{10}\right)\right| < \dfrac{|\cos\xi|}{200} < \dfrac{1}{200}$

$$\Rightarrow \left|r_0\left(\frac{1}{10}\right)\right| < \frac{1}{10}.$$

Det betyder att $p_0\left(\frac{1}{10}\right) = \left(\begin{matrix}\text{utvecklingen}\\ \text{av ordning } 0\end{matrix}\right) = 1$

fungerar bra som ett approximativt värde till $\cos\frac{1}{10}$, och felet satisfierar

$$\left|\cos\frac{1}{10} - p_0\left(\frac{1}{10}\right)\right| = \left|r_0\left(\frac{1}{10}\right)\right| < \frac{1}{200}$$

<u>Svar</u>: $\cos\frac{1}{10} \approx 1$ med fel $\leq \frac{1}{200} < 10^{-2}$.

b) $$\cos 1 = \underbrace{1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n!}}_{p_{2n}(1)} + \underbrace{\frac{\cos^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}}_{r_{2n}(1)}$$

där $0 \leq \xi \leq 1$.

Söker n sådan att

$|r_{2n}(1)| < \frac{1}{100}$. Testar:

$n=0$: $r_0(1) = \frac{\cos''(\xi)}{2!} = \frac{-\cos\xi}{2}$ och vi kan endast säga att $|r_0(1)| < \frac{|-\cos\xi|}{2} < \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{ej} < \frac{1}{100}}$ – räcker inte.

$n=1$: $r_2(1) = \frac{\cos^{(4)}(\xi)}{4!} = \frac{\cos(\xi)}{24}$ satisfierar

$|r_2(1)| < \frac{|\cos\xi|}{24} < \underbrace{\frac{1}{24}}_{\text{ej} < 10^{-2}}$ – räcker inte.

$n=2$: $r_4(1) = \frac{\cos^{(6)}(\xi)}{6!} = \frac{-\cos\xi}{720}$ satisfierar

$|r_4(1)| < \frac{|-\cos\xi|}{720} < \frac{1}{720} < \frac{1}{100}$ – räcker!

Det betyder att $\cos 1 \approx P_4(1) \underset{n=2}{=} 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} =$

$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{24-12+1}{24}$

$= \frac{13}{24}$

med felet $|r_4(1)| < \frac{1}{720} < \frac{1}{100}$.

Svar: $\cos 1 \approx 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} = \frac{13}{24}$

med fel $\leq \frac{1}{720} < \frac{1}{100}$.

18 a) $\sin x$ är en udd funktion $\Rightarrow$ endast udda potenser i utvecklingen.

Vi vet att $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$,

där $O(x^5)$ kan skrivas på Lagranges form som:

$$\frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{\cos \xi}{120} x^5$$

där ξ är mellan 0 och x.

$$\Rightarrow \sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{\substack{\text{maclaurin-}\\ \text{polynomet}\\ \text{av ordning 4}}} + \underbrace{\frac{\cos \xi}{120} \cdot x^5}_{\substack{\text{resttermen}\\ \text{av ordning 5}\\ \text{i Lagranges}\\ \text{form.}}}, \quad \xi \text{ melan } 0 \text{ och } x.$$

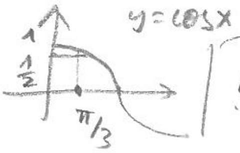
OBS! $\cos \xi$ där ξ är melan 0 och x kan alternativt skrivas som $\cos \theta x$ där $0 \leq \theta \leq 1$

b) Från utvecklingen i a) följer att

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \right| = \left| \frac{\cos \xi}{120} \cdot x^5 \right| \leq \frac{|x|^5}{120}$$

för alla x, då $|\cos \xi| \leq 1$ för alla ξ

c) Vi vet att $\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) = \frac{\cos \xi}{120} \cdot x^5$,
där ξ är melan 0 & x. Om vi antar $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow$
$\xi \in [0; \frac{\pi}{3}] \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \cos \xi \leq 1$.

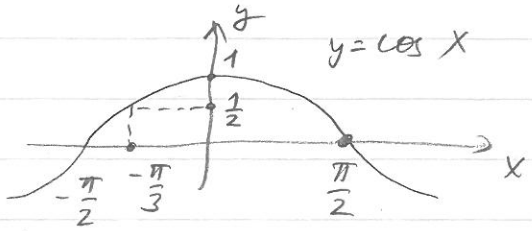


Det följer att $\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{120} \le \frac{\cos\xi}{120}\cdot x^5 \le 1\cdot\frac{x^5}{120}$ (då $x^5 \ge 0$!) $\Rightarrow$

$$\frac{1}{240}\cdot x^5 \le \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \le \frac{1}{120}\cdot x^5$$

d) När $-\frac{\pi}{3} \le x \le 0 \Rightarrow \xi \in [-\frac{\pi}{3}; 0] \Rightarrow$

$\frac{1}{2} \le \cos\xi \le 1$ igen.



Men observera att $x^5 \le 0$ nu $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{120} \ge \cos\xi\cdot\frac{x^5}{120} \ge 1\cdot\frac{x^5}{120}$$ (tecken i olikheten har ändrats!)

$$\Rightarrow \frac{x^5}{120} \le \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \le \frac{x^5}{240}$$

e) Vi delar vår utveckling med Lagranges restterm på x:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{\cos\xi}{120}\cdot x^4$$ $x \ne 0$, $0 < \xi \le x$.

$$\Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x} - 1 + \frac{x^2}{6}\right| = \left|\frac{\cos\xi}{120}\right|\cdot|x|^4 \le \frac{x^4}{120}$$

för alla $x \ne 0$.

f) För att $f(x)$ ska bli kontinuerlig i $x=0$ $f(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ måste vara uppfyld

Från e) vet vi att

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h} =$$

$$= \left[\frac{\sin h}{h} = 1 - \frac{h^2}{6} + \frac{\cos \xi}{120} h^4 \quad 0 < \xi \le h \right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{h^2}{6} + \frac{\cos \xi}{120} h^4}{h} = \lim_{h\to 0} \Big(\underbrace{-\frac{h}{6}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\cos \xi}{120}}_{\text{begr.}} \cdot \underbrace{h^3}_{\to 0} \Big) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(0) = 0}$$

19 Vi vet att $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + O(t^{n+1})$, eller (med resttermen i Lagranges form)

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \frac{(e^t)^{(n+1)}\big|_{t=\xi}}{(n+1)!} \cdot t^{n+1} =$$

$$= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} t^{n+1}$$

där ξ är mellan 0 och t.

Låt $t = -x^2 \Rightarrow$

$$e^{-x^2} = \overbrace{1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}}^{p_{2n}(x)} + \overbrace{\frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{2n+2}}^{r_{2n}(x)}$$

där ξ är mellan 0 och $-x^2$

Alltså, om $-1 \le x \le 1$, så

$$-1 \le \xi \le 0.$$

Vi söker nu n sådan att $|r_{2n}(x)| < \frac{1}{100}$ för $-1 \le x \le 1$.

Notera att $\left| r_{2n}(x) \right| = \left| \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{2n+2} \right| \leq$

$$\leq \frac{|e^{\xi}|\,|x|^{2n+2}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)!}, \text{ så}$$

$\left| r_{2n}(x) \right| < \frac{1}{100}$ kommer att vara uppfylld om

$\frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{100}$. Testar $n = 0, 1, 2 \ldots$:

$\underline{n=0}$: $1 < \frac{1}{100}$ – ej sant

$\underline{n=1}$: $\frac{1}{2!} < \frac{1}{100}$ – ej sant

$\underline{n=2}$: $\frac{1}{3!} < \frac{1}{100}$ – ej sant

$\underline{n=3}$: $\frac{1}{4!} < \frac{1}{100}$ – ej sant

$\underline{n=4}$: $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120} < \frac{1}{100}$ – sant !

Det betyder att

$$e^{-x^2} = \underbrace{1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24}}_{p_8(x)} + \underbrace{\frac{e^{\xi}}{120} x^{10}}_{r_8(x)}$$

där $-1 \leq \xi \leq 0$

och $\left| r_8(x) \right| < \frac{1}{100}$.

$\underline{\text{Svar}}$ $1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24}$

20 a) Vi vet att

$$(1+t)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}t + \binom{-\frac{1}{2}}{2}t^2 + O(t^3),$$

där $\binom{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2} = +\frac{3}{8}$,

och $O(t^3)$ kan skrivas på Lagranges form:

$$\frac{\left((1+t)^{-1/2}\right)'''\Big|_{t=\xi}}{3!}\cdot t^3 = \left[\begin{array}{l} \left((1+t)^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{3}{2}} \\ \left((1+t)^{-1/2}\right)'' = +\frac{3}{4}(1+t)^{-5/2} \\ \left((1+t)^{-1/2}\right)''' = -\frac{15}{8}(1+t)^{-\frac{7}{2}} \end{array}\right]$$

$$= \frac{-\frac{\cancel{15}^{\,5}}{8}(1+\xi)^{-\frac{7}{2}}}{\cancel{6}\,2}t^3 = \underline{\frac{-5}{16}(1+\xi)^{-7/2}t^3}$$

ξ är mellan 0 och $t \Rightarrow$
$\xi = \theta t$ där $0 \le \theta \le 1$.

Alltså,

$$\underline{(1+t)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 - \frac{5}{16(1+\theta t)^{7/2}}t^3}$$

där $0 \le \theta \le 1$.

b) Det följer från a) att

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5x^6}{16(1-\theta x^2)^{7/2}} \Rightarrow$$

$$\pi = 6\int_0^{1/2}\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5x^6}{16(1-\theta x^2)^{7/2}}\right)dx$$

$$= 6\left[x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40}\right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} + \frac{30}{16}\int_0^{1/2}\frac{x^6\,dx}{(1-\theta x^2)^{7/2}} =$$

8

$$= \cancel{6}^{3}\left(\frac{1}{\cancel{2}} + \frac{1}{6\cdot 8\cdot 4} + \frac{3}{\underset{20}{\cancel{40}}\cdot 32}\right) + \frac{15}{8}\int_0^{1/2} \frac{x^6\,dx}{(1-\theta x^2)^{7/2}}$$

$$\Rightarrow \pi \approx 3 + \frac{1}{8} + \frac{9}{640} = \frac{\overset{1920}{3\cdot 640} + 80 + 9}{640} = \frac{2009}{640}$$

Felet är $\frac{15}{8}\int_0^{1/2} \frac{x^6\,dx}{(1-\theta x^2)^{7/2}}$, $0 \le \theta \le 1$.

c) $$\left|\frac{15}{8}\int_0^{1/2} \frac{x^6\,dx}{(1-\theta x^2)^{7/2}}\right| \le \left[\text{Nämnarens minsta värdet antas för } \theta = 1,\ x = \frac{1}{2}\right] \le$$

$$\le \frac{15}{8}\cdot\int_0^{1/2} \frac{x^6\,dx}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^{7/2}} = \frac{15}{8}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{7/2}\cdot\int_0^{1/2} x^6\,dx =$$

$$= \frac{15}{8}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{7}\cdot\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^{1/2} =$$

$$= \frac{15}{8}\cdot\frac{\cancel{2^7}}{(\sqrt{3})^6\cdot\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{7\cdot \cancel{2^7}} = \frac{15}{8\cdot 3^3\cdot\sqrt{3}\cdot 7} =$$

$$= \frac{5}{72\cdot\sqrt{3}\cdot 7} = \frac{5\sqrt{3}}{1512} \overset{?}{<} 10^{-2} \text{ - sant?}$$

Ja, eftersom $500\underbrace{\sqrt{3}}_{\approx 1{,}7} < 1512$ är uppenbarligen sant.

$640 \times 3 = 1920$

72×21: 72, 144, 1512

$653 \times 3 = 1959$