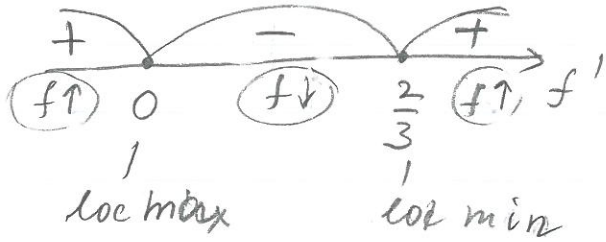
Lektion 12

$\boxed{P4}$ **38** a) $x^3 = x^2 - 5$ – antal rötter?

Låt $f(x) = x^3 - x^2$, vi vill veta antalet rötter till $f(x) = -5$.

Studerar f m h a derivatan:

$f'(x) = 3x^2 - 2x = 3x\left(x - \frac{2}{3}\right)$



$f(0) = 0$

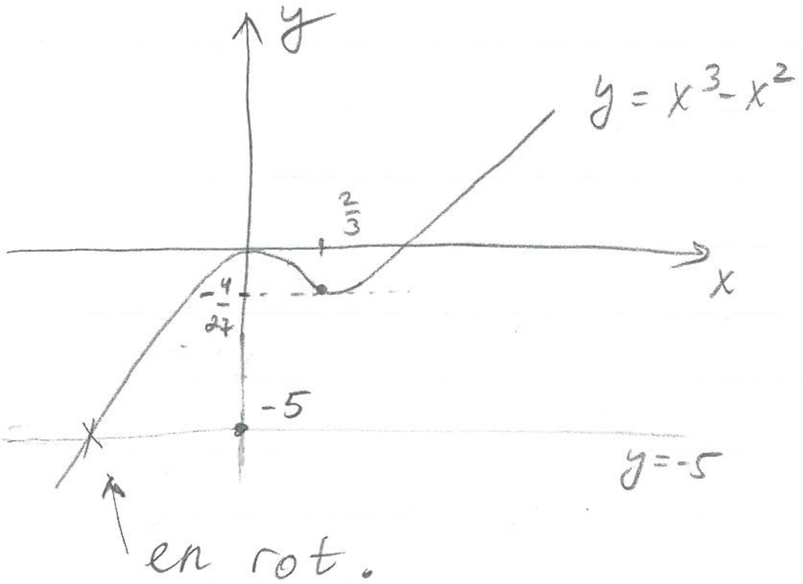
$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3} - 1\right) =$

$= \frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{27}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



en rot.

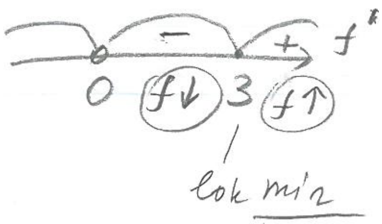
__Svar__ en rot.

b) $x = 3 \ln x$ – antal rötter?

Låt $f(x) = x - 3\ln x$, vill veta antalet rötter till $f(x) = 0$.

Studerar f m h a derivatan! $D_f: x > 0$

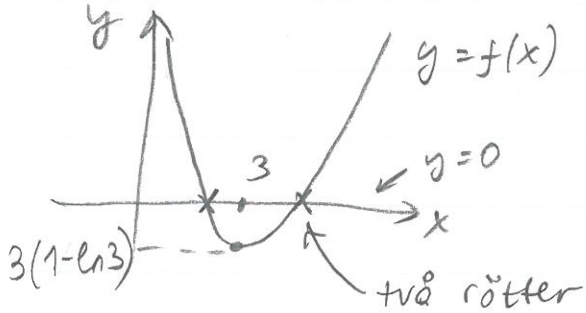
$f'(x) = 1 - \frac{3}{x} = \frac{x-3}{x}$



$f(3) = 3 - 3\ln 3 = 3(1 - \underbrace{\ln 3}_{>1}) < 0$

$$\lim_{x \to +\infty} (x - 3\ln x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \underbrace{\frac{3\ln x}{x}}_{\to 0}\right) = +\infty$$

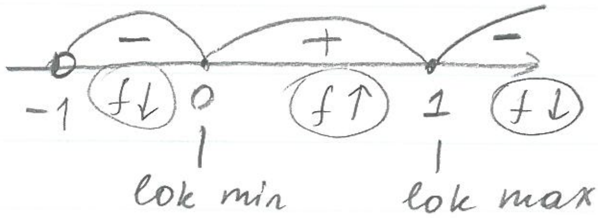
$$\lim_{x \to 0} (x - 3\underbrace{\ln x}_{\to -\infty}) = +\infty$$



Viser att $f(x) = 0$ har två rötter.

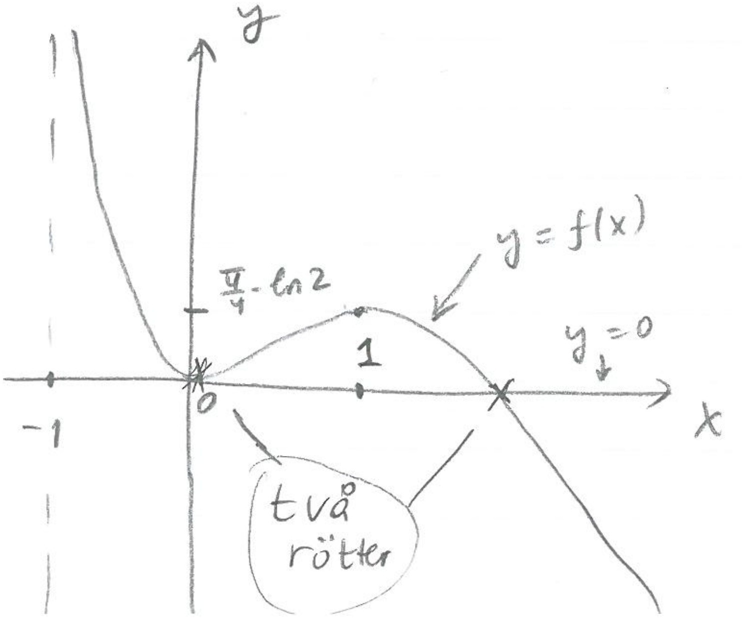
c) $f(x) = \arctan x - \ln(1+x)$, $D_f = \{x > -1\}$, vill veta antalet rötter till $f(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{\cancel{1}+x - \cancel{1} - x^2}{(1+x^2)(1+x)} = \frac{x(1-x)}{(1+x^2)(1+x)}$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} - \lim_{x \to +\infty} \ln(1+x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\frac{\pi}{2} - \underbrace{\lim_{x \to -1} \ln(1+x)}_{= -\infty} = +\infty$$



$f(0) = 0$

$f(1) = \frac{\pi}{4} - \ln 2$

Två rötter

40 Visa att $\ln x \le \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ för $x \ge 1$:

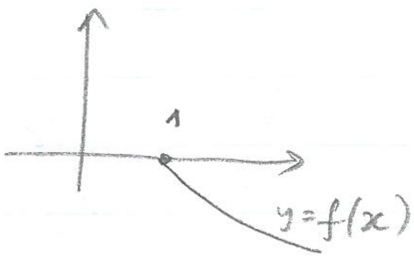
Låt $f(x) = \ln x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\Rightarrow$ vill visa att $f(x) \le 0$ då $x \ge 1$.

När $x = 1 \Rightarrow f(1) = 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{x} - x - 1}{2x\sqrt{x}} = \frac{-((\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + 1)}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-(\sqrt{x} - 1)^2}{2x\sqrt{x}} \le 0 \text{ då } x \ge 1$$



$\Rightarrow f(x) \le 0$ då $x \ge 1$

$\Rightarrow \ln x \le \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ då $x \ge 1$.

41 Medelvärdessatsen:

$f(x) - f(y) = f'(\theta)(x - y)$ $\quad$ θ är mellan x och y

$$\Rightarrow f(x) - f(y) = \underbrace{f'(\theta)}_{\ge 1}\underbrace{(x-y)}_{\ge 0} \ge x - y$$

för alla $x, y \in I$.

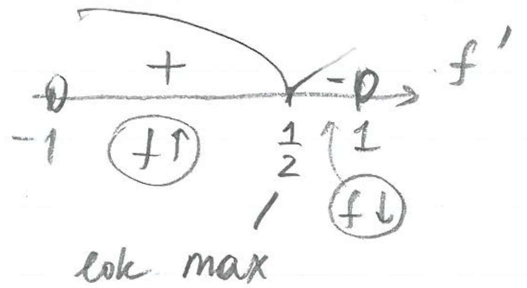
42 Betrakta $y = \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2}$

$D_f \Leftarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) < 0$

$D_f \Leftarrow [-1; 1]$

$$f' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-2x)}{\sqrt{1-x^2}}$$



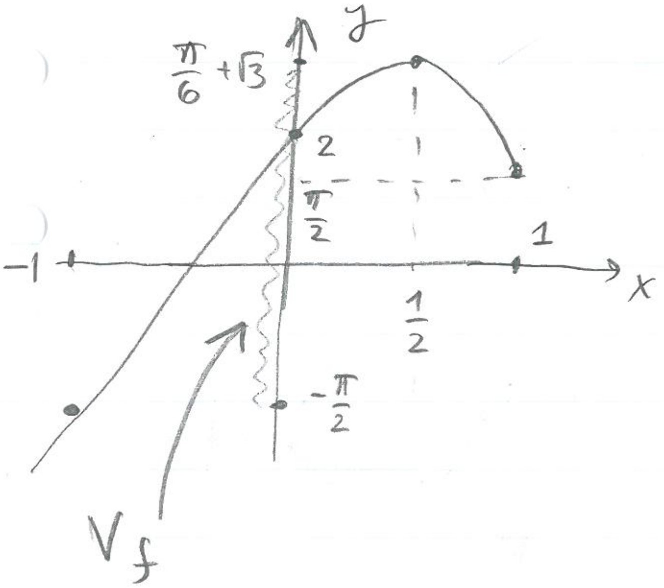
$f(-1) = -\frac{\pi}{2}$

$f(0) = 2$

$f(\frac{1}{2}) = \arcsin\frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{3}{4}} =$

$= \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$

$f(1) = \frac{\pi}{2}$



Värdemängden

$V_f = [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}]$.

43

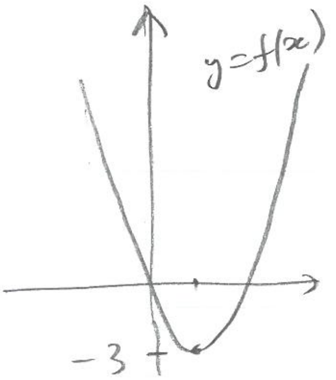
För vilka B gäller $x^4 + 4x + B \geq 0$?

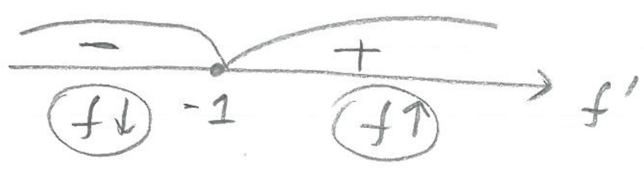
Låt $f(x) = x^4 + 4x \Rightarrow$ för vilka B

är $\underbrace{x^4 + 4x}_{f(x)} \geq -B$?

Studerar $f(x)$: $f'(x) = 4x^3 + 4 = 4(x^3+1) =$

$= 4(x+1)\underbrace{(x^2 - x + 1)}_{\text{inga rötter}}$





-1 är lokal min, $f(-1) = -3$

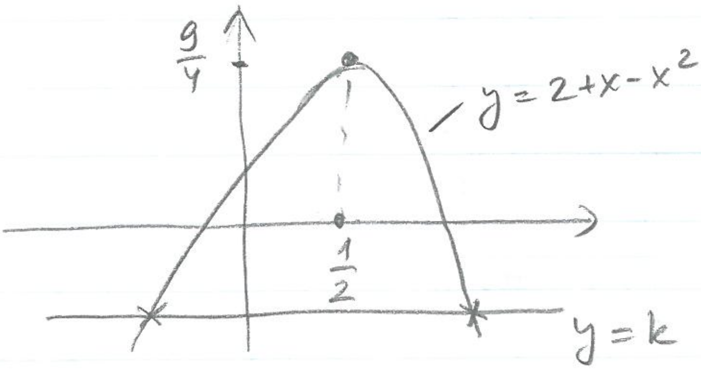
$\Rightarrow f(x) \geq -3$ för alla x

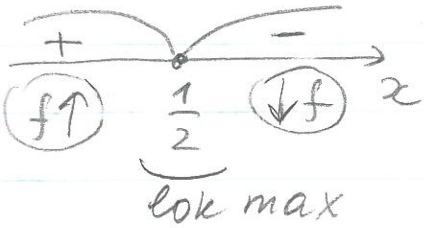
$f(x) \geq -3 \geq -B$ gäller då $-3 \geq -B \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{B \leq 3}$

$\boxed{B4}$ $\underline{\underline{40}}$ a) Antalet rötter beroende på k: $2 + x - x^2 = k$?

Låt $f(x) = 2 + x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 1 - 2x$





$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

Vi ser att när:

$k > \frac{9}{4}$: inga rötter
$k = \frac{9}{4}$: en rot
$x < \frac{9}{4}$: två rötter

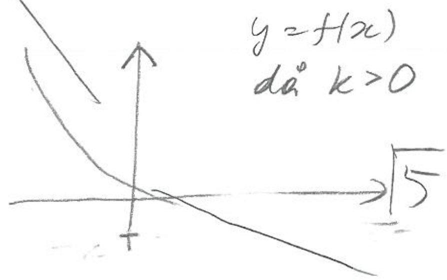
b) $e^{-x} = kx$.

Låt $f(x) = e^{-x} - kx$. Hur många rötter har $f(x) = 0$ beroende på k?

$f'(x) = -e^{-x} - k$

Söker först kritiska punkter. När $k > 0$, så $f'(x)$ är negativ, dessutom är $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



b) $e^{-x} = kx$.

Vi ser att $x=0$ inte är en rot till ekvationen, då $e^{-0} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ inte sant $\Rightarrow$ vi kan dela båda led med x utan att det ändrar antalet rötter.

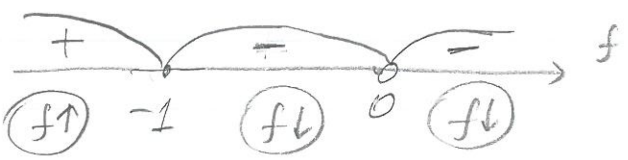
$$\frac{e^{-x}}{x} = k. \quad \text{Låt } f(x) = \frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{xe^{x}}.$$

$$f'(x) = \frac{-(e^{x} + xe^{x})}{x^2 e^{2x}} = -\frac{e^{x}(1+x)}{x^2 e^{2x}} =$$

$$= -\frac{1+x}{x^2 e^{x}}$$

nollställe: $x = -1$

f' ex. ej i $x = 0$



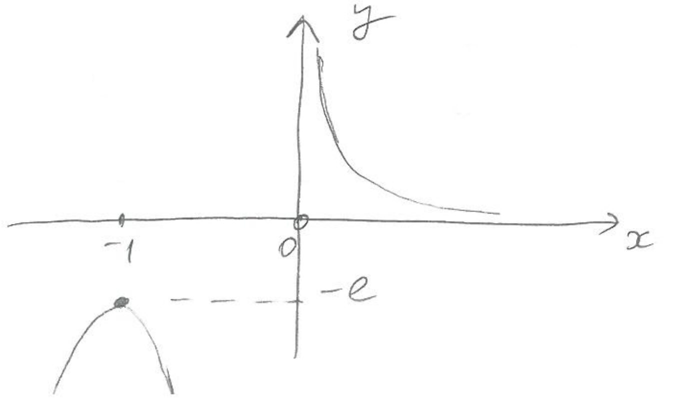
$$D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \left[\begin{array}{l} y = -x \\ x \to -\infty \Rightarrow y \to \infty \end{array} \right] = \lim_{y \to \infty} \frac{e^{y}}{-y} =$$

$$= -\lim_{y \to \infty} \frac{e^{y}}{y} = -\infty.$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{xe^{x}} = 0^{+}$$

$$\lim_{x \to 0^{+}} \frac{e^{-x}}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \to 0^{-}} \frac{e^{-x}}{x} = -\infty$$



$f(-1) = -e$

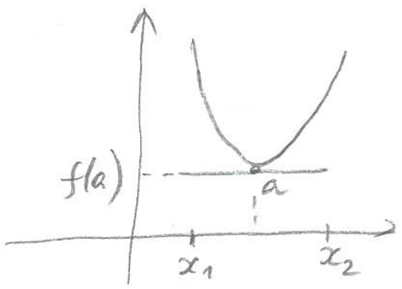
När $k < -e$ - två rötter
$k = -e$ eller $k > 0$ - en rot
$-e < k < 0$ - inga rötter.

Extra

$\boxed{B4}$

48 Antag att f är deriverbar och konvex på I och $f'(a) = 0$ för $a \in I$.

Det betyder att tangenten i $x = a$ är parallel med x-axeln.



Å andra sidan är f konvex $\Rightarrow$ p g a sats 4.13 c) ligger grafen $y = f(x)$ över tangenten i punkt a.
Men tangenten är $y = f(a)$!

Det betyder att $f(x) \geq f(a)$ för alla $x \neq a$ i I.

49 Låt $f(x) = x^3 + x - 1$ - vill visa att ekvationen $f(x) = 0$ har exakt en lösning.

Eftersom $f(0) = -1$ och $f(1) = 1$ och f är kontinuerlig finns det en punkt $x_0 \in (0;1)$ s a $f(x_0) = 0$.

Vi söker denna punkt m h a intervallinstängning:

$-$ $-$ $+$

0 0,5 1

$f(0,5) = 0,125 + 0,5 - 1 = -0,375 < 0$

$f(1) > 0$

$\Rightarrow$ roten ligger i intervallet $(0,5; 1)$.

$-$ $-$ $+$

0,5 0,6 1

$f(0,6) = -0,184 < 0$

$f(1) > 0$

$\Rightarrow$ roten ligger i intervallet $(0,6; 1)$

$-$ $+$ $+$

0,6 0,8 1

$f(0,8) = 0,312 > 0$

$f(0,6) < 0$

$\Rightarrow$ roten $\in (-0,6; 0.8)$

$-$ $+$ $+$

0,6 0,7 0,8

$f(0,7) = 0,043 > 0$

$f(0,6) < 0$

roten $\in (-0,6; 0,7)$

$-$ $-$ $+$

0,6 0,65 0,7

$f(0,65) = -0,075375 < 0$

$f(0,7) > 0$

roten $\in (-0,65; 0,7)$

$-$ $-$ $+$

0,65 0,675 0,7

$f(0,65) < 0$ roten $\in (-0,675; 0,7)$

$f(0,7) > 0$

$-$ $-$ $+$

0,675 0,68 0,7

$f(0,68) < 0$ roten $\in (0,68; 0,7)$

$f(0,7) > 0$

$-$ $+$ $+$

0,68 0,685 0,7

$f(0,68) < 0$ $\boxed{\text{roten} \in (0,68; 0,685)}$

$f(0,685) > 0$ ger två korrekta decimaler $x \approx 0,68$

8