Flervariabelanalys

Problemsamling

December 2013

1 Funktioner av flera variabler

Mängder i $\mathbf{R}^n$. Funktioner

1.1 Rita följande mängder i $\mathbf{R}^2$, och beskriv deras inre punkter, yttre punkter och randpunkter:
(a) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\, y \geq 0\}$ (b) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 2,\, 0 < x < y\}$

1.2 Beskriv de mängder i xy-planet som ges av (a) $|x| + |y| < 1$ (b) $\max(|x|, |y|) \leq 1$

1.3 Rita de mängder i $\mathbf{R}^2$ som ges av (a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 11$ (b) $|x + 2y| = 2$
Bestäm inre punkter och randpunkter.

1.4 Avgör vilka av mängderna i övningarna 1.1, 1.2 och 1.3 som är öppna, slutna, begränsade.

1.5 Rita mängden M och bestäm inre punkter och randpunkter för M då
(a) $M = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x \leq 1\}$ (b) $M = \{x \in \mathbf{R} : x^2 \geq 0\}$ (c) $M = \{x \in \mathbf{R} : 2x > x^2 + 1\}$
(d) $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 1\}$ (e) $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 1,\, y = 0\}$

1.6 Avgör vilka mängder i övning 1.5 som är öppna, slutna, begränsade.

1.7 Beskriv den mängd i $\mathbf{R}^2$ som (a) bestäms av olikheterna $2 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ och $x \leq y \leq 2x$
(b) är begränsad och avgränsas av kurvorna $x^2 - y^2 = 2$, $x^2 - y^2 = 4$, $xy = 1$ och $xy = 2$

1.8 Beskriv de ytor i $\mathbf{R}^3$ som ges av ekvationerna
(a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $x^2 + y^2 = z$ (c) $x^2 + y^2 = z^2$ (d) $x^2 + y^2 = x$

1.9 Beskriv den mängd i $\mathbf{R}^3$ som ges av
(a) $x + y + z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $z \geq 0$ (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $z \geq 0$
(c) $x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1 - x^2 - y^2$ (d) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ och $x + y + z = 1$.

1.10 Beskriv skärningen mellan de två mängderna i $\mathbf{R}^2$ som definieras av $x^2 + y^2 - 6y + 4 \leq 0$ och $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 2 \leq 0$.

1.11 Har nedanstående båda mängder i $\mathbf{R}^3$ någon gemensam punkt?
$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z \leq 0\}$, $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 4 \leq 0\}$

1.12 Beskriv funktionsytorna med ekvation $z = f(x, y)$ och tolka geometriskt om $f(x, y)$ är
(a) $x + 2y - 2$ (b) $\sqrt{x^2 + y^2}$ (c) $x^2 + y^2$ (d) $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

1.13 Rita nivåkurvorna med ekvation $f(x, y) = C$ för $C = -2, -1, 0, 1, 2$ om $f(x, y)$ ges av
(a) $x + 2y - 2$ (b) $x^2 + y^2 - 2x$ (c) xy (d) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, där $a > 0$, $b > 0$
Försök att beskriva funktionsytorna utgående från nivåkurvorna.

1.14 Antag att $z = f(x, y)$ kan skrivas med hjälp av en funktion av en variabel, d.v.s. att $z = g(t)$ där t i sin tur beror på x och y. Bestäm f om
(a) $g(t) = te^{-t^2} + 1$ och $t = x + y$ (b) $g(t) = t^2 \cos t$ och $t = xy$

1.15 Kan $z = f(x, y)$ skrivas med hjälp av en funktion g av en variabel enligt nedan? Ange g i så fall, och motbevisa existens av g i annat fall!
(a) $f(x, y) = e^{-xy} - x^2y^2 = g(xy)$? (b) $f(x, y) = e^{-xy} - x^2y = g(xy)$?
(c) $f(x, y) = (x^2 - 4xy + 4y^2)e^x e^{-2y} + 1 = g(ax + by)$ för några konstanter a och b?

1.16 Skriv funktionen $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ som en funktion $z = g(s, t)$ där $s = x - y$ och $t = x + y$. Skissera nivåkurvorna $z = -1$, 0 och 1 dels i xy-planet och dels i st-planet. Vad innebär variabelbytet ovan?

1.17 Kan $z = f(x, y)$ skrivas med hjälp av två funktioner g och h av en variabel enligt

$$f(x, y) = g(x + y) + h(x - y)$$

om (a) $f(x, y) = x$ (b) $f(x, y) = xy$ (c) $f(x, y) = x^2$? Ange g och h i så fall!

1.18 Antag att funktionen $z = f(x,y) = g(\rho)$ endast beror på den plana radien $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ och att (a) $g(\rho) = \sqrt{\rho^2-1}$ (b) $g(\rho) = \sqrt{\rho^2+1}$.
Skissera graferna för g och f i de två fallen. Hur får man grafen för f ur grafen för g?

1.19 Funktionen $z = f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ kan skrivas som $z = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, i alla fall då $x \neq 0$. Bestäm g och skissera grafen för g med angivande av lokala maxima och minima. Bestäm f:s värden längs några olika linjer genom origo ($y = 0$, $y = x$, $y = 7x$, $x = 0$, $y = -x$) och relatera detta till grafen för g.

Gränsvärden och kontinuitet

1.20 (a) Visa att $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} (x^2+y) = 2$ genom att hitta en funktion g definierad nära 0 sådan att

$$\left|(x^2+y)-2\right| \leq g(\rho), \text{ där } \rho = \sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2} \text{ och } \lim_{\rho\to 0} g(\rho) = 0.$$

Visa på motsvarande sätt att (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sin(x-y) = 0$ (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (x + \dfrac{2}{y}) = 2$.

1.21 Undersök $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ då $f(x,y)$ är

(a) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ (b) $\dfrac{x^2-2y^2}{2x^2+y^2}$ (c) $\dfrac{x^3-2y^3}{2x^2+y^2}$ (d) $\dfrac{x^2}{y-x^2}$ (e) $\dfrac{2x^3-xy^2}{x^2+y^2-xy}$ (f) $\dfrac{2x^3-xy^2}{x^2+y^2-2xy}$

1.22 Beräkna (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^2y}$ (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y+1}{\ln(x^2+2y^2)}$

1.23 Undersök följande gränsvärden:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{xy-y}{x^2+2y^2-2x+1}$ (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{xy^2-y^2}{x^2+2y^2-2x+1}$ (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xy-1}{x-1}$

1.24 Undersök $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ då $f(x,y,z)$ är

(a) $\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ (b) $\dfrac{3xz^2}{x^2+2y^2+3z^2}$ (c) $\dfrac{x+2y-z}{3x^2+y^2+z^2}$ (d) $\dfrac{\ln(1+x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2+3\sin xyz}$

1.25 Beräkna $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} f(x,y)$ då $f(x,y)$ är (a) $\dfrac{\sin x^2y^2}{2x^2+3y^2}$ (b) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2+x+y^2}$ (c) $xy\, e^{-x^2-y^2}$

1.26 Antag att $f(x,y) = \dfrac{y^4}{y^4+(y-x^2)^2}$ för $(x,y) \neq (0,0)$. Visa att

(a) $f(x,y) \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$ längs varje rät linje genom $(0,0)$
(b) $f(x,y)$ ändå inte har något gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$

1.27 Undersök $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ då $f(x,y)$ är: (a) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-y^2}}{x^2+y^2}$ (b) $\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$ (c) $\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

1.28 I vilka punkter är

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{då } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{då } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

kontinuerlig? Kan man ändra värdet av f i eventuella diskontinuitetspunkter så att f blir kontinuerlig överallt?

1.29 Kan man definiera $f(0,0)$ så att f blir kontinuerlig i origo ifall $f(x,y)$ utanför origo är

(a) $\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ (b) $\dfrac{(2x+y)^2}{x^2+3y^2+2xy}$ (c) $\dfrac{6x^2+3y^2+x^2y^2}{2x^2+y^2}$ (d) $x\,\exp\left(\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

1.30 Kan man definiera f i undantagspunkten så att f blir kontinuerlig där ifall

(a) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^3+z^4}{2x^2+y^2+3z^2}$ för $(x,y,z) \neq (0,0,0)$

(b) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz+yz}{x^2+y^2+z^2+2x+1}$ för $(x,y,z) \neq (-1,0,0)$

2 Differentialkalkyl för reellvärda funktioner

Partiella derivator. Differentierbarhet. Differentialer

2.1 Räkna ut f'_x och f'_y då $f(x,y)$ ges av

(a) $x + x^3y + x^2y^3 + y^5$ (b) $\ln(1-x^2-2y^2)$ (c) $e^{-y^2}\arcsin 2y$ (d) $\dfrac{x+y}{x-y}$

2.2 Bestäm de partiella förstaderivatorna av f om $f(x,y,z)$ är

(a) $\cos(xy-z^2)$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{z}}\arctan\dfrac{y}{x}$ (c) x^{y^z} (som alltså betyder $x^{(y^z)}$)

2.3 Beräkna f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx} och f''_{yy} för f i övning 2.1a.

2.4 Beräkna f'_x och f'_y i alla punkter i planet om $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & \text{då } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{då } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

2.5 Antag att

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{då } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{då } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Visa att $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ och $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existerar överallt, men att f ändå inte är kontinuerlig i $(0,0)$.

2.6 Låt $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \arctan\dfrac{x}{y} & \text{då } y \neq 0, \\ 0 & \text{då } y = 0. \end{cases}$

(a) Beräkna f'_x och f'_y, och visa sedan direkt att $f \in \mathcal{C}^1$.

(b) Räkna ut $f''_{xy}(0,0)$ och $f''_{yx}(0,0)$. Är det sant att $f \in \mathcal{C}^2$?

2.7 Lös följande system av partiella differentialekvationer i $\mathbf{R}^2$:

(a) $\begin{cases} z'_x = 2x+y \\ z'_y = x+2y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} z'_x = e^{xy} \\ z'_y = e^{xy} \end{cases}$ (c) $\begin{cases} z'_x = ye^x \\ z'_y = 1+e^x \end{cases}$

2.8 Visa att det inte finns någon funktion $z \in \mathcal{C}^2$ sådan att $z'_x = y\,e^{x^2y^4}$ och $z'_y = x\,e^{x^2y^4}$.

2.9 Bestäm alla funktioner $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ sådana att

(a) $\begin{cases} u'_x = y+3z-3 \\ u'_y = x+2z-2 \\ u'_z = 2y+3x-1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} u'_x = 1+y\sin xy \\ u'_y = e^z + x\sin xy \\ u'_z = (1+y+z)e^z \end{cases}$ (c) $\begin{cases} u'_x = z+xy^2 \\ u'_y = x^2y \\ u'_z = yz \end{cases}$

2.10 Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-funktioner $f(x)$ sådana att följande system har minst en lösning $z \in \mathcal{C}^2$. Lös också systemet för dessa f.

(a) $\begin{cases} z'_x = (y^3-y^2)f(x) + xy^2\sin x \\ z'_y = 3y^2\sin x - 2xy\cos x \end{cases}$ (b) $\begin{cases} z'_x = yf(x) \\ z'_y = x^2y \end{cases}$ (c) $\begin{cases} z'_x = 2x(yf(x)+1) \\ z'_y = f(x)-2y \end{cases}$

2.11 Bestäm alla lösningar $z \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$ till följande partiella differentialekvationer:

(a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ (b) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ (c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ (d) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

(e) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = z$ (f) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yz$ (g) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = xz$ (h) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + e^{2x} z = 0$

2.12 Bestäm ekvationer för tangentplanen till ytorna med följande ekvationer och angivna tangeringspunkter:

(a) $z = x^3 + xy^2$ i $(1, 2, 5)$ (b) $z = e^{2x} - 1$ i $(0, 2, 0)$ (c) $y = \arcsin xz$ i $(1, \frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$

2.13 Bestäm differentialen av (a) $2x - 3y + z$ (b) $\sin xy^2$ (c) $\dfrac{pV}{T}$

2.14 Effektutvecklingen P i ett motstånd med resistansen R ges som alla vet av

$$P = \frac{U^2}{R},$$

där U är spänningen över motståndet. Antag att $U = 10$ V och $R = 2\ \Omega$; vad är P då? Ungefär hur mycket ändras P om U ökas med 0,3 V och R ökas med (a) 0,1 Ω (b) 0,2 Ω ?

2.15 Som bekant ger parallellkoppling av två motstånd med resistanserna R_1 och R_2 en resulterande resistans R där

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Antag att $R_1 = 200 \pm 0{,}5\ \Omega$ och $R_2 = 300 \pm 1{,}0\ \Omega$. Beräkna R och ge en ungefärlig uppskattning av felet i resultatet.

2.16 I en rät cirkulär cylinder ökas radien med 3 % och minskas höjden med 1 %. Med hur många procent ändras volymen (approximativt)?

2.17 Visa direkt från definitionen av differentierbarhet att funktionen f, där $f(x, y) = xy$, är differentierbar i $(1, 2)$.

2.18 I kursboken visar man att

$$f \in \mathcal{C}^1 \Longrightarrow f \text{ är differentierbar} \Longrightarrow f \text{ är kontinuerlig och partiellt deriverbar.}$$

I övning 2.5 såg vi att en partiellt deriverbar funktion inte behöver vara kontinuerlig, och självklart behöver en kontinuerlig funktion inte vara partiellt deriverbar.

Visa att implikationerna ovan inte är ekvivalenser genom att visa följande:

(a) f i övning 2.4 är kontinuerlig och partiellt deriverbar men inte differentierbar

(b) f, där $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \arctan \dfrac{x}{y^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$ är differentierbar men inte $\mathcal{C}^1$

Kedjeregeln. Variabelbyten i differentialekvationer

2.19 Betrakta differentialekvationen $z'_x + z'_y = 0$.

(a) Visa att $z = \sin(x - y)$ och $z = 1 + (x - y)e^{-x}e^y$ båda är lösningar till denna ekvation.

(b) Allmänt, om $z(x, y) = f(x - y)$ där f är en deriverbar funktion av en variabel, beräkna $z'_x(x, y)$ och $z'_y(x, y)$, och visa sedan att z är en lösning till differentialekvationen.

(c) Funktionerna i (a) är båda av typen i (b); vad är f i dessa fall?

2.20 Låt f vara en $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel och sätt $z(x, y) = f(x/y)$. Beräkna z'_x och z'_y, och visa att $xz'_x + yz'_y = 0$. Slutligen, kan $z(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$ skrivas som $f(x/y)$ för något f?

2.21 Antag att $z \in \mathcal{C}^1$. Uttryck z'_x och z'_y med hjälp av z'_u och z'_v (och eventuellt x och y) om

(a) $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$ (b) $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$ (c) $\begin{cases} u = 2xy \\ v = 1/y \end{cases}$

2.22 (a) Transformera differentialekvationen i övning 2.19 till nya variabler $\begin{cases} u = x - y, \\ v = x + y, \end{cases}$ och finn sedan alla lösningar till ekvationen.

(b) Om man dessutom vet att $z(0, y) = y - \cos y$ för alla y, hur ser lösningen ut då?

2.23 Betrakta det linjära variabelbytet $(x, y) \leftrightarrow (u, v)$ som ges av $\begin{cases} u = 2x - 3y, \\ v = x. \end{cases}$

(a) Beräkna $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ och $\dfrac{\partial x}{\partial u}$. Är det sant att $\dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial u} = 1$?

(b) Låt $f \in \mathcal{C}^1$. Uttryck $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ med hjälp av $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ och $\dfrac{\partial f}{\partial v}$. Hur kan $\dfrac{\partial f}{\partial x} \neq \dfrac{\partial f}{\partial v}$ trots att $x = v$?

2.24 Låt $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Visa att funktionen h av tre variabler, som ges av $h(x, y, z) = f(u, v)$ där $u = x/y$ och $v = y/z$, satisfierar differentialekvationen

$$x\frac{\partial h}{\partial x} + y\frac{\partial h}{\partial y} + z\frac{\partial h}{\partial z} = 0.$$

2.25 Temperaturen $T(\rho, t)$ hos vatten, som med viss hastighet strömmar ur en källa i origo och sprider sig i alla riktningar i planet, uppfyller i varje punkt

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \rho},$$

där $t > 0$ är tiden och $\rho > 0$ är avståndet från punkten till origo. Dimensionsbetraktelser leder till lösningar av formen

$$T(\rho, t) = f\left(\frac{\rho^2}{t}\right),$$

där f är en $\mathcal{C}^2$-funktion av en variabel. Bestäm alla sådana funktioner f, och därmed T.

2.26 Bestäm alla z som är av klass $\mathcal{C}^1$ i första kvadranten och som där uppfyller

$$2x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = y + xy$$

genom att införa nya variabler $u = xy^2$ och $v = y$. Bestäm sedan den lösning som uppfyller $z(1, y) = e^{-y}$ för $y > 0$.

2.27 Hitta alla kontinuerligt deriverbara funktioner f i högra halvplanet som där löser differentialekvationen

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = -f(x, y)$$

genom att välja nya variabler $u = y/x$ och v så enkel som möjligt.

2.28 Antag att $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$ och bilda följande båda funktioner av en variabel:

$$\begin{cases} g(t) = f(2t, t), \\ h(t) = f(t, -t). \end{cases}$$

Om $g'(0) = a$ och $h'(0) = b$, vad är då $f'_x(0, 0)$ och $f'_y(0, 0)$?

2.29 Vi skall här titta på hur man kan härleda de variabelbyten som förekommer ovan. En allmän linjär homogen partiell differentialekvation av första ordningen kan skrivas

$$(*) \qquad a(x,y)z'_x(x,y) + b(x,y)z'_y(x,y) = 0,$$

där a och b är $\mathcal{C}^1$-funktioner som vi antar inte är noll samtidigt.

(a) Låt $(x(t), y(t))$ vara en $\mathcal{C}^1$-kurva sådan att tangentvektorn $(x'(t), y'(t))$ är parallell med $(a(x(t), y(t)), b(x(t), y(t)))$ för varje t; en sådan kurva kallas för en *karakteristisk kurva* (eller *karakteristika*) till differentialekvationen $(*)$. Visa att om $z(x,y)$ är en $\mathcal{C}^1$-lösning till $(*)$, så är $z(t) = z(x(t), y(t))$ konstant på kurvan.

(b) Antag att $a(x,y) \neq 0$, och betrakta den ordinära differentialekvationen

$$(**) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}.$$

Låt $f(x,y) = C$ vara lösningarna till denna ekvation skrivna i implicit form, och sätt $u = f(x,y)$ och $v = x$, t.ex. Transformera $(*)$ till de nya variablerna (u,v), och lös sedan ekvationen. Vad blir skillnaden om vi i stället antar att $b(x,y) \neq 0$?

(c) Metoden i (b) fungerar även för inhomogena ekvationer

$$a(x,y)z'_x(x,y) + b(x,y)z'_y(x,y) = c(x,y).$$

Hur blir differentialekvationen $(**)$ och vad blir $f(x,y)$ i uppgifterna 2.22 och 2.26? (Detta motiverar alltså valet av u i dessa uppgifter.)

(d) Lös differentialekvationen $(1-2y)z'_x + (1+2x)z'_y = 0$.

2.30 Bestäm alla $\mathcal{C}^2$-funktioner $y(x)$ som löser den ordinära differentialekvationen

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} - 3y = 5x^2, \quad x > 0,$$

genom att gå över till variabeln $u = \ln x$.

2.31 Om $z \in \mathcal{C}^2$ beror på u och v, som i sin tur beror på x, uttryck $\dfrac{dz}{dx}$ och $\dfrac{d^2z}{dx^2}$ med hjälp av u- och v-derivator av z (och eventuellt variabeln x) om $\begin{cases} u = \ln x, \\ v = x^2. \end{cases}$

2.32 Betrakta för $z \in \mathcal{C}^2$ differentialekvationen

$$z''_{xx} - 4z''_{xy} + 4z''_{yy} = 6y.$$

(a) Transformera och lös ekvationen med hjälp av variabelbytet $u = 2x + y$, $v = x$.

(b) Om man har randvillkoret $z(0,y) = e^{-y^2}$, hur ser lösningarna ut då?

(c) Om man har randvillkoren $z(0,y) = e^{-y^2}$ och $z'_x(0,y) = 0$, bestäm z.

(d) Om man har randvillkoren $z(0,y) = 0$ och $z'_x(x,-8x) = 0$, bestäm z.

2.33 Transformera $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ till de nya variablerna i övning 2.21a, om $z \in \mathcal{C}^2$.

2.34 Bestäm alla $\mathcal{C}^2$-funktioner $z(x,y)$ som löser den partiella differentialekvationen

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = x, \quad x > 0,\ y > 0,$$

genom att gå över till de nya variablerna i övning 2.21c.

2.35 Hitta alla funktioner $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$ sådana att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 6\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1$$

med hjälp av något linjärt variabelbyte $\begin{cases} u = x + ay, \\ v = x + by. \end{cases}$

2.36 Transformera Laplaces ekvation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad f \in \mathcal{C}^2,$$

till nya koordinater (u, v) via

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

där ϕ är en konstant vinkel; uv-systemet är alltså vridet vinkeln ϕ i positiv led i förhållande till xy-systemet.

2.37 Låt (ρ, φ) vara polära koordinater i planet och u en $\mathcal{C}^2$-funktion i planet; u kan alltså ses som funktion av (x, y) eller av (ρ, φ).

(a) Uttryck $\dfrac{\partial u}{\partial \rho}$ och $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$ som linjärkombinationer av $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ och $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ (ρ och φ får förekomma).

(b) Invertera sambanden i (a) för att transformera $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ och $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ till polära koordinater.

(c) Transformera Laplaces ekvation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

till polära koordinater.

(d) Bestäm alla vinkeloberoende u som uppfyller Laplaces ekvation. Observera att differentialekvationen för $u = u(\rho)$ blir ordinär och av första ordningen i funktionen $v = \dfrac{du}{d\rho}$.

2.38 Transformera och lös den partiella differentialekvationen

$$x z''_{xy} + y z''_{yy} = 0$$

i första kvadranten genom att införa de nya variablerna $u = x$, $v = x/y$. ($z \in \mathcal{C}^2$)

2.39 En storhet u beror på storheterna x och y enligt $u = xy^2$. Samtidigt ges en tredje storhet z av $z = 2x + y$; u kan alltså ses som funktion av (x, y) eller av (x, z). Beräkna

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y \quad \text{och} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z,$$

båda uttryckta i x och y. (Indexeringen anger vilken variabel som hålls konstant.)

2.40 Inom termodynamiken betraktar man en gas, vars energi E beror på de tre storheterna volymen V, temperaturen T och trycket p. Dessutom bestämmer två av dessa den tredje, så man kan välja att beskriva E som funktion av antingen (T, p), (T, V) eller (p, V). Visa att

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

2.41 För $\mathcal{C}^2$-funktioner z gäller som bekant att de blandade andraderivatorna är lika: $z''_{xy} = z''_{yx}$. Efter ett variabelbyte $(x, y) \leftrightarrow (u, v)$ gäller det också: $z''_{uv} = z''_{vu}$. Däremot behöver det inte gälla om man blandar variabler från *olika* system, vilket vi här skall se. Visa att

$$(z'_x)'_u \neq (z'_u)'_x$$

i det konkreta fallet att variabelbytet ges av $u = xy$, $v = x/y$ då $x > 0$ och $y > 0$, och att funktionen z ges av $z = xy = u$.

Gradient. Riktningsderivata

2.42 Beräkna gradienten av f om (a) $f(x,y,z)=x+2y+3z$ (b) $f(x,y)=xy^2e^{-xy}$

2.43 Låt $f(x,y)=x^2+4y$.

(a) Rita nivåkurvorna $f(x,y)=C$ för $C=-16,0,16,32$ i en stor figur. Det räcker om du tar med de delar av kurvorna som ligger i rektangeln $-2\le x\le 10$, $-10\le y\le 10$.

(b) Rita skalenliga vektorer $\nabla f(a,b)$ med fotpunkter i $(a,b)=(0,8)$, $(2,3)$, $(4,-4)$, $(6,-5)$, $(8,-8)$; notera att dessa punkter ligger på nivåkurvorna i (a).

(c) Hur ligger vektorerna $\nabla f(a,b)$ i (b) i förhållande till de nivåkurvor $f(x,y)=C$ som går genom (a,b)? Åt vilket håll pekar $\nabla f(a,b)$? Kan man se en koppling mellan längderna av $\nabla f(a,b)$ och hur tätt nivåkurvorna ligger i närheten av (a,b)?

2.44 Bestäm ekvationer för tangentlinjen och normallinjen i punkten $(2,-1)$ till den kurva som ges av ekvationen $x^3+xy+y^3=5$.

2.45 Bestäm ekvationer för alla linjer som tangerar ellipsen $x^2+xy+y^2=1$ och som går genom punkten (a) $(0,2)$ (b) $(0,0)$ (c) $(-1,0)$

2.46 Bestäm skärningspunkterna mellan kurvorna $x^2-y^2=3$ och $xy=2$ och bestäm vinklarna mellan kurvorna (d.v.s. vinklarna mellan deras tangentlinjer) i dessa punkter.

2.47 Bestäm vinkeln mellan kurvan $x^3+y^3=y-x$ och y-axeln i deras gemensamma punkter.

2.48 I vilka punkter på kurvan $xy^2=2$ går normallinjen till kurvan genom origo?

2.49 Bestäm en ekvation för tangentplanet till
(a) ytan $x^2+2y^2+3z^2=20$ i punkten $(3,-2,-1)$ (b) ytan $z=x^2y$ i punkten $(-2,1,4)$

2.50 Bestäm alla punkter på ytan $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2yz=1$ i vilka ytans tangentplan är parallellt med planet $x-y+2z=0$.

2.51 Bestäm ekvationer för alla plan som tangerar ytan $x^2+2y^2+3z^2=6$ och som innehåller punkterna $(6,0,0)$ och $(0,3,0)$.

2.52 Bestäm konstanten C så att ytan $x^2+3y^2+4z^2=C$ tangerar planet genom punkterna $(0,1,2)$, $(1,3,0)$ och $(5,-1,1)$.

2.53 Bestäm $C>0$ så att ellipsen $2x^2+y^2=C$ skär hyperbeln $x^2-2y^2=1$ under rät vinkel.

2.54 Låt ytan S beskrivas av $z=f(x,y)$, där $f\in\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Ytan kan också beskrivas av sambandet $F(x,y,z)=0$, där $F(x,y,z)=f(x,y)-z$.
(a) Beräkna och ge en tolkning av $\nabla f(x,y)$.
(b) Beräkna och ge en tolkning av $\nabla F(x,y,z)$ i de punkter där $F(x,y,z)=0$.

2.55 Räkna ut riktningsderivatan av funktionen $f(x,y)=\ln(x^2+2y^2)$ i punkten $(2,1)$ och i den riktning som ges av vektorn (a) $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ (b) $(1,2)$

2.56 Med vilken hastighet växer eller avtar xy^2z^3 i punkten $(3,2,1)$ i riktning mot origo?

2.57 I en given punkt på jordytan sjunker temperaturen med hastigheten 3 °C/km rakt norrut och stiger med hastigheten 2 °C/km rakt österut. Med vilken hastighet förändras temperaturen rakt åt (a) väster (b) sydost (c) ostnordost ? (Temperaturen förutsätts vara $\mathcal{C}^1$)

2.58 En överhettad isbjörn befinner sig på ett stort plant isflak utanför Kvitøya i Svalbard. Lufttemperaturen T [°C] beror på x och y [km] enligt den något märkliga formeln

$$T(x,y)=3\arctan(x^2+y)-10-\frac{6}{1+x^2+y^2}.$$

Björnen befinner sig i punkten $(1, -2)$ och lufsar med hastigheten 3 m/s. I vilken riktning bör den lufsa för snabbast möjliga avkylning, och hur snabbt sjunker temperaturen i denna punkt och i denna riktning? Svara dels i °C/km, dels i °C/min.

2.59 Vi betraktar funktionen $f(x, y) = x + 2y - (x - 1)^3$ i närheten av punkten $P = (1, -1)$.
(a) I vilka riktningar $\boldsymbol{v} = (a, b)$, $|\boldsymbol{v}| = 1$, är $f'_{\boldsymbol{v}}(P)$ positiv, negativ respektive noll? Rita figur!
(b) I vilka riktningar $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ utgående från P är funktionen f (initialt) växande?

2.60 En kulle har formen

$$z = \frac{4}{1 + x^2 + y^2}$$

där z är höjden från markplanet. Var är kullen brantast, och hur brant är den där?

2.61 Antag att $z = 4 - x^2 - 2y^2$ är ekvationen för en kulle där positiva z-axeln pekar uppåt. En person startar i punkten $(1, 1, 1)$ på kullen och går nedför, alltid i den riktning där det lutar brantast. Bestäm personens väg.

Lokala undersökningar

2.62 Avgör med hjälp av definitionen av lokalt extremvärde om följande funktioner har lokalt maximum eller lokalt minimum i origo:
(a) $f(x, y) = 1 - |x| - y^2$ (b) $f(x, y) = |x| - \cos y$ (c) $f(x, y) = |x| + \cos y$
(d) $f(x, y, z) = x^2 - yz$ (e) $f(x, y, z) = \cos xyz$ (f) $f(x, y, z) = (1 + x^2)e^{-y^2 - z^2}$
(g) $f(x, y) = (x + y)^2 + xy^3$ (h) f i övning 2.18b (i) $f(x, y) = (x - y)^2 + xy^3$

2.63 Låt $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$.
(a) Visa att f har strängt lokalt minimum i origo längs varje rät linje genom origo.
(b) Visa att f ändå inte har lokalt minimum i origo som funktion av två variabler.

2.64 Använd kända Maclaurinutvecklingar från envariabelanalysen för att bestämma Maclaurinutvecklingarna av ordning 2 med rest i ordoform till
(a) $(x^2 + y^2 - 1)e^y$ (b) $\sin(x + y) \cdot \ln(1 + 2x + y) - xy$ (c) $2\sqrt{1 + x^2 + y} - \cos(x - z) - y$

2.65 Taylorutveckla funktionen

$$f(x, y) = \ln(2x^2 + xy + y^2)$$

till ordning 2 kring punkten $(2, -1)$ med rest i ordoform.

2.66 Avgör på föreslaget sätt om angivna kvadratiska former är positivt definita, positivt semidefinita, indefinita, negativt semidefinita eller negativt definita.

(a) $Q(h, k) = h^2 - hk + k^2$ genom att kvadratkomplettera m.a.p. h
(b) $Q(h, k) = h^2 + hk - k^2$ genom att bestämma egenvärdena till den tillhörande symmetriska matrisen
(c) $Q(h, k) = hk$ på valfritt sätt
(d) $Q(h, k, l) = 6k^2 + l^2 - 6hk - 2hl + 4kl$ genom att kvadratkomplettera m.a.p. l och sedan m.a.p. h
(e) $Q(h, k, l) = 4hk + 4kl - 2h^2 - 3k^2 - 4l^2$ genom att bestämma egenvärdena till den tillhörande symmetriska matrisen
(f) $Q(h, k, l) = h^2 + 2hk + 2k^2$ på valfritt sätt
(g) $Q(h, k, l) = (h - k)^2 + (k - l)^2 + (l - h)^2$ på valfritt sätt
(h) $Q(h, k, l) = h^2 + 2hk + 3k^2 - 4kl + 6l^2$ på valfritt sätt
(i) $Q(h, k, l) = h^2 + 2hk + k^2 - 12kl$ på valfritt sätt

2.67 Avgör karaktären på den kvadratiska formen $(h, k) \mapsto h^2 + 2ahk + k^2$ för alla värden på parametern a.

2.68 Avgör med hjälp av Maclaurinutvecklingarna i övning 2.64 om funktionerna där har lokalt maximum eller lokalt minimum i origo.

2.69 Avgör om följande funktioner har lokalt maximum eller lokalt minimum i origo:
(a) $f(x, y) = -1 - x^2 + 2xy - 2y^2 + x^3y - x^4$ (b) $f(x, y) = x^2 + x^3 - 2xy + y^2$
(c) $f(x, y) = x^2 + x^4 - 2xy + y^2$ (d) $f(x, y, z) = x + x^2 + y^2 + z^2$
(e) $f(x, y, z) = 2\cos(x + y + z) + e^{xy} + e^{yz} + e^{zx}$ (f) $f(x, y, z) = \cos(x + y + z) + \cos x$

2.70 Avgör var följande funktioner har lokala maxima och lokala minima. Ange också funktionernas övriga stationära punkter.
(a) $f(x, y) = 3 + 4x - 4y - x^2 - 2y^2$ (b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x$
(c) $f(x, y) = xe^{-2x^2-y^2}$ (d) $f(x, y) = x + y - 3\ln(2 + xy)$, $x > 0$, $y > 0$
(e) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - x - 2y$ (f) $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$
(g) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ (h) $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 4)e^{-x-y}$
(i) $f(x, y) = 4x^2 + 4xy^2 + y^4 + y^6$ (j) $f(x, y, z) = 4x + y^2/x + 4z^2/y + 8/z$

2.71 Låt $f(x, y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(a) Visa att de båda punkterna $(\pm 1, 0)$ är funktionens enda stationära punkter.
(b) Visa att båda dessa punkter är lokala maximipunkter.
(c) Rita grafen till funktionen $g(x) = f(x, 0)$. Ange alla lokala maxima och minima.
(d) Rita grafen till funktionen $h(y) = f(\pm 1, y)$. Ange alla lokala maxima och minima.
(e) Hur återspeglas det i graferna för g och h att f har lokalt maximum i $(\pm 1, 0)$?
(f) g har alltså ett lokalt minimum mellan sina lokala maxima. Varför har inte också f det? Förklara skillnaden! Försök också skapa dig en bild av hur "berget" $z = f(x, y)$ ser ut längs vägen mellan de båda topparna $(\pm 1, 0, 1)$.

2.72 Bestäm alla stationära punkter till isflakstemperaturen T i övning 2.58.

2.73 Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter för $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{då } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{då } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

2.74 Om $f \in \mathcal{C}^2$ är en funktion i $\mathbf{R}^2$ och (a, b) är en stationär punkt där alla andraderivator är positiva, är då (a, b) en lokal minimipunkt? Bevis eller motexempel!

3 Differentialkalkyl för vektorvärda funktioner

3.1 Beskriv följande kurvor i $\mathbf{R}^2$ givna i parameterform:
(a) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$ (b) $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$ (c) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$
Ange och markera i figur en tangentvektor i de punkter som svarar mot $t = 0$ och $t = 1$.

3.2 Beskriv följande kurvor i $\mathbf{R}^2$ respektive $\mathbf{R}^3$, givna i parameterform:
(a) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ $(0 \le t < 2\pi)$ (b) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$ (c) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$
Ange och markera i figur en tangentvektor i de punkter där $t = 0$ och $t = \pi/2$.

3.3 En kurva i $\mathbf{R}^3$ parametriseras av t via

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t, \\ z = \arctan t. \end{cases}$$

Bestäm tangentlinjen genom den punkt som svarar mot $t = 0$, dels i parameterform, dels i parameterfri form.

3.4 En yta i $\mathbf{R}^3$ parametriseras av (s, t) via

$$\begin{cases} x = se^t - 1, \\ y = \sin st, \\ z = 2s + \arcsin t. \end{cases}$$

Bestäm tangentplanet genom den punkt som svarar mot $(s, t) = (1, 0)$, dels i parameterform, dels i parameterfri form.

3.5 En sluten plan kurva parametriseras av

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$$

(a) Skissa kurvan! Ange speciellt alla punkter där kurvan skär koordinataxlarna, där tangenten är vågrät och där tangenten är lodrät.

(b) $(0, 0)$ är en s.k. dubbelpunkt. Bestäm båda tangenterna där!

(c) Bestäm största avståndet till origo. I vilka punkter antas det?

3.6 Låt

$$\begin{cases} x = 3t \cos \psi, \\ y = 2t \sin \psi. \end{cases}$$

Bestäm funktionalmatrisen $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(t, \psi)}$ och funktionaldeterminanten $\dfrac{d(x, y)}{d(t, \psi)}$.

3.7 Vad är funktionalmatrisen och -determinanten för den linjära avbildning $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$ som ges av

$$\begin{cases} u = x + y + 2z, \\ v = 3x - 2y + z, \\ w = 5z - x - y. \end{cases}$$

Är avbildningen inverterbar?

3.8 Betrakta avbildningen $\begin{cases} u = e^x + y, \\ v = e^{-x} y, \end{cases} \quad y > 0.$

(a) Bestäm den inversa avbildningen $(u, v) \mapsto (x, y)$.

(b) Beräkna $\dfrac{d(u, v)}{d(x, y)}$ och $\dfrac{d(x, y)}{d(u, v)}$. Vilket samband mellan dessa gäller?

3.9 Studera avbildningen $\begin{cases} u = e^x + y, \\ v = 2x + e^y. \end{cases}$

(a) Visa att avbildningen i någon omgivning till $(x, y) = (1, 0)$ har en $\mathcal{C}^1$-invers som är definierad i en motsvarande omgivning till $(u, v) = (e, 3)$. Räkna också ut x, y, x'_u, x'_v, y'_u och y'_v i denna punkt.

(b) Räkna ut x'_u, x'_v, y'_u och y'_v, uttryckta i x och y, i en allmän punkt (u, v) i omgivningen.

(c) Visa att inversen till och med är $\mathcal{C}^2$ och beräkna $x''_{uv}(u, v)$; ange speciellt $x''_{uv}(e, 3)$.

3.10 Betrakta avbildningen $\begin{cases} u = x^2 + 2y, \\ v = x + y. \end{cases}$

(a) Visa att avbildningen är inverterbar i någon omgivning till $(x, y) = (0, 0)$.

(b) Beskriv bilden i uv-planet av en liten kvadrat i xy-planet med hörn $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, a) och $(0, a)$, för små $a > 0$, och speciellt dess rand orienterad i positiv led (moturs).

(c) Hur syns funktionaldeterminantens tecken och absolutbelopp i figuren i (b)?

3.11 Betrakta avbildningen $(x, y) \mapsto (u, v)$ som ges av $\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy, \end{cases} \quad x^2 + y^2 > 0.$

(a) Beräkna funktionaldeterminanten $\dfrac{d(u, v)}{d(x, y)}$.

(b) Determinanten är > 0 överallt. Visa att avbildningen ändå inte är (globalt) inverterbar.

(c) Visa att om man begränsar definitionsområdet till $x > 0$, så är avbildningen (globalt) inverterbar. Ange inversen $(u, v) \mapsto (x, y)$ samt dess funktionaldeterminant $\dfrac{d(x, y)}{d(u, v)}$.

3.12 Visa att ekvationen
$$x^3 + y^3 + xy = x + y$$
i någon omgivning till (a) $(0, 0)$ (b) $(0, 1)$ (c) $(0, -1)$ definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $y(x)$. Räkna också ut $y'(x)$ uttryckt i x och y, och speciellt $y(0)$ och $y'(0)$.

3.13 Betrakta ekvationen
$$x^3 = 1 + 3xy^2.$$

(a) Visa att ekvationen i någon omgivning till $(1, 0)$ definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $x(y)$, och beräkna $x'(y)$ uttryckt i y och $x(y)$, samt $x(0)$ och $x'(0)$.

(b) Hur kan man se att $\mathcal{C}^1$-funktionen $x(y)$ faktiskt är $\mathcal{C}^2$? Beräkna $x''(y)$, uttryckt i y, $x(y)$ och $x'(y)$, och ange speciellt $x''(0)$. Har $x(y)$ lokalt extremvärde i $y = 0$?

(c) Bestäm alla punkter som uppfyller ekvationen men kring vilka ekvationen inte lokalt definierar $\mathcal{C}^1$-funktioner $x(y)$. Definierar ekvationen lokalt $\mathcal{C}^1$-funktioner $y(x)$ där?

3.14 Visa att ekvationen
$$y^4 + (|x| - 1)y + \sin x = 0$$
definierar funktioner $y(x)$ lokalt kring $(0, 0)$ och $(0, 1)$, och att funktionen blir $\mathcal{C}^1$ i det ena fallet – vilket? – men inte i det andra. Ange också $y'(0)$.

3.15 Visa att ekvationen
$$xy - (x + y)z^2 + 1 = \tan 2z$$
i någon omgivning till $(1, -1, \pi)$ definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $z(x, y)$. Räkna ut $z'_x(x, y)$ och $z'_y(x, y)$ och ange speciellt $z(1, -1)$, $z'_x(1, -1)$ och $z'_y(1, -1)$.

3.16 Studera ekvationen
$$y^3 + y = e^x - x + 9.$$

(a) Visa att om $x = 1$ finns det precis ett y som löser ekvationen.
(b) Visa att till *varje* givet värde på x hör exakt ett värde på y.
(c) Låt lösningen y i (b) betecknas $y = f(x)$. Visa att denna funktion är $\mathcal{C}^1$ lokalt.
(d) Hur följer nu att $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$, alltså inte bara lokalt?
(e) Bestäm definitions- och värdemängd för f.

3.17 Låt e vara en konstant, $0 \le e < 1$, och betrakta ekvationen
$$t = v - e \sin v.$$
Visa att ekvationen definierar en strängt växande $\mathcal{C}^1$-funktion $v(t)$ med $D_v = V_v = \mathbf{R}$. (Ekvationen kallas *Keplers ekvation* och är central vid beräkning av planetpositioner; e är den elliptiska planetbanans excentricitet.)

3.18 Visa att ekvationen
$$(y^2 + z^4)x + x^5 = 1$$
definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $x(y, z)$ i hela yz-planet. Räkna också ut $x'_y(y, z)$ och $x'_z(y, z)$.

3.19 Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+y+z = 6, \\ xyz = 6, \end{cases}$$

i en omgivning till punkten $(1,2,3)$ definierar $\mathcal{C}^1$-funktioner $x(y)$ och $z(y)$. Bestäm $x(2)$ och $z(2)$. Räkna också ut $x'(y)$ och $z'(y)$, och speciellt $x'(2)$ och $z'(2)$.

3.20 Visa att den del av skärningen mellan ytorna $x^2+y^2-z^2=2$ och $x+y=2e^z$ som ligger i ett tillräckligt litet klot med mittpunkt i $(1,1,0)$ är en $\mathcal{C}^1$-kurva som kan parametriseras med x som parameter. Bestäm också en tangentvektor till kurvan i denna punkt.

3.21 Om $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,f_3)$ är en vektorvärd funktion från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^3$, definiera den s.k. divergensen

$$\nabla\cdot\boldsymbol{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}.$$

I kontinuumsmekaniken studerar man fluider med densitet ρ och hastighet $\boldsymbol{v}$, och dessa storheter beror både på läget (x_1,x_2,x_3) och tiden t. Läget beror i sin tur på tiden t, så ρ och $\boldsymbol{v}$ kan alltså ses som funktioner av (x_1,x_2,x_3,t) eller bara av t. Visa att den s.k. kontinuitetsekvationen

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0 \quad \text{också kan skrivas} \quad \frac{d\rho}{dt}+\rho\,\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0.$$

4 Optimering

4.1 Avgör om varje reellvärd kontinuerlig funktion på mängden M säkert har ett största och ett minsta värde på mängden ifall M är
(a) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : |x|\le 1,\ |y|<1\}$ (b) $\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 1\}$
(c) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\}$ (d) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : xy\ge 1\}$
Ange en konkret kontinuerlig funktion f som inte antar både största och minsta värde på M i de fall där sådana funktioner finns.

4.2 Bestäm största och minsta värde (om de finns) av

(a) $xy-x-y-4$ då $x\ge 0$, $y\ge 0$ och $x+y\le 6$
(b) x^2+5y^2-4x då $x^2+y^2\le 1$ och $y\ge 0$
(c) $x^2-2xy+4y^2-2y$ på eller innanför triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,-1)$
(d) x^2+y^2+y innanför – men ej på – enhetscirkeln
(e) $(x+2y)e^{-x^2-y^2}$ på eller innanför enhetscirkeln
(f) $(x+y)e^{-x^2-y^2}$ då $x\ge 0$, $y\ge 0$ och $x+y\le 2$
(g) $x^2+2y^2+|x|$ på den slutna enhetsskivan

4.3 Bestäm största och minsta värde av

(a) $x^2-2x+y^2+z^2-4z$ då $x^2+y^2\le z\le 4$
(b) $3x+xy+z^2$ då $x^2+y^2+z^2\le 9$, $z\ge 0$
(c) $(1-x)^3+(1-y)^3+(1-z)^3$ då $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$ och $x+y+z\le 1$
(d) $(x+y+z)e^{-xyz}$ då $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ och $0\le z\le 1$
(e) $(x+2y+3z+4w)e^{-x^2-2y^2-3z^2-4w^2}$ då $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$, $0\le w\le 1$

4.4 Bestäm största och minsta värde (om de finns) av

(a) $\arctan(x^2+2y^2)$ på hela $\mathbf{R}^2$ (b) x^2ye^{-xy} då $0\le x\le 2$ och $y\ge 0$
(c) $\dfrac{e^{y^2-x^2}}{1+y^2}$ då $|y|\le x$ (d) $\dfrac{xy}{4+(x+y)^3}$ då $x\ge 0$ och $y\ge 0$
(e) $(x-y+z)e^{-x^2-y^2-z^2}$ på hela $\mathbf{R}^3$ (f) $(x+y)e^{-x^2-y^2}$ då $x\ge 0$ och $y\ge 0$

4.5 Om $x^2 + y^2 \leq 9$, var antar $x^2 + xy + y^2 - 3y$ sitt största respektive sitt minsta värde, och vilka är dessa värden?

4.6 Bestäm största och minsta avstånd från origo till en punkt (x, y) på kurvan $x^4 + 2y^4 = 6$.

4.7 Bestäm maximum och minimum av xy på ellipsbågen $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16$, $x + y \geq 2$.

4.8 En burk med höjd h och diameter d har en given volym V_0. Bestäm förhållandet mellan d och h då den sammanlagda arean av cylinderns sidoytor är så liten som möjligt. Motivera varför det finns en minsta area; vilken är denna area?

4.9 Bestäm den punkt på kurvan $(x - y)^2 - x - y + 1 = 0$ som ligger närmast x-axeln.

4.10 En 60 cm bred plåtremsa skall vikas till en öppen ränna så att dess tvärsnitt blir ett parallelltrapets med de ickeparallella sidorna lika långa. Bestäm maximala tvärsnittsarean.

4.11 Visa att $f(x, y) = x^2(1 + y)^3 + y^2$ har exakt en stationär punkt och att den är en lokal minimipunkt. Visa också att f ändå inte har något minsta värde.

4.12 Om (x, y, z) uppfyller $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, bestäm största och minsta värdet av $xy + xz$.

4.13 Bestäm maximum och minimum av $f(x, y, z) = 2z^2 + y^2 - x^2 - x$ på
(a) klotet $K : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$,
(b) cylindern $C : x^2 + y^2 \leq 1$, $z^2 \leq 1$,
(c) dubbelkonen $D : x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1$.
(d) Hur kan man för godtycklig kontinuerlig f inse att

$$\min_C f \leq \min_K f \leq \max_K f \leq \max_C f \qquad \text{och} \qquad \min_C f \leq \min_D f \leq \max_D f \leq \max_C f \ ?$$

Finns ett liknande allmänt samband för K och D?

4.14 Bestäm största och minsta avstånd från origo till punkter på ytan $3x^2+y^2+3z^2+2xy+yz = 3$ (som är en kompakt mängd i $\mathbf{R}^3$).

4.15 Bestäm en låda med given volym V_0 där sidoytornas sammanlagda area är så liten som möjligt om lådan saknar lock. Motivera varför det finns en minsta area.

4.16 Bestäm en låda med så stor volym som möjligt med given sammanlagd area A_0 av sidoytorna om lådan har lock.

4.17 Bestäm största möjliga volym av en parallellepiped i $\mathbf{R}^3$ med kanterna parallella med koordinataxlarna och hörnen på ellipsoiden $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

4.18 Ett tält utan botten har två likbenta trianglar som gavlar och två rektanglar som lutande sidor. Bestäm tältets höjd, bredd och längd då det innehåller en given volym V_0 och den sammanlagda arean av tältduken är så liten som möjligt. Motivera, som alltid, varför det finns en minsta area!

4.19 Bestäm största värdet av $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ då α, β och γ är vinklarna i en triangel.

4.20 Bestäm största och minsta värdet (om de existerar) av $e^{-x^2-2y^2-3z^2}$ då $xyz \geq 6$, $x > 0$, $y > 0$ och $z > 0$.

4.21 Bestäm största och minsta värdet av $x + y + z$ då $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

4.22 Om $x + y + z = 1$ och $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, hur stort och hur litet kan xyz vara?

4.23 Bestäm största och minsta värdet av $3x + 2y + z$ då $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $x + y + z \geq 1$.

4.24 Bestäm största och minsta avståndet från origo till punkterna på skärningskurvan mellan ytorna $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ och $x + y + z = 1$.

4.25 Bestäm största och minsta värdet av $2x - 2y + z$ då $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ och $x^2 + y^2 \leq z$.

4.26 Vilka punkter ligger högst respektive lägst på skärningskurvan mellan planet $x + y + z = 1$ och ellipsoiden $x^2 + xz + y^2 + 2z^2 = 9$, om positiva z-axeln pekar uppåt?

4.27 Bestäm minsta möjliga volymen av en tetraeder som begränsas av ett tangentplan till ytan $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ samt de tre koordinatplanen.

4.28 (a) Låt $f(x, y)$ och $g(x, y)$ vara givna $\mathcal{C}^1$-funktioner och bilda funktionen

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y).$$

Visa att under bivillkoret $g(x, y) = 0$ antar $f(x, y)$ sitt största och sitt minsta värde (om de finns) i punkter där

$$\nabla L = \left(\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial \lambda}\right) = \mathbf{0} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} g = 0, \\ \nabla g = \mathbf{0}. \end{cases}$$

(b) Låt $f(x, y, z)$, $g_1(x, y, z)$ och $g_2(x, y, z)$ vara givna $\mathcal{C}^1$-funktioner och bilda funktionen

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1\, g_1(x, y, z) + \lambda_2\, g_2(x, y, z).$$

Visa att under bivillkoren $g_1(x, y, z) = 0$ och $g_2(x, y, z) = 0$ antar $f(x, y, z)$ sitt största och sitt minsta värde (om de finns) i punkter där

$$\nabla L = \left(\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial z}, \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial L}{\partial \lambda_2}\right) = \mathbf{0} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} g_1 = 0, \\ g_2 = 0, \\ \nabla g_1, \nabla g_2 \text{ är linjärt beroende.} \end{cases}$$

Anmärkning: Detta är ett vanligt sätt att studera optimering med bivillkor. Funktionen L kallas *Lagrangefunktionen* och talen λ_1, λ_2, ... (Lagrange)multiplikatorer.

4.29 Maximera $x^4 + y^4 + z^4$ på skärningen mellan sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och planet $x + y + z = 0$.

6 Integralkalkyl

Om inget annat sägs i uppgifterna avser de exakt beräkning av angiven integral.

Dubbelintegraler

6.1 Vi vill få en uppfattning om storleken på integralen

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{3 + x^2 - y},$$

där D är kvadraten $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$.

(a) Visa med enkla under- och överskattningar att $\dfrac{4}{7} \leq I \leq 4$.

(b) Vilken uppskattning av I får man om man delar upp D i fyra lika stora kvadrater?

6.2 (a) $\displaystyle\iint_D (x + y)^2\, dxdy$, där $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

(b) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{1 + x + y}$, där D är rektangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ och $(0, 2)$

6.3 Låt D vara triangeln i xy-planet som ges av olikheterna $0 \leq y \leq 2x \leq 4$. Skriv integralen
$$\iint_D (xy + y^2)\,dxdy$$
dels som $\displaystyle\int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} (xy + y^2)\,dy \right) dx$, dels som $\displaystyle\int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} (xy + y^2)\,dx \right) dy$, och räkna sedan ut den på valfritt sätt.

6.4 (a) $\displaystyle\iint_D (x - y)e^{x+y}\,dxdy$, där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(0,2)$ och $(2,2)$

(b) $\displaystyle\iint_D (2 + x + y)\,dxdy$, där $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x + y \geq -2,\ x \leq 0,\ y \leq 0\}$

(c) $\displaystyle\iint_D e^{x^2}\,dxdy$, där D begränsas av sträckorna mellan $(0,0)$, $(-1,0)$ och $(-1,1)$

(d) $\displaystyle\iint_D \frac{x^3}{1 + y^5}\,dxdy$, där $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 2y \leq 1\}$

(e) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^2 + 2x}$, där D är triangeln med hörnpunkterna $(2,0)$, $(2,2)$ och $(4,0)$

(f) $\displaystyle\iint_D \frac{x + 2xy}{1 + y^2}\,dxdy$, där D ges av olikheterna $0 \leq x \leq y \leq 1$

6.5 (a) $\displaystyle\iint_D x^3 y\,dxdy$, där $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^4 \leq y \leq 3,\ x \geq 0\}$

(b) $\displaystyle\iint_D x \cos\sqrt{y}\,dxdy$, där D ges av dubbelolikheten $\sqrt{y} \leq x \leq 2$

(c) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$, där D är den del av enhetscirkelskivan som ligger i fjärde kvadranten

6.6 Låt D vara kvadraten med sidlängd 1 och två av hörnen i $(0,0)$ och $(1,1)$. Beräkna

(a) $\displaystyle\iint_D |x - y|\,dxdy$ (b) $\displaystyle\iint_D \max(x^2, y)\,dxdy$

6.7 Beräkna $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$, där D är den begränsade mängd i $\mathbf{R}^2$ som avgränsas av parabeln $y^2 = 4ax$ och linjen $y = 2x - 4a$ med en konstant $a > 0$.

6.8 (a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt[3]{x}}^1 \frac{dy}{\sqrt{1 + y^8}} \right) dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^y \frac{y\,dx}{(4 - x^2 - y^2)^{3/2}} \right) dy$

6.9 (a) $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy$, där D är cirkelskivan med centrum i origo och radie 2

(b) $\displaystyle\iint_D \frac{x\,dxdy}{1 + (x^2 + y^2)^{3/2}}$, där $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2,\ x \leq 0\}$

(c) $\displaystyle\iint_D (x + 2y)\,dxdy$, där D bestäms av olikheterna $x^2 + y^2 \leq 1$ och $x + 2y \geq 0$

(d) $\displaystyle\iint_D |x + y|\,dxdy$, där D är enhetsskivan

6.10 (a) $\displaystyle\iint_D (x + 2y)\cos(2x + y)\,dxdy$, där D ges av $0 \leq x + 2y \leq 1$ och $-1 \leq 2x + y \leq 1$

(b) $\displaystyle\iint_D (x+2y)\exp(x-2y)\,dxdy$, där D är romben med hörn $(0,0)$, $(2,1)$, $(4,0)$ och $(2,-1)$

(c) $\displaystyle\iint_D \frac{x - y + 1}{x + y}\,dxdy$, där D bestäms av att $1 \leq x + y \leq 2x - 4y \leq 3$

(d) $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy$, där D är parallellogrammen med hörn i $(1,1)$, $(3,2)$, $(4,5)$ och $(2,4)$

(e) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(1 + x^2 - y^2)^2}$, där D är triangeln med hörn $(0,0)$, $(1,-1)$ och $(3,1)$

6.11 (a) $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$, där D är ellipsskivan $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le 1$

(b) $\iint_D x^3\,dxdy$, där $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : 1\le x^2+9y^2\le 9,\ x\ge 3y\}$

(c) $\iint_D x\,dxdy$, där D bestäms av $x^2+2xy+4y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0$

6.12 Låt D vara den mängd i xy-planet som ges av $x^2+y^2\le 2x$. Beräkna
(a) $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$ (b) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$

6.13 Beräkna $\iint_D y^2\sin y^2\,dxdy$, där D ges av $1\le xy\le 2$ och $0<x\le y\le 2x$.

6.14 Beräkna $\iint_{D(a)} \sin(x^2+y^2)\,dxdy$, där $D(a)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x^2+y^2\le a,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$. Hur stor kan denna integral bli då a varierar?

6.15 Visa olikheten

$$\iint_E (x^2+y^2)\,dxdy \ge \frac{A^2}{2\pi},$$

där E är en (eventuellt vriden) ellips med medelpunkt i origo och area A. När gäller likhet?

Trippelintegraler

6.16 Låt D vara det axelparallella rätblocket med två av hörnen i $(0,0,0)$ och $(1,2,4)$ och betrakta integralen

$$I=\iiint_D (\sqrt[3]{x}+y+\sqrt{z})\,dxdydz.$$

Emil räknar ut den och får $I=50$. Visa med en enkel uppskattning att hans svar måste vara fel och räkna sedan ut I exakt.

6.17 $\iiint_D (x^2+y^2)z\,dxdydz$, där D är en cylinder med höjd 2, radie 3 och med z-axeln som symmetriaxel.

6.18 Låt D vara den mängd som begränsas av paraboloiden $z=x^2+y^2$ och planet $z=1$. Skriv integralen

$$I=\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$$

dels m.h.a. stavar: $I=\iint_{\tilde{D}}\left(\int_{A(x,y)}^{B(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dxdy$ (ange $\tilde{D}$, $A(x,y)$ och $B(x,y)$),

dels m.h.a. skivor: $I=\int_a^b\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy\right)dz$ (ange a, b och D_z),

och räkna sedan ut den på valfritt sätt då $f(x,y,z)=z\sqrt{x^2+y^2}$.

6.19 Låt D vara den mängd som begränsas av planet $x+y+z=1$ och koordinatplanen. Skriv

$$I=\iiint_D \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} \quad\text{som}\quad I=\int_a^b\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\left(\int_{A(x,y)}^{B(x,y)}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}\right)dy\right)dx$$

och beräkna även integralens värde.

6.20 Beskriv mängden $D=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : 0\le z\le y\le x^2\le 1\}$ genom att projicera den på
(a) x-axeln och ange alla icke-tomma skivor (chips?) D_x för konstant x
(b) y-axeln och ange D_y (c) z-axeln och ange D_z
(d) xy-planet och ange alla icke-tomma stavar (pommes?) D_{xy} för konstant (x,y)
(e) xz-planet och ange D_{xz} (f) yz-planet och ange D_{yz}.

6.21 $\displaystyle\iiint_D \frac{z}{1+x^2}\,dxdydz$, där D är mängden i övning 6.20.

6.22 $\displaystyle\iiint_D (y^2+z^2)\,dxdydz$, där D är den cirkulära (enkel)konen med spetsen i origo, z-axeln som symmetriaxel samt höjd 1 och radie 2. (Värdet är konens tröghetsmoment m.a.p. x-axeln)

6.23 $\displaystyle\iiint_D ye^z\,dxdydz$, där $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x - y \le z \le x + y,\ |x| + |y| \le 1\}$.

6.24 $\displaystyle\iiint_D 2x\,dxdydz$, där D är den begränsade mängden i positiva oktanten mellan koordinatplanen, planet $y - z = 0$ och ytan $z = 4 - x^2$.

6.25 Emilia räknar ut integralen

$$\iiint_D 3z\,dxdydz,$$

där D är den del av enhetsklotet som ligger i övre halvrummet $z \ge 0$ och får värdet 3π. Förklara för henne varför varje svar som är större än 2π måste vara fel, och räkna sedan ut integralens exakta värde.

6.26 (a) $\displaystyle\iiint (z^2 - x^2 - y^2)\,dxdydz$ över enhetsklotet

(b) $\displaystyle\iiint xe^{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ över den del av enhetsklotet som ligger i halvrummet $x \ge 0$

(c) $\displaystyle\iiint_D x\,dxdydz$, där $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 3,\ 0 \le x \le y\}$

6.27 (a) $\displaystyle\iiint_D (y - x - z)\,dxdydz$, där D är den parallellepiped som bestäms av de tre dubbelolikheterna $0 \le x + y + z \le 1$, $0 \le x + 2y + 3z \le 1$ och $0 \le x + 4y + 9z \le 1$.

(b) $\displaystyle\iiint_D x\,dxdydz$, där D är tetraedern med hörn i $(0,0,0), (1,1,0), (1,0,1)$ och $(0,1,1)$.

6.28 $\displaystyle\int \cdots \int_D (x_1 + \ldots + x_n)\,dx_1 \cdots dx_n$, där $D = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n : 0 \le x_k \le 1,\ k = 1,\ldots,n\}$.

Integraltillämpningar

6.29 Beräkna arean av (a) $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x + 2y| + |3x - y| \le 1\}$
(b) den begränsade mängden mellan kurvorna $xy = 1$, $xy = 2$, $y = 2x^2$ och $y = 4x^2$ i $\mathbf{R}^2$

6.30 (a) Räkna ut volymen av ellipsoiden $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1$, där a, b och c är positiva konstanter.

(b) Vilken volym har mängden innanför ytan $3x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz = 1$?

6.31 Beräkna volymen av den tetraeder som avgränsas av planen $2x + y + z = 0$, $x + 2y + z = 0$, $x + y + 2z = 0$ och $x + y + z = 4$.

6.32 (a) Bestäm volymen av den del av elliptiska cylindern $9x^2 + 4y^2 \le 36$ som ligger mellan planen $x + y + z = 10$ och $x + y - z = 10$.

(b) Vilket rymdmått har den begränsade mängden mellan paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $2x + 2y + z = 1$?

6.33 Låt D vara den mängd i positiva oktanten som avgränsas av ytan $x + y^2 + z = 1$ och koordinatplanen. Låt V beteckna volymen av D.

(a) Visa att D är en del av enhetskuben $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$. Mellan vilka gränser måste V därmed ligga?

(b) Beräkna V exakt.

6.34 Beräkna volymen av $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z \ge y^2,\ y \ge x^2,\ x \ge z^2\}$.

6.35 Beräkna volymen av skärningsmängden av (a) två cylindrar (b) tre cylindrar som har samma radie $a > 0$ och ligger så att deras axlar har en gemensam punkt där de skär varandra vinkelrätt.

6.36 Insidan av ett glas är en paraboloid $z = x^2 + y^2$, där enheten är cm. Beräkna volymen av en vätska i glaset då det fylls till höjden 5 cm från insidans botten.

6.37 I ett klot med radie a borras två cylindriska hål med radie $a/2$ så att de tangerar varandra längs en linje genom klotets medelpunkt. Beräkna volymen av det som är kvar av klotet.

6.38 Genom en rät cirkulär kon med höjd h och radie $2a$ borras ett cylindriskt hål vinkelrätt mot konens basyta så att skärningen med denna är en cirkel med en radie i basytan som diameter, d.v.s. konens symmetriaxel är en linje som ligger i cylinderns mantelyta. Beräkna volymen av det som är kvar av konen.

6.39 Beräkna massan av ett halvklot där densiteten i en punkt (x, y, z) är (a) en konstant ρ (b) en konstant k gånger avståndet från (x, y, z) till motsvarande hela klots medelpunkt.

6.40 Beräkna massan av innehållet i en 8 m hög cylindrisk silo med radie 3 m, om densiteten är $(10 - h)^2(4 - \rho)$ kg/m^3 i en punkt h m från botten och ρ m från silons lodräta axel.

6.41 Bestäm tyngdpunkten för ett halvklot där densiteten (a) är konstant (b) i en punkt är proportionell mot avståndet från punkten till motsvarande hela klots medelpunkt.

6.42 Bestäm z-koordinaten för tyngdpunkten för en tetraeder med hörn i $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ och $(0, 0, h)$, där $a > 0$, $b > 0$ och $h > 0$, och densiteten är konstant.

Generaliserade dubbel- och trippelintegraler

6.43 (a) $\displaystyle\iint_{D_n} e^{-x-y}\,dxdy$, där $D_n = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le n \text{ och } 0 \le y \le n\}$

(b) $\displaystyle\iint_{D_n} e^{-x-y}\,dxdy$, där $D_n = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + y \le n,\ x \ge 0 \text{ och } y \ge 0\}$

(c) $\displaystyle\iint_{D} e^{-x-y}\,dxdy$, där D är första kvadranten, genom att använda (a) eller (b)

6.44 (a) $\displaystyle\iint \frac{xy\,dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^3}$ över första kvadranten (b) $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} x^2 e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$

6.45 $\displaystyle\iint_D \frac{x}{y}\,dxdy$, där $D \subset \mathbf{R}^2$ ges av (a) $0 < y \le x \le 1$ (b) $0 \le x \le y \le 1$, $y > 0$

6.46 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{xy}}$, där $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + y \le 1,\ x > 0,\ y > 0\}$

6.47 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{1 + (x + y)^4}$, där D är första kvadranten i $\mathbf{R}^2$

6.48 $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-xy-y^2}\,dxdy$

6.49 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(1-x-y)^\alpha}$ för alla α, där D ges av olikheterna $x+y<1$, $x\geq 0$ och $y\geq 0$

6.50 $\displaystyle\iiint_D \frac{\exp(-\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz$, där D är hela $\mathbf{R}^3$ förutom origo

6.51 $\displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, där D ges av olikheterna $\sqrt{x^2+y^2}<z<1$

6.52 (a) $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{x\,dxdy}{x^2+y^2+1}$ (b) $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{x\,dxdy}{(x^2+y^2)^2+1}$

(c) $\displaystyle\iint_D (x-2y)e^{-2x-y}\,dxdy$, där D är första kvadranten i $\mathbf{R}^2$

6.53 Låt $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Beräkna (a) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$ (b) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy$ (d) $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$, där D är kvadraten $0<x<1$, $0<y<1$

6.54 Låt D vara sektorn $0\leq y\leq x$. Beräkna

(a) $\displaystyle\iint_D (1-x+y)e^{-x+y}\,dxdy$ (b) $\displaystyle\iint_D (1-x+y)e^{-2x+y}\,dxdy$

Svar

Funktioner av flera variabler

1.1 (a) Den slutna övre halvan av enhetscirkelskivan.
(b) Tårtbiten $\pi/4 < \varphi < \pi/2$ utskuren ur ellipsskivan $x^2 + 2y^2 \leq 2$.
Randpunkterna är punkterna på de kurvstycken som begränsar mängderna.

1.2 (a) Kvadraten med hörn i $(\pm 1, 0)$ och $(0, \pm 1)$, exklusive kvadratens sidor
(b) Kvadraten med hörn i $(\pm 1, \pm 1)$ (fyra punkter), inklusive kvadratens sidor

1.3 (a) Cirkeln med medelpunkt $(1, 2)$ och radie 4. (b) De två linjerna $x + 2y = \pm 2$.
Inre punkter saknas. Randpunkterna är punkterna i respektive mängd.

1.4

Övning 1.1	(a) Ej öppen; sluten; begränsad	(b) Ej öppen; ej sluten; begränsad
Övning 1.2	(a) Öppen; ej sluten; begränsad	(b) Ej öppen; sluten; begränsad
Övning 1.3	(a) Ej öppen; sluten; begränsad	(b) Ej öppen; sluten; ej begränsad

1.5 (a) M är intervallet $]0, 1]$ i $\mathbf{R}$, inre punkter är $]0, 1[$, randpunkter är 0 och 1
(b) M är hela $\mathbf{R}$, inre punkter är hela $\mathbf{R}$, randpunkter saknas
(c) M är tom, inre punkter saknas, randpunkter saknas
(d) M är en lodrät strimma i $\mathbf{R}^2$. Inre punkter är alla punkter i M. Randpunkter är alla punkter på linjerna $x = 0$ och $x = 1$, som begränsar strimman
(e) M är sträckan mellan $(0, 0)$ och $(1, 0)$ i $\mathbf{R}^2$ utom ändpunkterna. Inre punkter saknas och randpunkter är alla punkter på sträckan inklusive ändpunkterna

1.6 Öppna: (b), (c), (d) Slutna: (b), (c) Begränsade: (a), (c), (e)

1.7 (a) En del av en cirkelring i första kvadranten
(b) Två begränsade områden i första och tredje kvadranterna som avgränsas av fyra hyperbler.

1.8 (a) Cylinder längs z-axeln
(b) Paraboloid runt positiva z-axeln
(c) Dubbelkon runt z-axeln
(d) En cylinder med radie 1/2 som tangerar z-axeln

1.9 (a) Tetraedern med hörn i $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$
(b) Den del av enhetssfären som ligger i positiva oktanten
(c) En dubbel glass-strut
(d) En cirkelskiva vars randcirkel går genom $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$, bl.a.

1.10 Punkten $(1, 1)$

1.11 Nej

1.12 (a) Ett plan (b) En (enkel)kon med z-axeln som symmetriaxel och spets $(0, 0, 0)$
(c) En paraboloid med z-axeln som symmetriaxel (d) Övre halvan av enhetssfären

1.13 (a) Nivåkurvorna är parallella linjer med normal $(1, 2)$. Ytan är ett plan med normal $(1, 2, -1)$.
(b) Ingen nivåkurva för $C = -2$. $C = -1$ ger punkten $(1, 0)$. $C = 0$, 1 och 2 ger cirklar med medelpunkt $(1, 0)$ och radie 1, $\sqrt{2}$ och $\sqrt{3}$, respektive. Ytan är en paraboloid med vertex i $(1, 0, -1)$.
(c) Nivåkurvorna är koordinataxlarna om $C = 0$, annars hyperbler med koordinataxlarna som asymptoter. Ytan är en hyperbolisk paraboloid (sadelyta).
(d) Inga nivåkurvor om $C = -2$ eller -1. $C = 0$ ger punkten $(0, 0)$. $C = 1, 2$ ger ellipser. Ytan är en elliptisk paraboloid (kramad skål).

1.14 (a) $f(x,y) = (x+y)e^{-(x+y)^2} + 1$ (b) $f(x,y) = x^2y^2\cos xy$

1.15 (a) Ja, $g(t) = e^{-t} - t^2$ (b) Nej (c) Ja, $t = x - 2y$ och $g(t) = t^2e^t + 1$, t.ex.

1.16 $g(s,t) = st$. Nivåkurvorna är hyperbler. Hyperblerna i det ena systemet fås genom att vrida hyperblerna i det andra vinkeln $\pi/4$. Variabelbytet är en vridning vinkeln $\pi/4$ följd av en sträckning.

1.17 (a) $g(t) = h(t) = \dfrac{t}{2}$ (b) $g(t) = \dfrac{t^2}{4}$, $h(t) = -\dfrac{t^2}{4}$ (c) Nej! (motivera noga)
(Alla lösningar i (a) ges av $g(t) = t/2 + C$ och $h(t) = t/2 - C$ (samma C); p.s.s. i (b))

1.18 (a) Grafen för f är övre halvan av den enmantlade hyperboloiden $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
(b) Grafen för f är övre halvan av den tvåmantlade hyperboloiden $x^2 + y^2 - z^2 = -1$.
Grafen för f fås genom att rotera grafen för g kring z-axeln.

1.19 $g(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$. Variabeln $t = \dfrac{y}{x}$ är lutningen för linjer genom origo.

1.21 (a) 0 (b) Existerar ej (c) 0 (d) Existerar ej (e) 0 (f) Existerar ej

1.22 (a) 1 (b) 1 (c) 0 (se efter vad nämnaren och täljaren går mot)

1.23 (a) Existerar ej (b) 0 (c) Existerar ej

1.24 (a) 0 (b) 0 (c) Existerar ej (d) 1

1.25 (a) 0 (b) 1 (c) 0

1.27 (a) $\dfrac{1}{2}$ (b) 0 (c) Existerar ej

1.28 f är kontinuerlig i alla punkter utom origo. Ja, $f(0,0) = 0$.

1.29 (a) $f(0,0) = 1$ (b) Nej (c) $f(0,0) = 3$ (d) $f(0,0) = 0$

1.30 (a) Nej (b) $f(-1,0,0) = 0$

Differentialkalkyl för reellvärda funktioner

2.1 (a) $f'_x = 1 + 3x^2y + 2xy^3$, $f'_y = x^3 + 3x^2y^2 + 5y^4$
(b) $f'_x = -\dfrac{2x}{1-x^2-2y^2}$, $f'_y = -\dfrac{4y}{1-x^2-2y^2}$
(c) $f'_x = 0$, $f'_y = -2ye^{-y^2}\arcsin 2y + \dfrac{2e^{-y^2}}{\sqrt{1-4y^2}}$
(d) $f'_x = -\dfrac{2y}{(x-y)^2}$, $f'_y = \dfrac{2x}{(x-y)^2}$

2.2 (a) $f'_x = -y\sin(xy - z^2)$, $f'_y = -x\sin(xy - z^2)$, $f'_z = 2z\sin(xy - z^2)$
(b) $f'_x = -\dfrac{y}{(x^2+y^2)\sqrt{z}}$, $f'_y = \dfrac{x}{(x^2+y^2)\sqrt{z}}$, $f'_z = -\dfrac{1}{2z\sqrt{z}}\arctan\dfrac{y}{x}$
(c) $f'_x = y^z x^{y^z - 1}$, $f'_y = x^{y^z} z y^{z-1}\ln x$, $f'_z = x^{y^z} y^z (\ln x)(\ln y)$

2.3 $f''_{xx} = 6xy + 2y^3$, $f''_{xy} = 3x^2 + 6xy^2$, $f''_{yx} = 3x^2 + 6xy^2$, $f''_{yy} = 6x^2y + 20y^3$

2.4

$$f'_x = \begin{cases} 1 & \text{i } (0,0), \\ \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{annars;} \end{cases} \qquad f'_y = \begin{cases} 0 & \text{i } (0,0), \\ \dfrac{4x^2y^3 + 2y^5 - 2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{annars.} \end{cases}$$

2.6 (a) $f'_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & \text{då } y \neq 0, \\ 0 & \text{då } y = 0; \end{cases}$ $f'_y(x,y) = \begin{cases} 2y \arctan \dfrac{x}{y} - \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{då } y \neq 0, \\ 0 & \text{då } y = 0. \end{cases}$
(b) $f''_{xy}(0,0) = 1$, $f''_{yx}(0,0) = 0$. $f \notin \mathcal{C}^2$

2.7 (a) $z = x^2 + xy + y^2 + C$ (b) Lösning saknas (c) $z = y(1+e^x) + C$

2.9 (a) $u = xy + 3xz + 2yz - 3x - 2y - z + C$ (b) $u = x + (y+z)e^z - \cos xy + C$ (c) Saknas

2.10 (a) $f(x) = \cos x$, som ger $z = y^3 \sin x - xy^2 \cos x + C$ (b) Lösning z saknas för alla f
(c) $f(x) = Ce^{x^2}$, som ger $z = Cye^{x^2} + x^2 - y^2 + D$

2.11 (a) $z = g(y)$ (b) $z = g(x)$ (c) $z = g(y)x + h(y)$ (d) $z = g(x) + h(y)$
(e) $z = g(y)e^x$ (f) $z = g(y)e^{xy}$ (g) $z = g(y)e^{x^2/2}$ (h) $z = g(x)\cos(ye^x) + h(x)\sin(ye^x)$
(Här är g och h godtyckliga $\mathcal{C}^2$-funktioner av en variabel)

2.12 (a) $z = 7x + 4y - 10$ (b) $z = 2x$ (c) $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{2z}{\sqrt{3}} + \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

2.13 (a) $2\,dx - 3\,dy + dz$ (b) $y^2 \cos xy^2\,dx + 2xy \cos xy^2\,dy$ (c) $\dfrac{V}{T}\,dp + \dfrac{p}{T}\,dV - \dfrac{pV}{T^2}\,dT$

2.14 $P = 50$ W och (a) ökar med ca 0,5 W (b) minskar med ca 2 W

2.15 $R = 120 \pm$ ca 0,34 Ω

2.16 Volymen ökar med ca 5 %

2.19 (b) $z'_x(x,y) = f'(x-y)$, $z'_y(x,y) = -f'(x-y)$ (c) $f(t) = \sin t$ respektive $f(t) = 1 + te^{-t}$

2.20 $z'_x(x,y) = f'(\dfrac{x}{y}) \cdot \dfrac{1}{y}$, $z'_y(x,y) = -f'(\dfrac{x}{y}) \cdot \dfrac{x}{y^2}$. Ja, med $f(t) = t - \dfrac{1}{t}$

2.21 (a) $\begin{cases} z'_x = z'_u + yz'_v \\ z'_y = z'_u + xz'_v \end{cases}$ (b) $\begin{cases} z'_x = 2xz'_u + 2yz'_v \\ z'_y = -2yz'_u + 2xz'_v \end{cases}$ (c) $\begin{cases} z'_x = 2yz'_u \\ z'_y = 2xz'_u - z'_v/y^2 \end{cases}$

2.22 (a) $2z'_v = 0$ ger $z = g(u) = g(x-y)$, g deriverbar (b) $z = y - x - \cos(x-y)$

2.23 (a) 2 respektive 0 (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial v}$. Olika saker hålls konstanta (y respektive u)

2.25 $f(u) = Ae^{-u/4} + B$, $u > 0$, ger $T = Ae^{-\rho^2/4t} + B$

2.26 $z'_v = -1 - u/v^2$ ger $z = xy - y + g(xy^2)$, där $g \in \mathcal{C}^1$. $z = xy - y + e^{-y\sqrt{x}}$

2.27 $f(x,y) = g(y/x)/x$, $g \in \mathcal{C}^1$

2.28 $f'_x(0,0) = \dfrac{a+b}{3}$, $f'_y(0,0) = \dfrac{a-2b}{3}$

2.29 (b) Om $v = x$ får man $az'_v = 0$ som ger $z(x,y) = g(f(x,y))$, där g är en $\mathcal{C}^1$-funktion
(c) Uppgift 2.22: $\dfrac{dy}{dx} = 1$ och $f(x,y) = x - y$; uppgift 2.26: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{2x}$ och $f(x,y) = xy^2$
(d) $z = g(x^2 + x + y^2 - y)$, där g är en $\mathcal{C}^1$-funktion

2.30 $\dfrac{d^2y}{du^2} + 2\dfrac{dy}{du} - 3y = 5e^{2u}$, som ger $y = x^2 + Ax + \dfrac{B}{x^3}$, där A och B är konstanter

2.31 $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial u} + 2x\dfrac{\partial z}{\partial v}$, $\dfrac{d^2z}{dx^2} = \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 4x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial z}{\partial u} + 2\dfrac{\partial z}{\partial v}$

2.32 (a) $z''_{vv} = 6u - 12v$ som ger $z = 4x^3 + 3x^2y + x\,g(2x+y) + h(2x+y)$ där $g \in \mathcal{C}^2$, $h \in \mathcal{C}^2$
(b) $z = 4x^3 + 3x^2y + x\,g(2x+y) + e^{-(2x+y)^2}$ där $g \in \mathcal{C}^2$
(c) $z = 4x^3 + 3x^2y + 4x(2x+y)e^{-(2x+y)^2} + e^{-(2x+y)^2}$
(d) $z = 16x^3 + 15x^2y + 3xy^2 + Cx(2x+y)^3$ (om vi antar att $z \in \mathcal{C}^3$)

2.33 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + u\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + v\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \dfrac{\partial z}{\partial v}$

2.34 $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \dfrac{uv}{2}$, som ger $z = \dfrac{x^2}{4} + g(2xy) + h(1/y) = \dfrac{x^2}{4} + \tilde{g}(xy) + \tilde{h}(y)$

2.35 $a = \dfrac{1}{2}$ och $b = -\dfrac{1}{3}$ ger $f(x,y) = \dfrac{6}{25}\left(x + \dfrac{y}{2}\right)\left(x - \dfrac{y}{3}\right) + g\left(x + \dfrac{y}{2}\right) + h\left(x - \dfrac{y}{3}\right)$

2.36 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$ (ekvationen ser alltså likadan ut i det nya koordinatsystemet)

2.37 (a) $\dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \cos\varphi \dfrac{\partial u}{\partial x} + \sin\varphi \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi \dfrac{\partial u}{\partial x} + \rho\cos\varphi \dfrac{\partial u}{\partial y}$

(b) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \cos\varphi \dfrac{\partial u}{\partial \rho} - \dfrac{\sin\varphi}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \sin\varphi \dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{\cos\varphi}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$

(c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$

(d) $\dfrac{d^2 u}{d\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{du}{d\rho} = 0$ ger $u = 2C\ln\rho + D = C\ln(x^2 + y^2) + D$

2.38 Efter förenkling får man $uz''_{uv} - z'_v = 0$ med lösning $z = g(x) + x\,h(x/y)$

2.39 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_y = y^2$, $\quad \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_z = y^2 - 4xy$

2.41 $(z'_x)'_u = (y)'_u = (\sqrt{u/v})'_u = 1/(2\sqrt{uv}) = 1/(2x)$, medan $(z'_u)'_x = (1)'_x = 0$

2.42 (a) $(1,2,3)$ (b) $((y^2 - xy^3)e^{-xy}, (2xy - x^2y^2)e^{-xy})$

2.44 Tangenten $11x + 5y = 17$, normalen $5x - 11y = 21$

2.45 (a) $2x + y = 2$ och $y - x = 2$ (två tangentlinjer) (b) Finns inga! (c) $2x + y = -2$

2.46 $\pm(2,1)$, i båda fallen $\pi/2$

2.47 $\pi/4$ i $(0,0)$ och $\arccos(1/\sqrt{5})$ i $(0,\pm 1)$

2.48 $(1, \pm\sqrt{2})$

2.49 (a) $3x - 4y - 3z = 20$ (b) $4x - 4y + z = -8$

2.50 $\pm\left(\dfrac{5}{\sqrt{13}}, -\dfrac{4}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$

2.51 $x + 2y + 3z = 6$ och $x + 2y - 3z = 6$

2.52 $C = 11$

2.53 Finns inga sådana C

2.54 (a) $\nabla f(x,y) = (f'_x, f'_y) \in \mathbf{R}^2$ pekar i den riktning i xy-planet där f växer snabbast.
(b) $\nabla F(x,y,z) = (f'_x, f'_y, -1) \in \mathbf{R}^3$ är en normalvektor till ytan S.

2.55 (a) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

2.56 Den avtar med hastigheten $\dfrac{72}{\sqrt{14}}$ enheter per längdenhet

2.57 (a) sjunker 2 °C/km (b) stiger $\dfrac{5}{\sqrt{2}} \approx 3{,}5$ °C/km (c) stiger $2\cos\dfrac{\pi}{8} - 3\sin\dfrac{\pi}{8} \approx 0{,}7$ °C/km

2.58 Björnen bör lufsa i en riktning som pekas ut av vektorn $(-4,-1)$. Temperaturen sjunker $5\sqrt{17}/6 \approx 3{,}4$ °C/km respektive $3\sqrt{17}/20 \approx 0{,}62$ °C/min i denna riktning i punkten $(1,-2)$.

2.59 (a) $f'_{\boldsymbol{v}}(P) = a + 2b$ är positiv då $a + 2b > 0$, negativ då $a + 2b < 0$ och noll då $a = -2b \neq 0$
(b) $a + 2b > 0$ eller $a = -2b < 0$ (där $\boldsymbol{v} = (a, b)$)

2.60 Kullen är brantast på cirkeln $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{3}$, $z = 3$, och lutningen där är $\arctan \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \approx 69°$

2.61 $(x, y, z) = (x, x^2, 4 - x^2 - 2x^4)$, $x \geq 1$

2.62 (a) Lokalt maximum (b) Lokalt minimum (c) Ingetdera
(d) Ingetdera (e) Lokalt maximum (f) Ingetdera
(g) Ingetdera (h) Ingetdera (i) Lokalt minimum

2.64 (a) $-1 - y + x^2 + \dfrac{1}{2}y^2 + \mathcal{O}(\rho^3)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
(b) $2x^2 + 2xy + y^2 + \mathcal{O}(\rho^3)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
(c) $1 + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{4}y^2 + \dfrac{1}{2}z^2 - xz + \mathcal{O}(r^3)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2.65 $f(2 + h, -1 + k) = \ln 7 + h - \dfrac{3}{14}h^2 + \dfrac{1}{7}hk + \dfrac{1}{7}k^2 + \mathcal{O}(\rho^3)$, alternativt
$f(x, y) = \ln 7 + (x - 2) - \dfrac{3}{14}(x - 2)^2 + \dfrac{1}{7}(x - 2)(y + 1) + \dfrac{1}{7}(y + 1)^2 + \mathcal{O}(\rho^3)$,
där $\rho = \sqrt{h^2 + k^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2}$

2.66 (a) $Q(h, k) = (h - k/2)^2 + 3k^2/4$, positivt definit
(b) $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{5}/2$, indefinit
(c) Indefinit
(d) $Q(h, k, l) = (l - h + 2k)^2 - (h + k)^2 + 3k^2$, indefinit
(e) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -6$, negativt semidefinit
(f) Positivt semidefinit
(g) Positivt semidefinit
(h) Positivt definit
(i) Indefinit

2.67 $|a| < 1$: positivt definit, $|a| = 1$: positivt semidefinit, $|a| > 1$: indefinit

2.68 (a) Ingetdera (b) Lokalt minimum (c) Ingetdera

2.69 (a) Lokalt maximum (b) Ingetdera (c) Lokalt minimum
(d) Ingetdera (e) Lokalt maximum (f) Lokalt maximum

2.70 (a) Lok. max. i $(2, -1)$
(b) Lok. min. i $(-2/3, -1/3, -1)$
(c) Lok. max. i $(1/2, 0)$, lok. min. i $(-1/2, 0)$
(d) Lok. min. i $(2, 2)$; stat. även i $(1, 1)$
(e) Ingenstans; stat. i $(2/5, 4/5)$
(f) Lok. min. i $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$ och $(-1, -1, 1)$; stat. även i $(0, 0, 0)$
(g) Lok. max. i $(-2, -1)$, lok. min. i $(2, 1)$; stat. även i $(1, 2)$ och $(-1, -2)$
(h) Lok. min. i $(-1, -1)$; stat. även i $(2, 2)$
(i) Lok. min. i $(0, 0)$
(j) Lok. max. i $(-1/2, -1, -1)$, lok. min. i $(1/2, 1, 1)$

2.71 (c) $g(x) = 4x^2 - 2x^4 - 1$, max $g(\pm 1) = 1$, lok min $g(0) = -1$, $g(x) \to -\infty$ då $x \to \pm\infty$
(d) $h(y) = 4e^y - 2 - e^{4y}$, max $h(0) = 1$, $h(y) \to -2$ då $y \to -\infty$, $h(y) \to -\infty$ då $y \to \infty$

(f) På vägen från $x = -1$ till $x = 1$ längs $z = f(x, 0)$ (alltså längs vägen mellan topparna) går vi först nedför från $x = -1$ till $x = 0$ och sedan uppför från $x = 0$ till $x = 1$, men hela tiden på skrå, eftersom $f'_y(x, 0) = 4x^2 - 4 < 0$ då $-1 < x < 1$.

2.72 $(0, -2 \pm \sqrt{3})$

2.73 Lokalt minimum i $(0, 0)$

2.74 Nej, den behöver ej vara en lokal minimipunkt. Ett motexempel kan konstrueras m.h.a. övning 2.67.

Differentialkalkyl för vektorvärda funktioner

3.1 (a) En linje; $(1, -2)$, $(1, -2)$ (b) En parabel; $(1, 0)$, $(1, 2)$ (c) En parabel; $(0, 1)$, $(2, 1)$

3.2 (a) En ellips; $(0, 3)$, $(-2, 0)$
(b) En spiral kring $(0, 0)$ där (x, y) närmar sig $(0, 0)$ då $t \to -\infty$; $(1, 1)$, $(-e^{\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}})$
(c) En spiral på cylindern $x^2 + y^2 = 1$; $(0, 1, 1)$, $(-1, 0, 1)$

3.3 $(x, y, z) = (0, 1, 0) + s(1, 0, 1)$, $s \in \mathbf{R}$, respektive $x = z$, $y = 1$

3.4 $(x, y, z) = (0, 0, 2) + u(1, 0, 2) + v(1, 1, 1)$, $(u, v) \in \mathbf{R}^2$, respektive $2x - y - z + 2 = 0$

3.5 (a) Skärningar: $(0, 0)$, $(\pm 1, 0)$; vågräta: $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1)$ (fyra punkter); lodräta: $(\pm 1, 0)$. Kurvan ser ut ungefär som ∞
(b) $y = \pm 2x$
(c) $\dfrac{5}{4}$ i de fyra punkterna $\left(\pm\dfrac{\sqrt{10}}{4}, \pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$

3.6 Funktionalmatrisen $= \begin{pmatrix} 3\cos\psi & -3t\sin\psi \\ 2\sin\psi & 2t\cos\psi \end{pmatrix}$, funktionaldeterminanten $= 6t$

3.7 Funktionalmatrisen $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, funktionaldeterminanten $= -35$; inverterbar

3.8 (a) Inversen är $\begin{cases} x = \ln(u/(1+v)) \\ y = uv/(1+v) \end{cases}$
(b) $\dfrac{d(u, v)}{d(x, y)} = 1 + e^{-x}y$ och $\dfrac{d(x, y)}{d(u, v)} = \dfrac{1}{1+v}$; det gäller att $\dfrac{d(u, v)}{d(x, y)} \cdot \dfrac{d(x, y)}{d(u, v)} = 1$

3.9 (a) Då $(u, v) = (e, 3)$ är $x = 1$, $y = 0$, $x'_u = \dfrac{1}{e-2}$, $x'_v = -\dfrac{1}{e-2}$, $y'_u = -\dfrac{2}{e-2}$, $y'_v = \dfrac{e}{e-2}$
(b) $x'_u = \dfrac{e^y}{e^x e^y - 2}$, $x'_v = -\dfrac{1}{e^x e^y - 2}$, $y'_u = -\dfrac{2}{e^x e^y - 2}$, $y'_v = \dfrac{e^x}{e^x e^y - 2}$
(c) $x''_{uv} = \dfrac{e^x e^y (e^y - 2)}{(e^x e^y - 2)^3}$, $x''_{uv}(e, 3) = -\dfrac{e}{(e-2)^3}$

3.10 (b) Kvadratens hörn avbildas på i tur och ordning $(0, 0)$, (a^2, a), $(a^2 + 2a, 2a)$ och $(2a, a)$, och dess sidor på (delar av) parabeln $u = v^2$, linjen $u = 2v + a^2 - 2a$, parabeln $u = (v - a)^2 + 2a$ och linjen $u = 2v$.
(c) Funktionaldeterminanten $= -2$ i origo. Negativ: randen i uv-planet genomlöps med motsatt orientering i förhållande till randen i xy-planet (medurs istället för moturs). Belopp 2: arean i uv-planet / arean i xy-planet ≈ 2 (mera precist: $\to 2$ då $a \to 0$).

3.11 (a) $4(x^2 + y^2)$
(b) T.ex. avbildas punkterna $(x, y) = (0, \pm 1)$ båda på $(u, v) = (-1, 0)$

(c) $x = \sqrt{\dfrac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}}$, $y = \dfrac{v}{\sqrt{2(u + \sqrt{u^2 + v^2})}}$, $\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)} = \dfrac{1}{4(x^2 + y^2)} = \dfrac{1}{4\sqrt{u^2 + v^2}}$

3.12 $y'(x) = -\dfrac{3x^2 + y - 1}{3y^2 + x - 1}$ i samtliga deluppgifter

(a) $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$ (b) $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (c) $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$

3.13 (a) $x'(y) = \dfrac{2x(y)y}{x(y)^2 - y^2}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$

(b) $x''(y) = \dfrac{2x'(y)y + 2x(y)}{x(y)^2 - y^2} - \dfrac{2x(y)y(2x(y)x'(y) - 2y)}{(x(y)^2 - y^2)^2}$, $x''(0) = 2$, lokalt minimum

(c) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ (två punkter). Ja

3.14 $(0,0)$: $y(x)$ är $\mathcal{C}^1$ och $y'(0) = 1$; $(0,1)$: $y'(0)$ existerar inte ens, ty $y'_-(0) = 0 \neq -2/3 = y'_+(0)$

3.15 $z'_x(x,y) = \dfrac{y - z^2}{2(1 + (x+y)z + \tan^2 2z)}$, $z'_y(x,y) = \dfrac{x - z^2}{2(1 + (x+y)z + \tan^2 2z)}$,

$z(1,-1) = \pi$, $z'_x(1,-1) = -\dfrac{\pi^2 + 1}{2}$, $z'_y(1,-1) = -\dfrac{\pi^2 - 1}{2}$

3.16 (e) $D_f = \mathbf{R}$, $V_f = [2, \infty[$

3.18 $x'_y(y,z) = -\dfrac{2xy}{5x^4 + y^2 + z^4}$, $x'_z(y,z) = -\dfrac{4xz^3}{5x^4 + y^2 + z^4}$

3.19 $x'(y) = \dfrac{(z-y)x}{(x-z)y}$, $z'(y) = \dfrac{(y-x)z}{(x-z)y}$, $x(2) = 1$, $z(2) = 3$, $x'(2) = -\dfrac{1}{4}$, $z'(2) = -\dfrac{3}{4}$

3.20 $(1, -1, 0)$

Optimering

4.1 (a) Nej, $f(x,y) = y$ (b) Ja (c) Ja (d) Nej, $f(x,y) = xy$

4.2 (a) Störst -1 i $(3,3)$, minst -10 i $(6,0)$ och $(0,6)$

(b) Störst 6 i $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, minst -3 i $(1,0)$

(c) Störst 6 i $(0,-1)$, minst 0 i $(0,0)$

(d) Störst saknas, minst $-\dfrac{1}{4}$ i $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$

(e) Störst $\sqrt{\dfrac{5}{2e}}$ i $\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \dfrac{2}{\sqrt{10}}\right)$, minst $-\sqrt{\dfrac{5}{2e}}$ i $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}, -\dfrac{2}{\sqrt{10}}\right)$

(f) Störst $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ i $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, minst 0 i $(0,0)$

(g) Störst $\dfrac{9}{4}$ i $\left(\pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (fyra punkter), minst 0 i $(0,0)$

4.3 (a) Störst 8 i $(-2, 0, 4)$, minst -5 i $(1, 0, 2)$

(b) Störst 12 i $(2, 1, 2)$, minst $-\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$ i $\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}, 0\right)$

(c) Störst 3 i $(0, 0, 0)$, minst $\dfrac{8}{9}$ i $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

(d) Störst 2 i $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ och $(0, 1, 1)$, minst 0 i $(0, 0, 0)$

(e) Störst $\sqrt{\dfrac{5}{e}}$ i $\left(\dfrac{1}{\sqrt{20}}, \dfrac{1}{\sqrt{20}}, \dfrac{1}{\sqrt{20}}, \dfrac{1}{\sqrt{20}}\right)$, minst 0 i $(0, 0, 0, 0)$

4.4 (a) Störst saknas, minst 0 i $(0, 0)$

(b) Störst $\dfrac{2}{e}$ i $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$, minst 0 i $(x, 0)$ och $(0, y)$

(c) Störst 1 i $(0, 0)$, minst saknas

(d) Störst $\dfrac{1}{12}$ i $(1, 1)$, minst 0 i $(x, 0)$ och $(0, y)$

(e) Störst $\sqrt{\dfrac{3}{2e}}$ i $\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$, minst $-\sqrt{\dfrac{3}{2e}}$ i $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$

(f) Störst $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ i $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, minst 0 i $(0, 0)$

4.5 Störst $9 + \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$ i $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, minst -3 i $(-1, 2)$

4.6 Störst $\sqrt{3}$ till $(\pm\sqrt{2}, \pm 1)$ (fyra punkter), minst $3^{1/4}$ till $(0, \pm 3^{1/4})$

4.7 Maximum 4 i $(2, 2)$, minimum $\dfrac{1}{4}$ i $\left(1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1 \mp \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (två punkter)

4.8 $d = h$ ger minimala arean $A = 3(2\pi V_0^2)^{1/3}$

4.9 $\left(\dfrac{7}{8}, \dfrac{3}{8}\right)$

4.10 $300\sqrt{3}$ cm^2 då delarna är 20 cm var och vinkeln mellan sidoväggar och botten är $2\pi/3$

4.11 Lokalt minimum i $(0, 0)$ men t.ex. $f(x, -2) = -x^2 + 4 \to -\infty$ då $x \to \pm\infty$

4.12 Störst $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ i $\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, minst $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ i $\pm\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

4.13 (a) störst $f\left(-\dfrac{1}{6}, 0, \pm\dfrac{\sqrt{35}}{6}\right) = \dfrac{25}{12}$, minst $f(1, 0, 0) = -2$

(b) störst $f\left(-\dfrac{1}{4}, \pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}, \pm 1\right) = \dfrac{25}{8}$ (fyra punkter), minst $f(1, 0, 0) = -2$

(c) störst $f\left(-\dfrac{1}{4}, \pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}, \pm 1\right) = \dfrac{25}{8}$ (fyra punkter), minst $f\left(\dfrac{1}{2}, 0, \pm\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$

(d) K och D är båda delmängder av C. Nej

4.14 Störst $\sqrt{6}$ till $\pm\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{5}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, minst $\sqrt{\dfrac{6}{7}}$ till $\pm\left(\dfrac{2}{\sqrt{7}}, \dfrac{1}{\sqrt{7}}, \dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)$

4.15 Minsta area är $3(2V_0)^{2/3}$ vid kvadratisk botten $(2V_0)^{1/3} \times (2V_0)^{1/3}$ och höjd $(2V_0)^{1/3}/2$

4.16 Största volym är $(A_0/6)^{3/2}$ då lådan är en kub med sidan $(A_0/6)^{1/2}$

4.17 Största volym är $\dfrac{8abc}{3\sqrt{3}}$ då de åtta hörnen är i $\left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \pm\dfrac{b}{\sqrt{3}}, \pm\dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$

4.18 Minsta arean är $3(2V_0)^{2/3}$ då höjden är $h = (V_0/\sqrt{2})^{1/3}$, bredden $b = 2h$ (i trianglarna) och längden $\ell = h\sqrt{2}$ (i rektanglarna)

4.19 $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ då $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{3}$

4.20 Störst e^{-18} i $(\sqrt{6}, \sqrt{3}, \sqrt{2})$, minsta värde saknas

4.21 Störst $1 + \sqrt{2}$ i $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, minst $-\dfrac{1}{2}$ i $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

4.22 Störst $\dfrac{1}{27}$ i $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, minst $-\dfrac{4}{27}$ i $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$, $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ och $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$

4.23 Störst $\sqrt{14}$ i $\left(\dfrac{3}{\sqrt{14}}, \dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{1}{\sqrt{14}}\right)$, minst $\dfrac{6 - 2\sqrt{3}}{3}$ i $\left(\dfrac{1 - \sqrt{3}}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1 + \sqrt{3}}{3}\right)$

4.24 Största avstånd är 2 till $\left(\dfrac{1 + \sqrt{7}}{2}, \dfrac{1 - \sqrt{7}}{2}, 0\right)$ och $\left(\dfrac{1 - \sqrt{7}}{2}, \dfrac{1 + \sqrt{7}}{2}, 0\right)$, minsta avstånd är $\dfrac{\sqrt{51}}{5}$ till $\left(-\dfrac{1}{5}, -\dfrac{1}{5}, \dfrac{7}{5}\right)$

4.25 Störst $1 + 2\sqrt{2}$ i $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, minst $1 - 2\sqrt{2}$ i $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$

4.26 $\left(-\dfrac{18}{15}, -\dfrac{1}{15}, \dfrac{34}{15}\right)$ respektive $(2, 1, -2)$

4.27 Minsta volymen är $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ för tangentplan i de åtta punkterna $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \pm\dfrac{1}{3}\right)$

4.29 Maximum $= \dfrac{1}{2}$

Integralkalkyl

6.1 (b) $\dfrac{25}{28} \le I \le \dfrac{7}{3}$

6.2 (a) $\dfrac{8}{3}$ (b) $6 \ln 2 - 3 \ln 3 = \ln \dfrac{64}{27}$

6.3 $\displaystyle\iint_D (xy + y^2)\, dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{2x} (xy + y^2)\, dy\right) dx = \int_0^4 \left(\int_{y/2}^2 (xy + y^2)\, dx\right) dy = \frac{56}{3}.$

6.4 (a) $-\dfrac{1}{2}(e^4 - 4e^2 - 1)$ (b) $\dfrac{4}{3}$ (c) $\dfrac{e - 1}{2}$ (d) $\dfrac{4}{5} \ln \dfrac{33}{32}$ (e) $\ln \dfrac{32}{27}$ (f) $1 - \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{\ln 2}{2}$

6.5 (a) $\dfrac{9}{4}$ (b) $12 \sin 2 - 2 \cos 2 - 10$ (c) $-\dfrac{1}{8}$

6.6 (a) $\dfrac{1}{3}$ (b) $\dfrac{3}{5}$

6.7 $\dfrac{45a^4}{2}$

6.8 (a) $\dfrac{\ln(1 + \sqrt{2})}{4}$ (b) $\arcsin \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$

6.9 (a) $\pi(e^4-1)$ (b) $-\dfrac{2\ln(1+2\sqrt{2})}{3}$ (c) $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ (d) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

6.10 (a) $\dfrac{\sin 1}{3}$ (b) $2(e^4-1)$ (c) $\dfrac{3\ln 3}{4}-\dfrac{1}{3}$ (d) $\dfrac{100}{3}$ (e) $\dfrac{\ln 3}{2}$

6.11 (a) $\dfrac{39\pi}{2}$ (b) $\dfrac{121\sqrt{2}}{9}$ (c) $\dfrac{1}{9}$

6.12 (a) $\dfrac{3\pi}{2}$ (b) $\dfrac{32}{9}$

6.13 $\dfrac{3\sin 2-\sin 4-2\sin 1}{4}$

6.14 $\dfrac{\pi}{4}(1-\cos a)$ då $a\geq 0$ och 0 då $a<0$. Största värdet $\dfrac{\pi}{2}$ för $a=\pi+2\pi n$, $n=0,1,2,\ldots$

6.15 Likhet gäller då E är en cirkel.

6.16 $\dfrac{74}{3}$

6.17 $81\pi(a+1)$, där a är bottenskivans z-nivå

6.18 $\tilde{D}$ är cirkelskivan $x^2+y^2\leq 1$, $A(x,y)=x^2+y^2$ och $B(x,y)=1$;
$a=0$, $b=1$ och D_z är cirkelskivan $x^2+y^2\leq z$ (för fixt z);
$I=\dfrac{4\pi}{21}$

6.19 $I=\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}\right)dy\right)dx=\frac{\ln 2}{2}-\frac{5}{16}$

6.20
(a) D_x är triangeln med hörn $(x,0,0)$, $(x,x^2,0)$ och (x,x^2,x^2); projektionen är $-1\leq x\leq 1$.

(b) D_y består av två rektanglar: den enas hörn är $(\sqrt{y},y,0)$, $(1,y,0)$, $(1,y,y)$ och $(\sqrt{y},y,y)$, den andras hörn fås genom att byta tecken på alla x-koordinater i den förstas; projektionen är $0\leq y\leq 1$.

(c) D_z består av två delar: den ena avgränsas av sträckan mellan $(\sqrt{z},z,z)$ och $(1,z,z)$, sträckan mellan $(1,z,z)$ och $(1,1,z)$ och parabelbiten $y=x^2$ mellan $(\sqrt{z},z,z)$ och $(1,1,z)$, den andra delen fås genom att byta tecken på alla x-koordinater i den första delen; projektionen är $0\leq z\leq 1$.

(d) D_{xy} är sträckan mellan $(x,y,0)$ och (x,y,y); projektionen är $0\leq y\leq x^2\leq 1$.

(e) D_{xz} är sträckan mellan (x,z,z) och (x,x^2,z); projektionen är $0\leq z\leq x^2\leq 1$.

(f) D_{yz} är sträckan mellan $(-1,y,z)$ och $(-\sqrt{y},y,z)$ och sträckan mellan $(\sqrt{y},y,z)$ och $(1,y,z)$; projektionen är $0\leq z\leq y\leq 1$.

6.21 $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{13}{15}-\dfrac{\pi}{4}\right)$

6.22 $\dfrac{8\pi}{5}$, oavsett om konen pekar uppåt eller nedåt

6.23 $\dfrac{1}{e}$

6.24 $\dfrac{32}{3}$

6.25 $\dfrac{3\pi}{4}$

6.26 (a) $-\dfrac{4\pi}{15}$ (b) $\dfrac{\pi}{2}$ (c) $\dfrac{9(2-\sqrt{2})\pi}{16}$

6.27 (a) $-\dfrac{1}{4}$ (b) $\dfrac{1}{6}$

6.28 $\dfrac{n}{2}$

6.29 (a) $\dfrac{2}{7}$ (b) $\dfrac{\ln 2}{3}$

6.30 (a) $\dfrac{4\pi abc}{3}$ (b) $\dfrac{4\pi}{3}$

6.31 $\dfrac{512}{3}$

6.32 (a) 120π (b) $\dfrac{9\pi}{2}$

6.33 (a) $0 \le V \le 1$ (b) $V = \dfrac{4}{15}$

6.34 $\dfrac{1}{7}$

6.35 (a) $\dfrac{16a^3}{3}$ (b) $8a^3(2-\sqrt{2})$

6.36 $\dfrac{25\pi}{2}$ cm^3

6.37 $\dfrac{16a^3}{9}$

6.38 $a^2h\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{16}{9}\right)$

6.39 (a) $\dfrac{2\pi\rho R^3}{3}$ (b) $\dfrac{\pi k R^4}{2}$ (R är halvklotets radie)

6.40 5952π kg ≈ 19 ton

6.41 (a) $\left(0, 0, \dfrac{3R}{8}\right)$ (b) $\left(0, 0, \dfrac{2R}{5}\right)$ i ett koordinatsystem där halvklotet har den plana ytan i xy-planet och den högsta punkten på positiva z-axeln (radien är R)

6.42 $\dfrac{h}{4}$

6.43 (a) $(1-e^{-n})^2$ (b) $1-(n+1)e^{-n}$ (c) 1

6.44 (a) $\dfrac{1}{8}$ (b) 6π

6.45 (a) Divergent (b) $\dfrac{1}{4}$

6.46 π

6.47 $\dfrac{\pi}{4}$

6.48 $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$

6.49 $\dfrac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}$ om $\alpha < 1$, divergent annars

6.50 4π

6.51 $\pi(\sqrt{2}-1)$

6.52 (a) Divergent (b) 0 (c) $-\frac{3}{4}$

6.53 (a) $f(x, y)$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $-\frac{\pi}{4}$ (d) Divergent

6.54 (a) Divergent (b) $\frac{1}{4}$